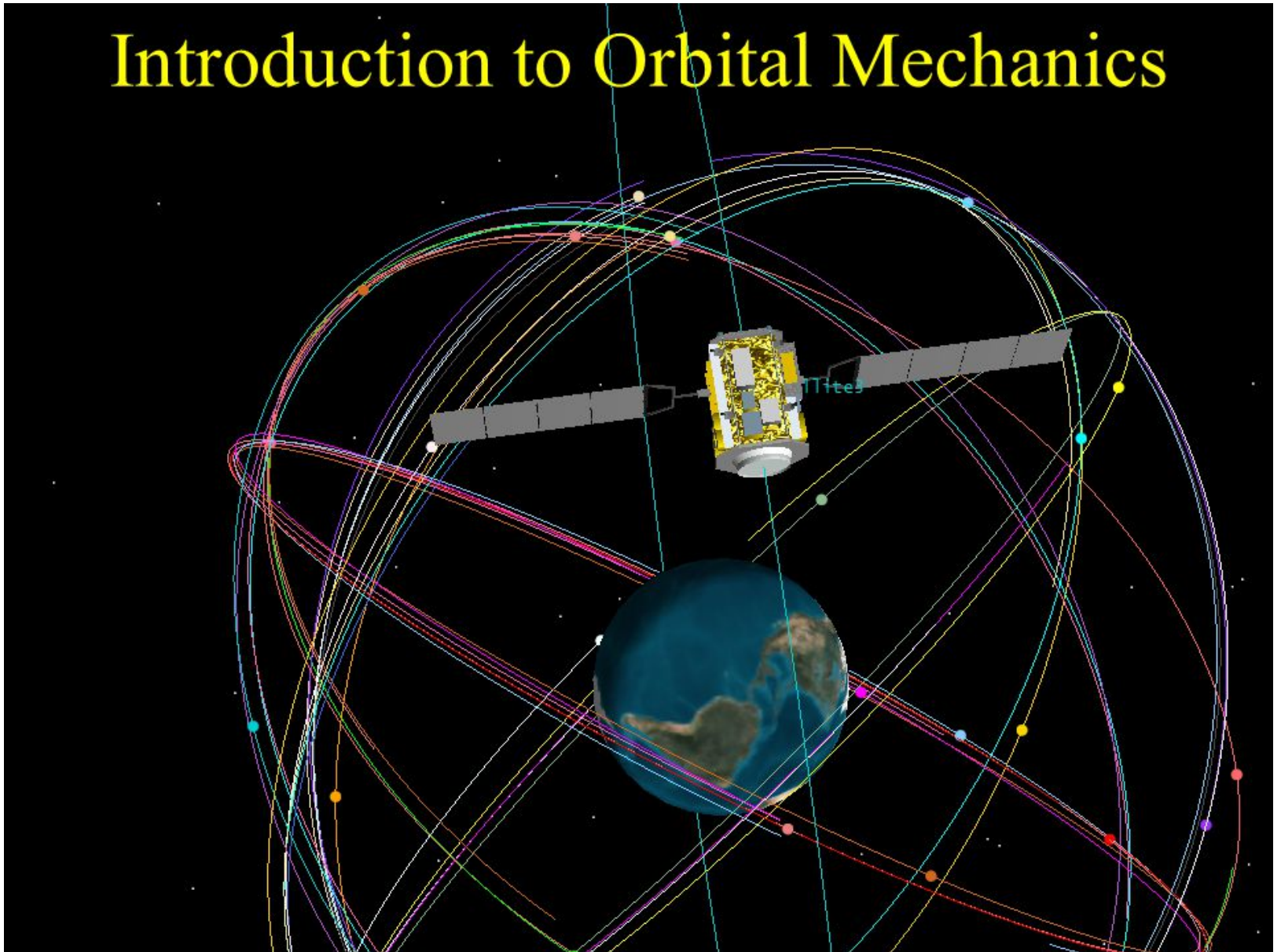
Teori Konu Başlıkları

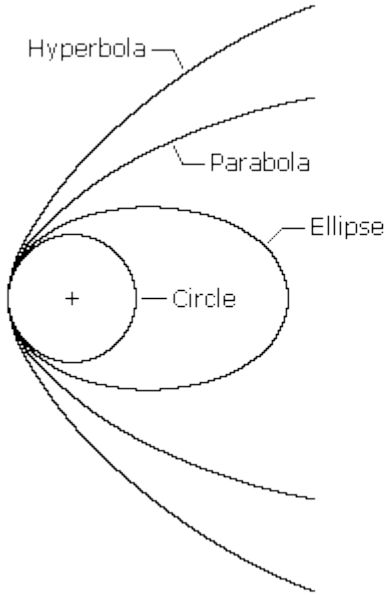
- Yörünge Mekaniği
  - Yörüngeden Hız Hesabı
- Çeşitli Yörüngelerde Hız Bağıntıları
  - Dairesel Yörüngeler
  - Eliptikel Yörüngeler
    - Enberi noktası
    - Parametre ucunda(M noktasında)ki durum
    - Yarı-küçük eksen ucunda(B noktasında)ki durum
  - Hiperbolik yörüngelerde genel hız bağıntısı
  - Parabolik yörüngelerde genel hız bağıntısı
- Hızdan Yörünge Hesabı

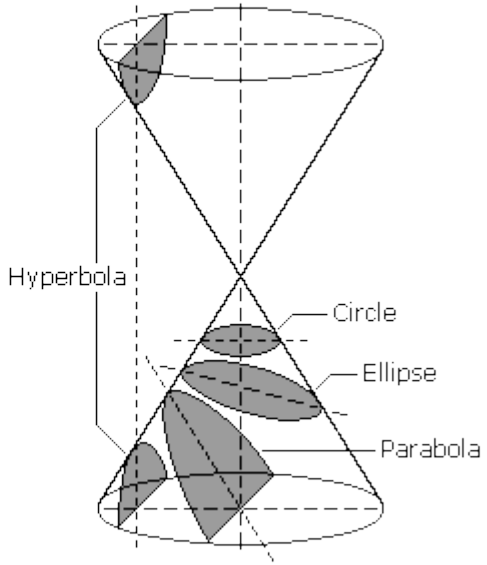
Yörünge Mekaniği

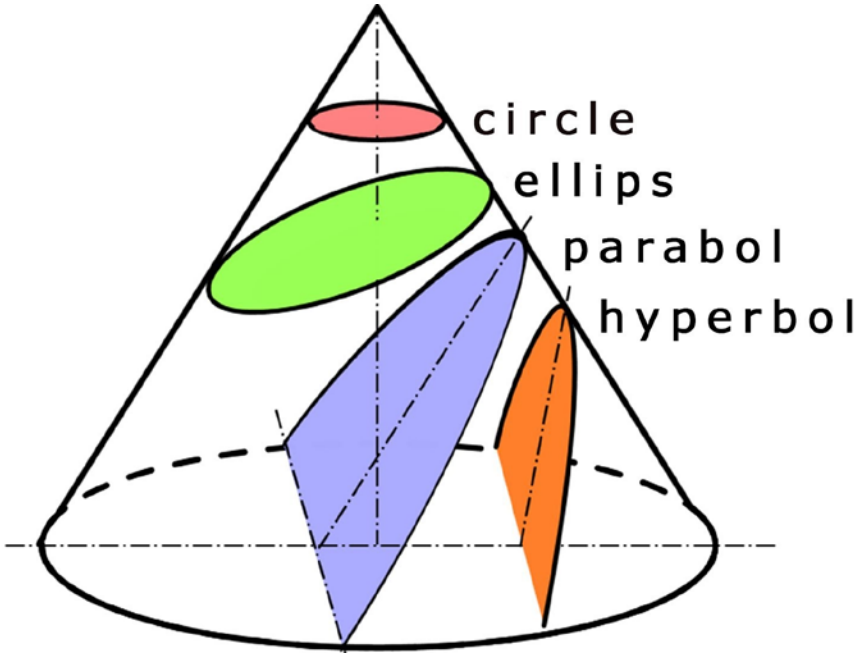


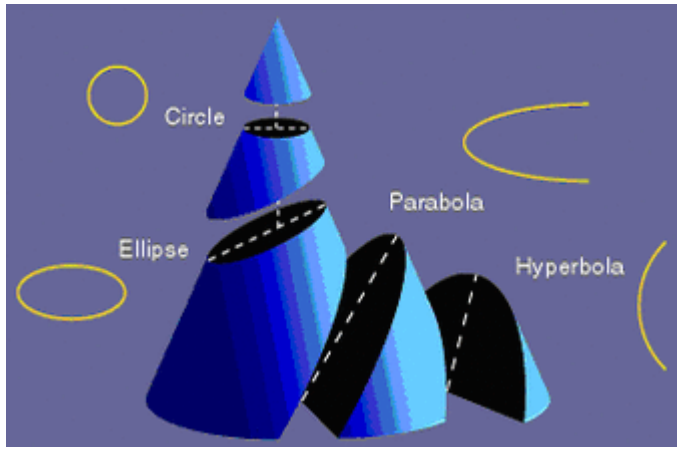
Yörüngeden Hız Hesabı

Küçük bir cismin yörüngesi üzerinde verilen herhangi bir noktadaki hızı ve bu hızın doğrultusu nedir? Uydu ve çekim etkisinde bulunan cisim (Yer, gezegen, vs) ikili bir sistem oluştururlar. Sorun iki cisim problemidir.





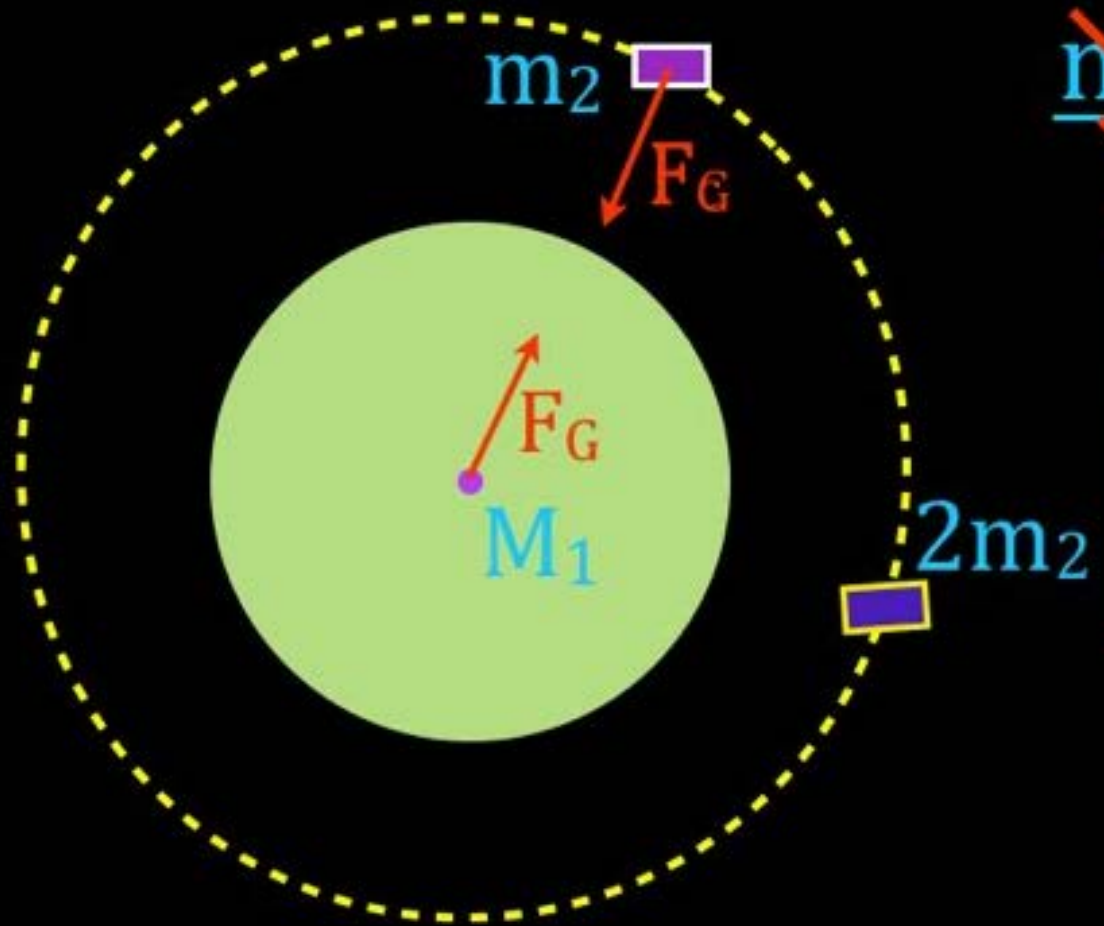




Orbital Velocity

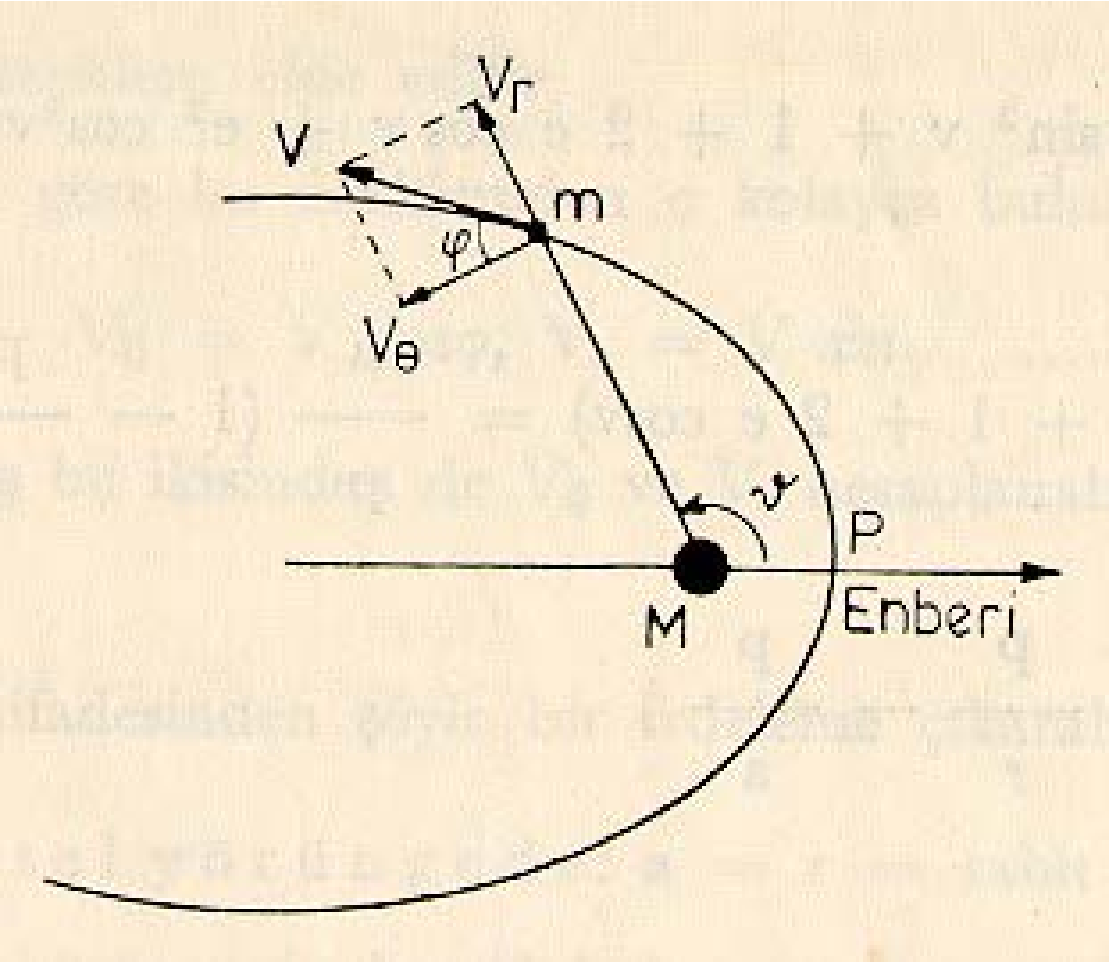
$$F_G = G\frac{M_1 \cdot m_2}{r^2}$$

$$F_c = \frac{m_2 v^2}{r}$$



$$\frac{m_2 v^2}{r} = G\frac{M_1 \cdot m_2}{r^2}$$

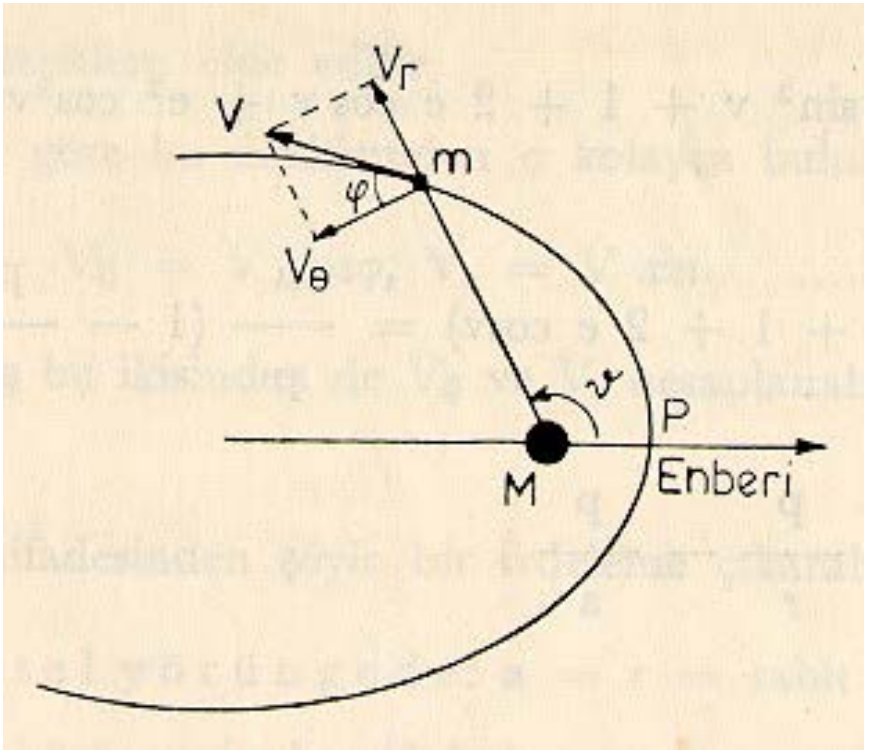
$$v = \sqrt{\frac{G \cdot M_1}{r}}$$



Yukarıdaki şekilde M kütleli bir cisim etrafında dolanan m kütleli bir uydu gösterilmiştir. Buna göre V; yörünge hızı, V_θ teğetsel hız, V_r dikine (radyal) hız, φ ise yörünge hızının durum açısıdır. Şimdi elimizdeki parametreleri ve denklemleri sıralayalım.

Tanımlar:

Yarıçap vektörünün sayısal değeri : r
Gerçek ayrıklık : ν
Yörünge yarı-büyük eksen uzunluğu : a
Yörünge dış merkezliği : e
Eylemsizlik sabiti : μ



Bu tanımların matematiksel ifadelerini yazalım:

Yörüngenin Genel Denklemi: $r = \frac{p}{1+e\cos v}$

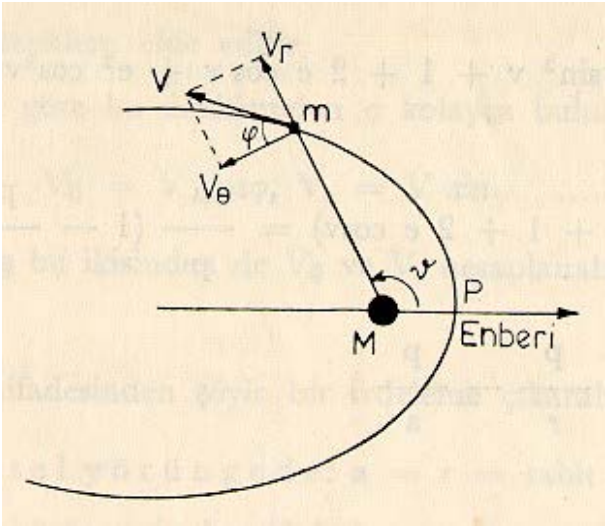
Yörüngenin parametresi: $p = a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu}$

Eylemsizlik sabiti: $\mu = G(M+m)$

Alan sabiti: $h = r^2\dot{\theta} = r^2\dot{v}$

Bu verilenler kullanılarak istenen terimler:

V_θ: Teğetsel hız bileşeni
V_r : Dikine hız bileşeni ve
φ : V nin durum açısı



Amacımız yörüngeye ait genel hız bağıntısını bulmaktır. Diğer yandan

$$\text{teğetsel hızın } V_\theta = r\dot{\theta} = r\frac{d\theta}{dt}$$

$$\text{dikine hızın } V_r = \dot{r} = \frac{dr}{dt}$$

olduğunu biliyoruz. Önce V_r 'nin dış merkezlik ve yörünge paremetresi cinsinden ifade edilen değerini bulalım. Yukarıdaki denklemler vasıtasıyla,

$$V_r = \dot{r} = \frac{pe\sin\theta\,\dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}$$

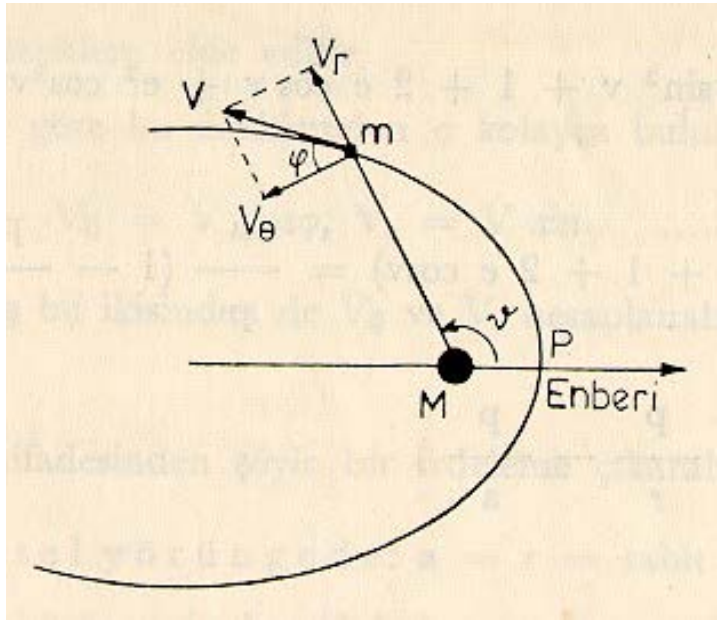
bulunur.

$h = r^2\dot{\theta}$ alan sabiti denkleminden

$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$ çekilip, ayrıca

$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ yörüngenin genel denklemi bağıntısından $(1 + e\cos\theta)$ çekilip, karesi alındıktan sonra $\left[\left(\frac{p}{r}\right)^2\right] V_r$ denkleminde $\left[V_r = \dot{r} = \frac{pe\sin\theta\dot{\theta}}{(1+e\cos\theta)^2}\right]$ yerine konulursa,

$$V_r = \frac{pe\sin\theta\frac{h}{r^2}}{\left(\frac{p}{r}\right)^2} = \frac{eh}{p}\sin\theta$$



bulunur. Teğetsel hız ($V_\theta = r\dot{\theta}$) ise $V_\theta = r\frac{h}{r^2} = \frac{h}{r}$

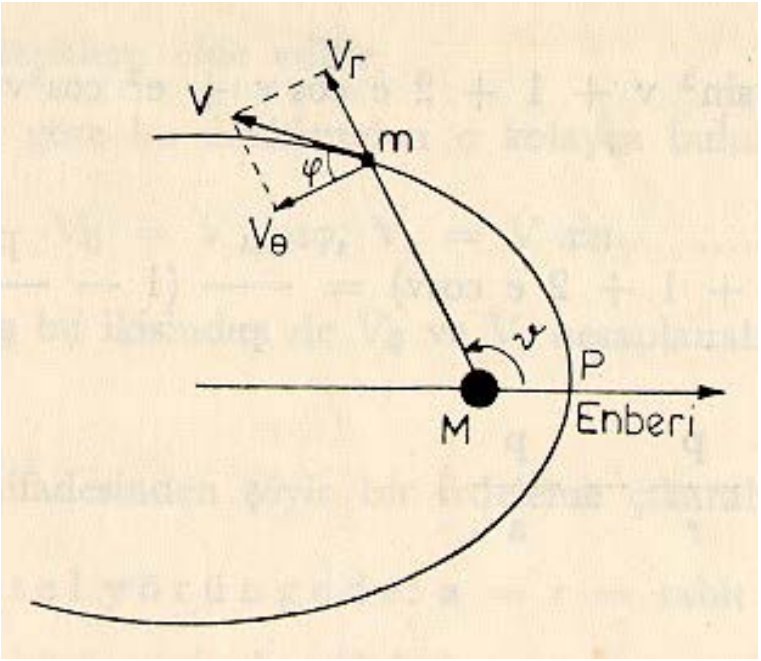
bulunur. $v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$

denkleminde $V_r = \frac{eh}{p}\sin\theta$ ve $V_\theta = \frac{h}{r}$ denklemleri yerine konulursa,

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2$$

$$v^2 = \left(\frac{eh}{p}\sin\theta\right)^2 + \left(\frac{h}{r}\right)^2$$

$$v^2 = \frac{e^2h^2}{p^2}sin^2\theta + \frac{h^2}{r^2}$$



$r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ yörüngenin genel denkleminden $\frac{1}{r^2} = \frac{(1+e\cos\theta)^2}{p^2}$ değerini

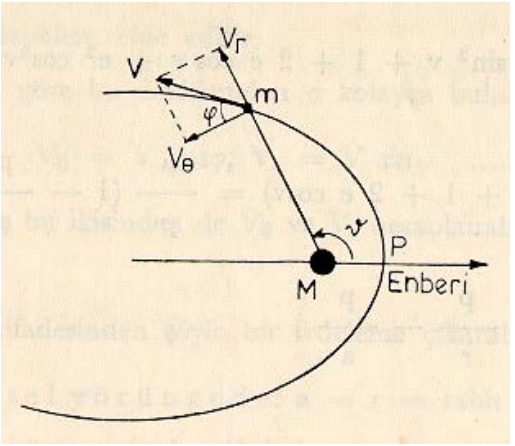
$v^2 = \frac{e^2h^2}{p^2}sin^2\theta + \frac{h^2}{r^2}$ denkleminde yerine koyup gerekli kısaltmalar yapıldıktan sonra

$$v^2 = \frac{e^2h^2}{p^2}sin^2\theta + \frac{h^2(1+e\cos\theta)^2}{p^2}$$

$$= \frac{h^2}{p^2}(e^2sin^2\theta + 1 + 2e\cos\theta + e^2cos^2\theta)$$

Burada $e^2 sin^2\theta + e^2 cos^2\theta = e^2(sin^2\theta + cos^2\theta) = e^2$

$$v^2 = \frac{h^2}{p^2}(e^2 + 1 + 2e\cos\theta)$$



elde edilir. $p = \frac{h^2}{\mu}$ yörüngenin parametresi bağıntısından μ çekilip ($\mu = \frac{h^2}{p}$),

$v^2 = \frac{h^2}{p^2}(e^2 + 1 + 2e\cos\theta)$ 'de yerine konulursa,

$$v^2 = \frac{\mu}{p}(e^2 + 1 + 2e\cos\theta)$$

bulunur. Bu denklemde *e* ve *p* terimlerinin yok edilmesi gerekmektedir. Bunun için $p = a(1 - e^2)$ ifadesinden e^2 çekilir $\left(e^2 = 1 - \frac{p}{a}\right)$ ve son bulunan v^2 denkleminde yerine konursa,

$$v^2 = \frac{\mu}{p}\left(1 - \frac{p}{a} + 1 + 2e\cos\theta\right)$$

$$= \frac{\mu}{p}\left[-\frac{p}{a} + 2(1 + e\cos\theta)\right]$$

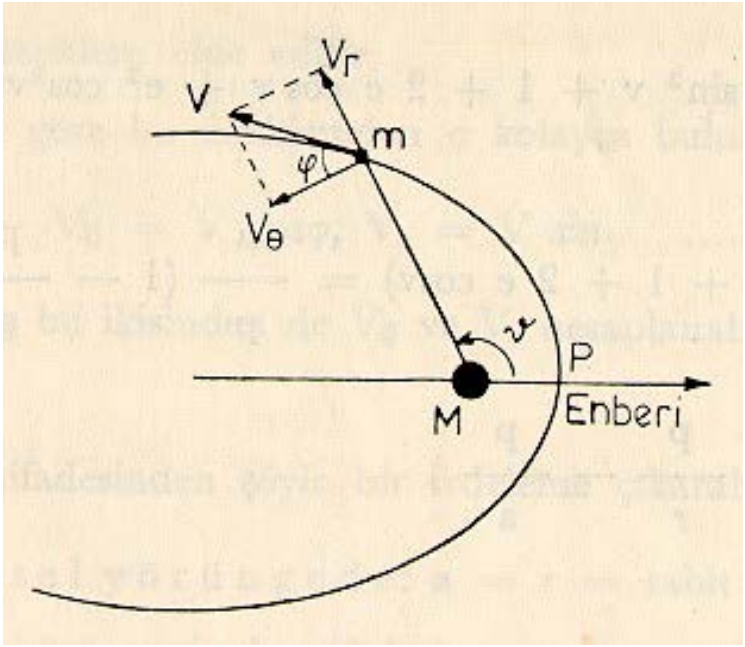
$(1 + e\cos\theta)$ ifadesi $r = \frac{p}{1+e\cos\theta}$ yörüngenin genel denkleminden $\frac{p}{r}$ 'ye eşit olduğundan

$$v^2 = \frac{\mu}{p}\left[-\frac{p}{a} + 2(1 + e\cos\theta)\right]$$

$$= \frac{\mu}{p}\left[-\frac{p}{a} + 2\frac{p}{r}\right]$$

sonuçta,

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

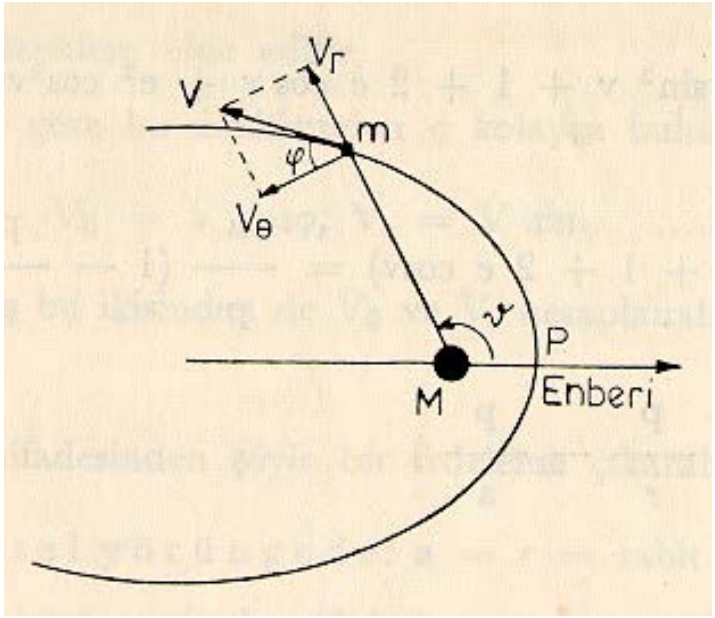


sonuçta,

$$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

elde edilir. Bu denkleme **Genel hız denklemi** denir. Buraya kadar yapılanları özetlersek, genel hız denkleminden bir çok yörünge üyesini tespit etmek mümkündür.

SONUÇ: *m*, *r*, *a* ve *e* değerleri biliniyorsa *V* hızı bulunabilir.



$p = a(1 - e^2)$ denkleminden *p* değeri
$h^2 = p\mu$ denkleminden *h* değeri
$V_r = \frac{eh}{p}\sin\theta$ denkleminden V_r teğetsel hız değeri
$V_\theta = \frac{h}{r}$ denkleminden V_θ dikine hız değeri
$\tan\varphi = \frac{V_r}{V_\theta}$ denkleminden de *V* değeri hesaplanabilir.
$v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$ Genel hız denklemini şimdi çeşitli yörünge türlerine uygulayalım.

Çeşitli Yörüngelerde Hız Bağıntıları
Dairesel Yörüngeler

Dairede *a* = *r* = sabit olduğundan, $V_r = 0$, dolayısıyla φ=0 olduğundan,

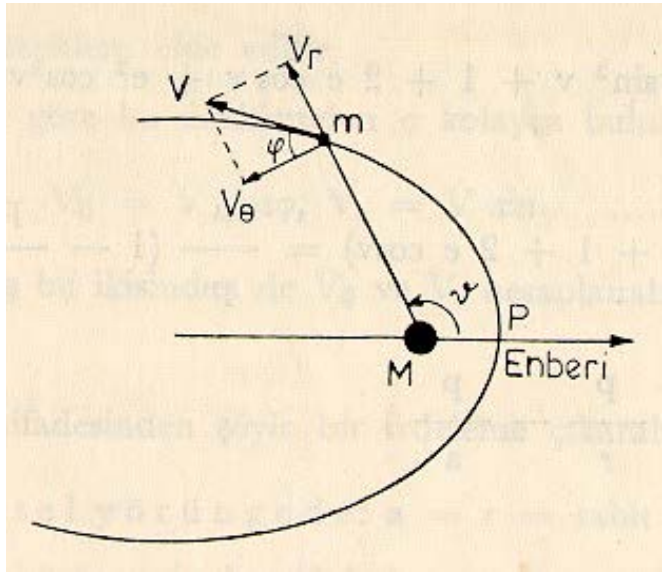
$$v^2 = v_c^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{\mu}{r}$$

$$v_c^2 = \frac{\mu}{r}$$

$$\tan\varphi = \frac{V_r}{V_\theta}\frac{0}{V_\theta} = 0$$

$$v^2 = v_r^2 + v_\theta^2 = v_\theta^2$$

olur, dolayısıyla $v_\theta = v_c$ 'dir. v_c dairesel yörüngedeki cismin hızıdır.



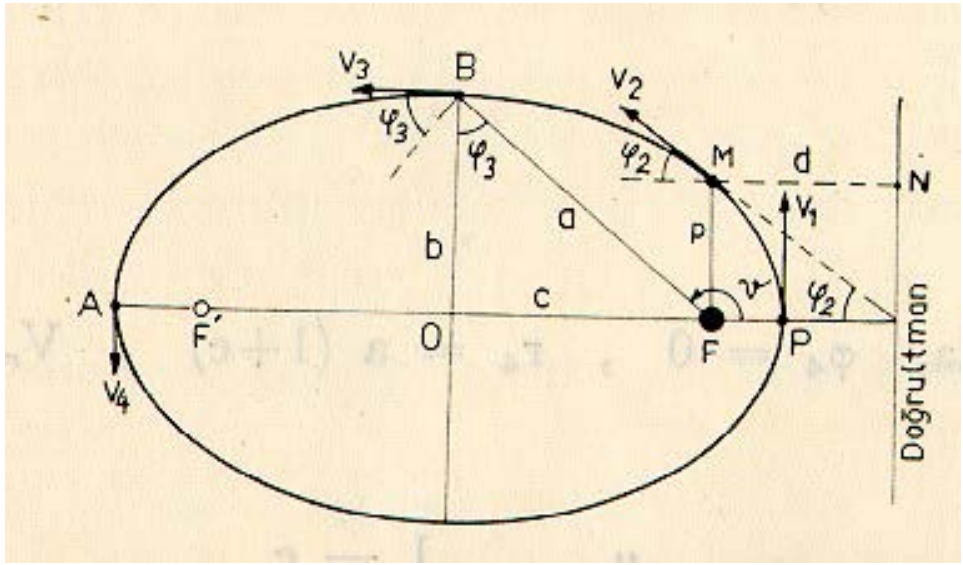


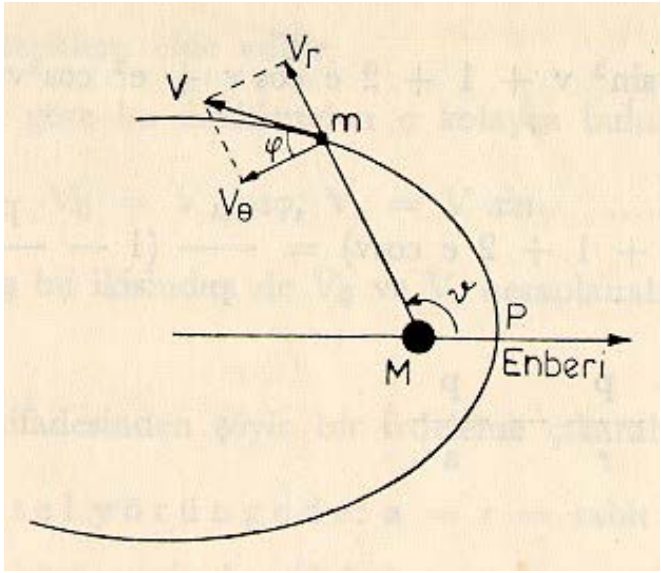
Eliptikel Yörüngeler

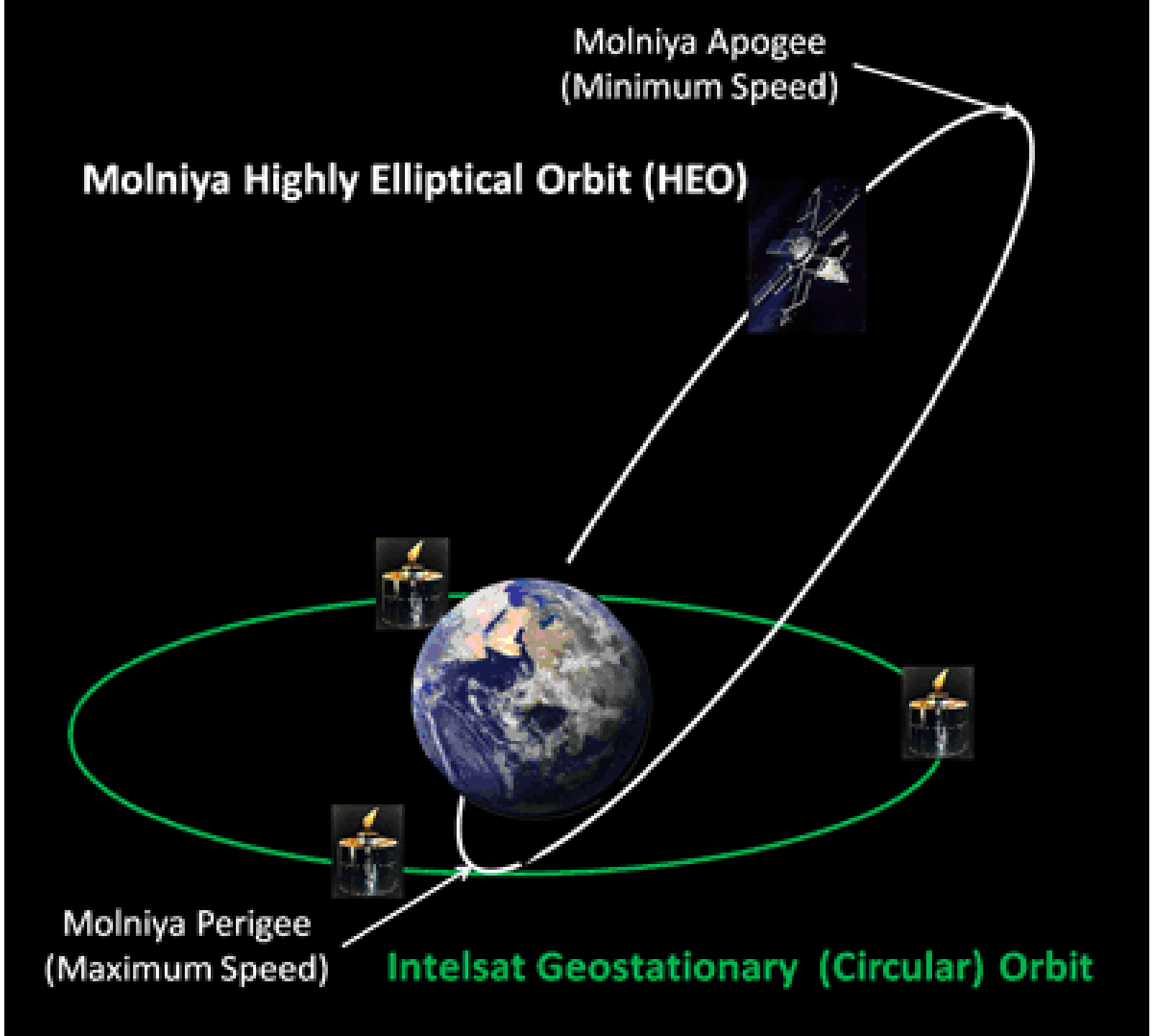
Eliptik bir yörüngede (elips) dolanan bir uydunun elipsin odaklarına olan uzaklığı devamlı değişmektedir. Odaklardan birinde bir gezegen bulunmaktadır. Dolayısıyla uydunun hızı da yörünge üzerinde sabit olmayıp devamlı değişmektedir. Elips şeklindeki bir yörüngede perihel, apel, küçük eksen uçları ve herhangi bir yerdeki hızlar farklı olmaktadır.

Eliptik yörüngelerdeki P, enberi (perihel), A enöte (Afel), M parametri ucu, B ise küçük eksen ucunu göstersin.

Bu noktalarda genel hız denkleminin ifadesini gösterelim.

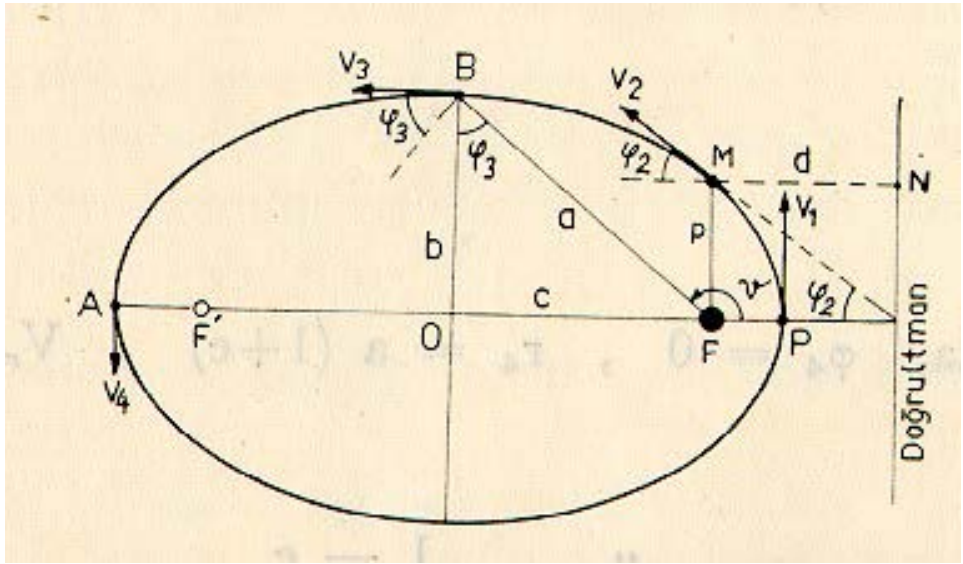


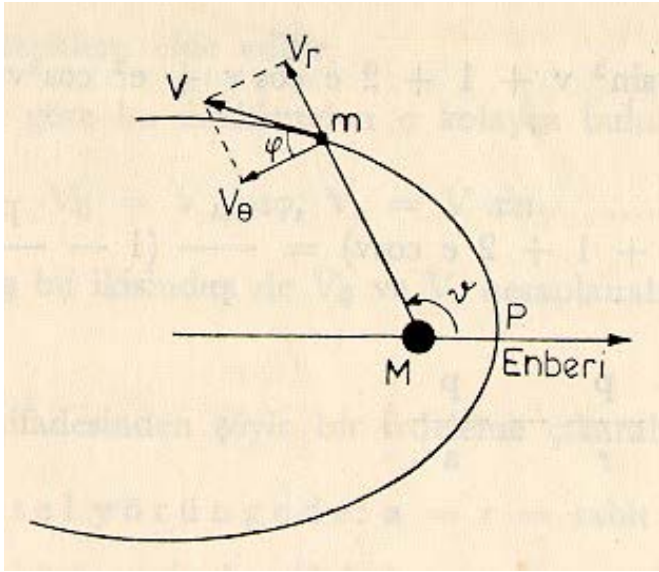



Molniya Apogee
(Minimum Speed)
Molniya Highly Elliptical Orbit (HEO)
Molniya Perigee
(Maximum Speed)
Intelsat Geostationary (Circular) Orbit

Enberi noktası

$\varphi_1 = 0$, $r = a(1-e)$ ve $V_r = 0$ olduğundan $V_\vartheta = V_1$ olur ve $V_1^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$ bulunur. V_1 enberide uydunun hızıdır.





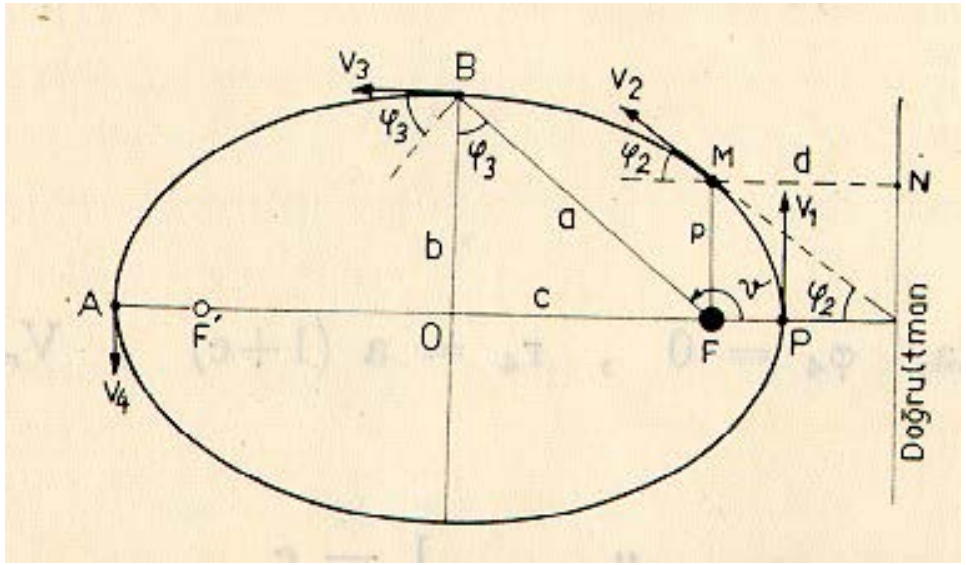
Parametre ucunda(M noktasında)ki durum

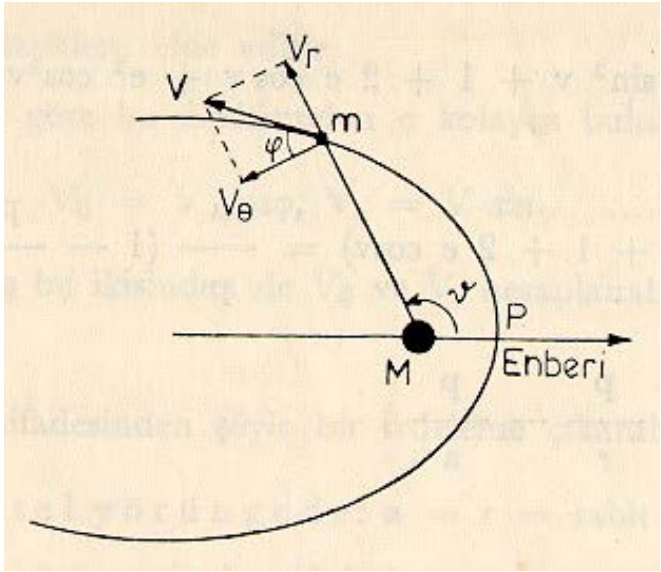
$\tan\phi_2 = \frac{r}{d}$, diğer yandan $e = \frac{P}{d}$ olduğundan, $\tan\phi_2 = e$ ve $r_2 = P = a(1-e^2)$ olduğundan $V_2^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1+e^2}{1-e^2}$ bulunur. V_2 , M noktasında uydunun hızıdır. Hız bileşenleri ise şunlardır.

Radyal hız: $V_r = V_2 \sin\phi_2$ ve teğetsel hız ise $V_\theta = V_2 \cos\phi_2$ 'dir.

$V_1^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$ (P)

$V_2^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1+e^2}{1-e^2}$ (M)





Yarı-küçük eksen ucunda(B noktasında)ki durum

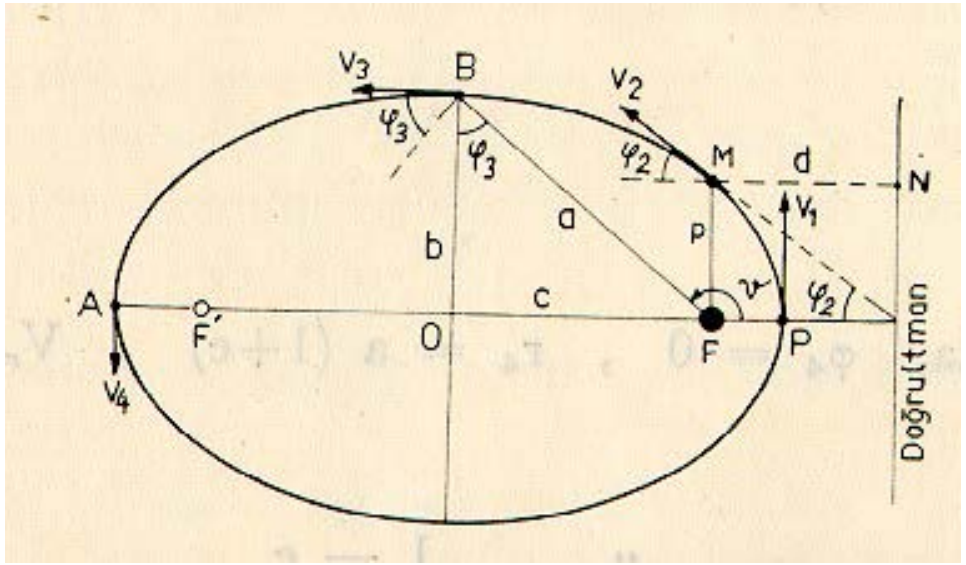
$\sin\phi_3 = \frac{c}{a} = \frac{ae}{a} = e$ ve $r_3 = a$ olduğundan $V_3^2 = \frac{\mu}{a}$ 'dır. Diğer taraftan $V_r = \frac{eh}{p}\sin v = \frac{eh}{p}\frac{b}{a} = \frac{eh}{p}\frac{a\sqrt{1-e^2}}{a} \Rightarrow V_r = \frac{eh}{p}\sqrt{1-e^2}$ bulunur. V_r 'nin başka bir ifadesi de,

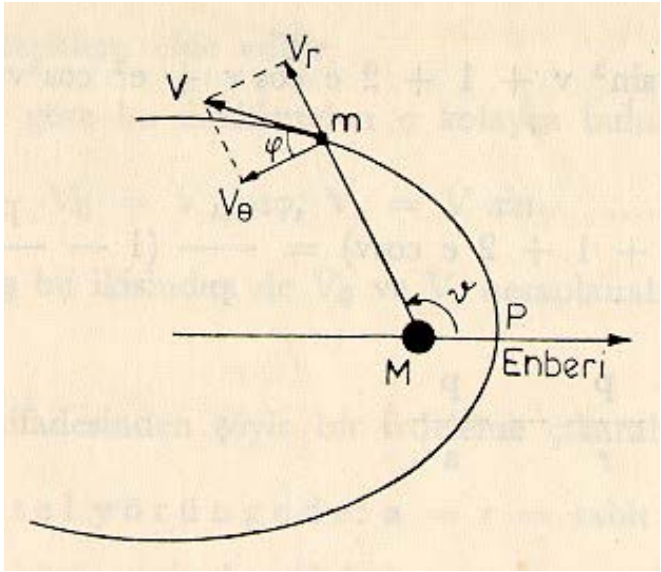
$V_r = v_3 \sin\phi_3 = \sqrt{\frac{\mu}{a}}e$ 'dir. $V_\theta = \frac{h}{a}$ bulunur.

$V_1^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$ (P)

$V_2^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1+e^2}{1-e^2}$ (M)

$V_3^2 = \frac{\mu}{a}$ (B)





En Öte noktasında(A)ki durum

$\varphi_4 = 0, r_4 = a(1-e), v_r = 0, V_\theta = V_4$ olduğundan, $V_4 = \frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}$ olur.

Hiperbolik yörüngelerde genel hız bağıntısı

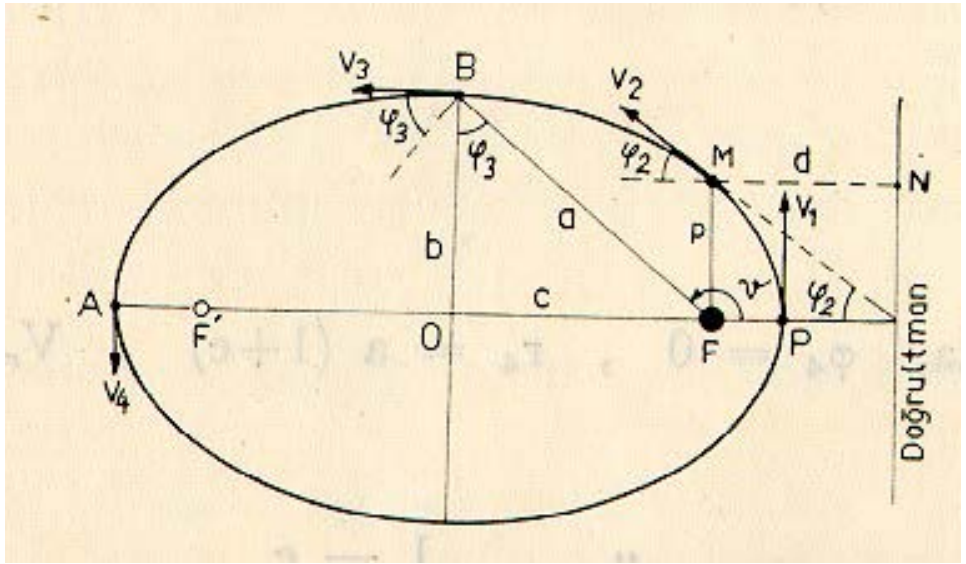
$$V_4^2 = \mu\left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a}\right)$$ 'olur.

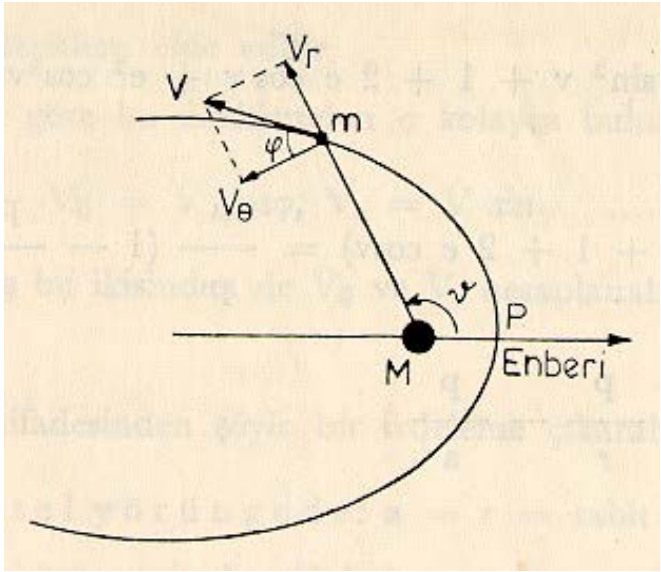
$V_1^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1+e}{1-e}$ (P)

$V_2^2 = \frac{\mu}{a}\frac{1+e^2}{1-e^2}$ (M)

$V_3^2 = \frac{\mu}{a}$ (B)

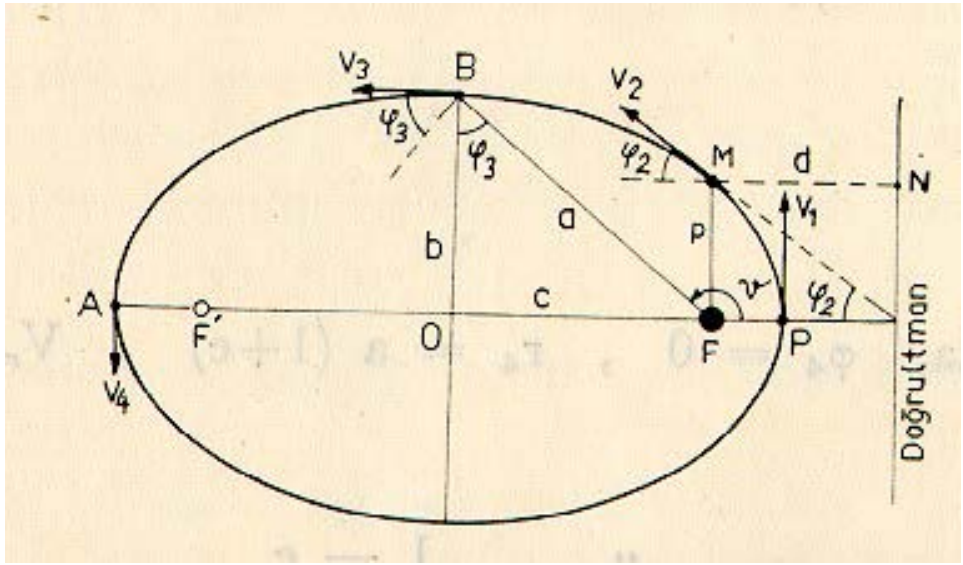
$V_4 = \frac{\mu}{a}\frac{1-e}{1+e}$ (A)

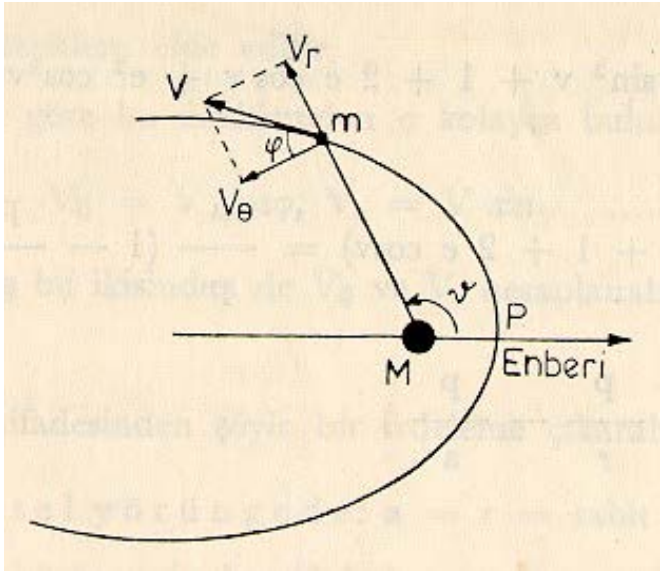




Parabolik yörüngelerde genel hız bağıntısı

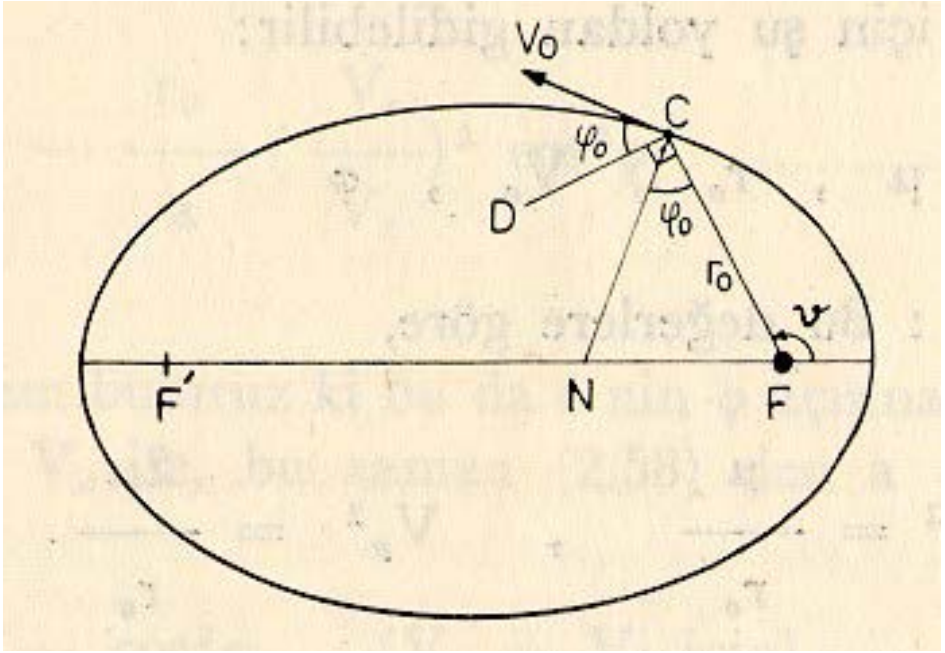
İkinci odak sonsuza gittiğinden $a = \infty$ olur. Buradan da $V_p^2 = \frac{2\mu}{r}$ bulunur. Görülür ki $V_p^2 = 2V_c^2$ 'dir.





Hızdan Yörünge Hesabı

Yer yörüngesine oturtulmak istenen bir uydu, önce geçici bir yörüngeye oturtulur. Bu geçici yörünge daire veya daireye yakın bir elipstir. Uydunun yerden uzaklığı oldukça azdır. Uydu bu geçici yörüngede belli bir süre tutulduktan sonra istenilen kendi yörüngesine oturtulur. Yörünge değişimi eski yörüngesindeki hız ve uydunun sahip olduğu potansiyel enerji göz önüne alınarak yapılır. Geçici yörüngesinin uygun bir yerinde (genellikle enberi noktasında) yörünge motorları kısa süre çalıştırılarak yeni bir hız kazandırılır. Uydu yeni bir hız ve potansiyel enerjisindeki değişimden dolayı kendine yeni bir yörünge çizer. Bu yörünge uydunun gerçekte oturtulmak istendiği yörüngedir.



Şekil. Yer etrafında elips yörüngeli bir uydunun yörüngesi üzerinde C noktasından φ_0 açısıyla ve V_0 hızıyla yapılan bir fırlatma.

Verilenler

Eylemsizlik sabiti: $\mu = G(M + m)$,

M: Yer veya gezegen kütlesi

m: uydunun kütlesi

Fırlatma uzaklığı: r_0

Fırlatma hızı: V_0

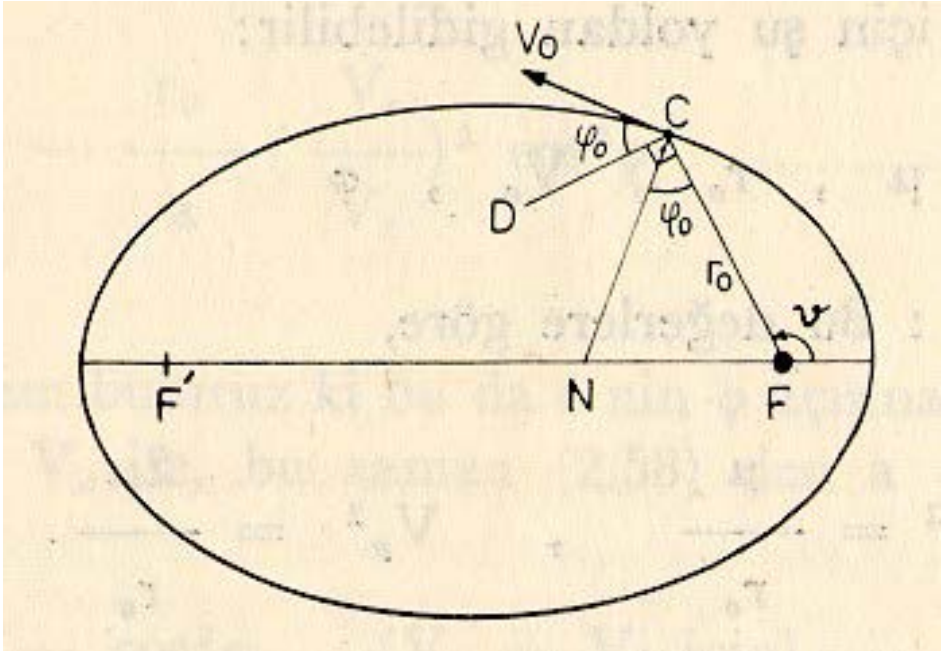
Fırlatma durum açısı: φ_0

Kullanılacak Formüller

Alan sabiti: $h = r_0 V_0 \cos\phi_0 \quad (h = r^2\dot{\theta} = r^2\dot{v}$ idi)

Parametre: $p = \frac{{r_0}^2 {V_0}^2 cos^2\,\phi}{\mu}$

[yörüngenin parametresi: $p = a(1-e^2) = \frac{h^2}{\mu}$ idi]



Yarı büyük eksen: $a = \frac{r_0\mu}{2\mu - r_0 {V_0}^2}$ [genel hız bağıntısından $v^2 = \mu\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$]

Dışmerkezlik: $e = \sqrt{1 - \frac{p}{a}}$

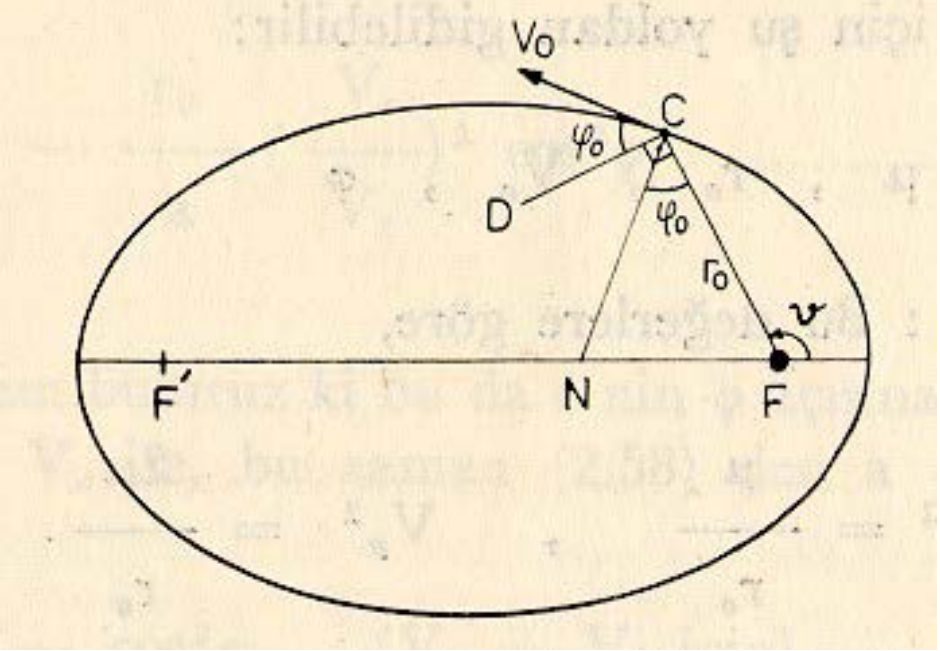
Dolanma peryodu: $P = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{\mu}}$

Amaç: Verilen μ, r_0, V_0 ve φ_0 değerlerine göre yeni yörüngenin şeklinin belirlenmesi.

İlk işlem olarak

$v_c^2 = \frac{\mu}{r_0}$ ve $V_p^2 = \frac{2\mu}{r_0}$ denklemlerinden V_c ve V_p bulunur.

İkinci işlem, yarı büyük eksen bağıntısı $a = \frac{r_0\mu}{2\mu - r_0 {V_0}^2}$ 'den a bulunur.



V_c, V_p ve a bilindiğine göre yörüngenin şekli hakkında bir kanıya varabiliriz:

$V_0{}^2 = V_p^2$ ise $a = \infty$, yörünge bir parabol

$V_c{}^2 < V_0{}^2 < V_p{}^2$ ise $0 < a < \infty$, yörünge bir elips

$V_0{}^2 > V_p{}^2$ ise $a < 0$, yörünge hiperbol

$V_0{}^2 = V_c{}^2$ ise $a = r_0$, yörünge daire ya da elips

Üçüncü adım: $V_0{}^2 = V_c{}^2$ ise yörüngenin daire ya da elips olduğunu ayırt etmek için φ fırlatma açısına bakmak gerekir.

$p = a(1 - e^2)$ ve $p = \frac{r_0{}^2 V_0{}^2 cos^2\phi}{\mu}$ (yörüngenin parametresi idi) denklemlerinden,

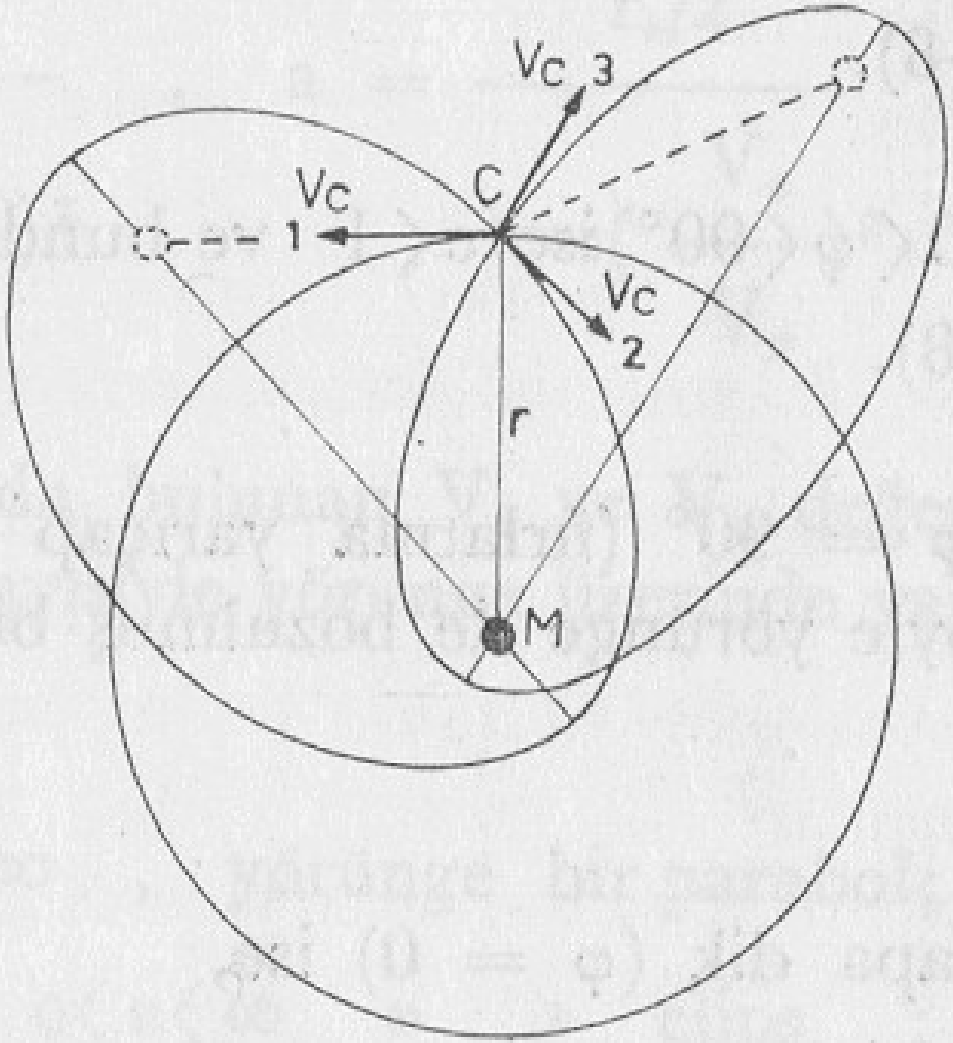
$e^2 = 1 - \frac{r_0{}^2 V_0{}^2}{\mu a} cos^2\phi$ ve bu denklemden de $e^2 = 1 - \frac{r_0}{a}\left(\frac{V_0}{V_c}\right)^2 cos^2\phi$ bulunur.

Eğer $V_0 = V_c$ ise, $a = r_0$ 'dır ve $e^2 = 1 - cos^2\phi$ 'dir. Buna gore ihtimaller:

a) $V_0 = V_c$ olduğunda $\varphi = 0$ olursa, $e = 0$ olur. Yörünge **daire**dir.
b) $V_0 = V_c$ olduğunda $0 < \varphi < 90$ ise $e < 1$ olur. Yörünge **elips**tir.
c) $V_0 = V_c$ iken $\varphi = 90$ ise (fırlatma yarıçap doğrultusunda), $e = \mp 1$ olur. Yörünge bozulmuş bir **parabol**dur.

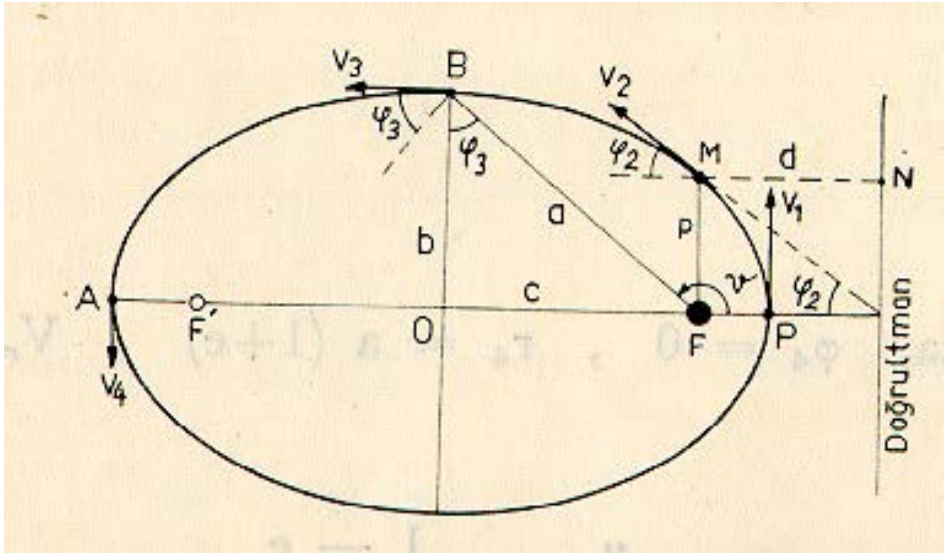
Dördüncü adım: Eğer fırlatma yarıçapa dik yani $\varphi = 0$ ise,

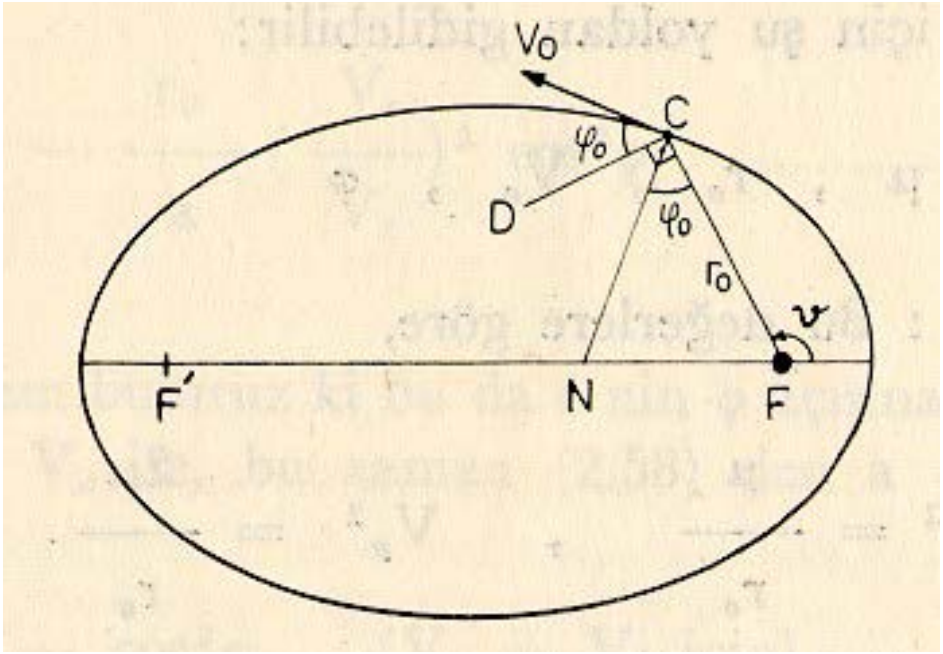
$e^2 = 1 - \frac{r_0}{a}\left(\frac{V_0}{V_c}\right)^2$ bağıntısı elde edilir. Bu durumda yeni yörünge elips, daire ve parabol yörüngeler olabilir. Aşağıdaki dört şekil farklı fırlatma açılarına göre oluşabilecek yeni yörüngeleri göstermektedir.

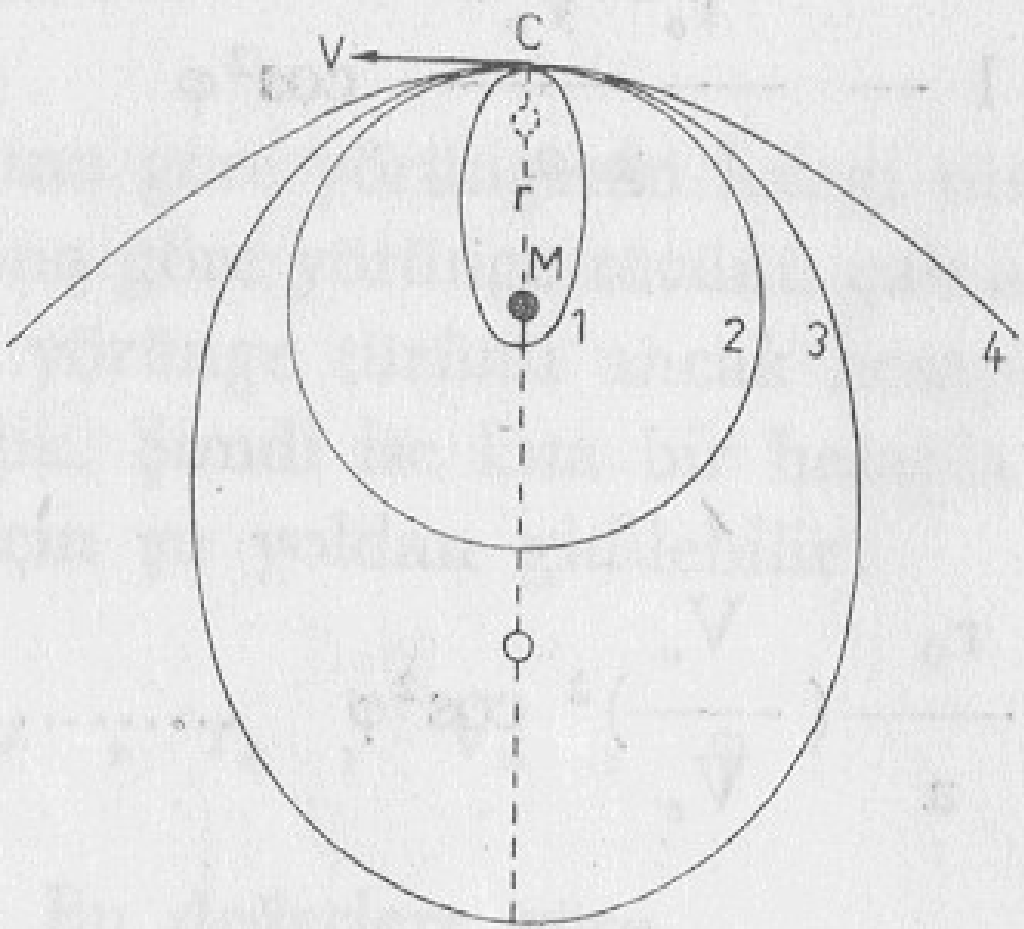


$V_o = V_c$ ile fırlatma.

1. Yörünge : $\varphi = 0.$; $a = r$, $e = 0$
2. » : $\varphi = 45°$; $a = r$, $e = 0.71$
3. » : $\varphi = 60°$; $a = r$, $e = 0.87$

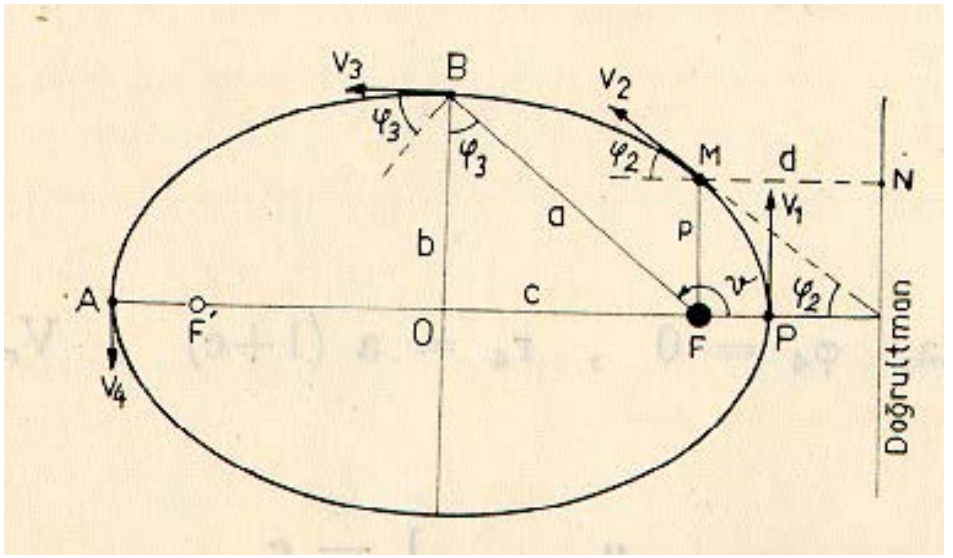


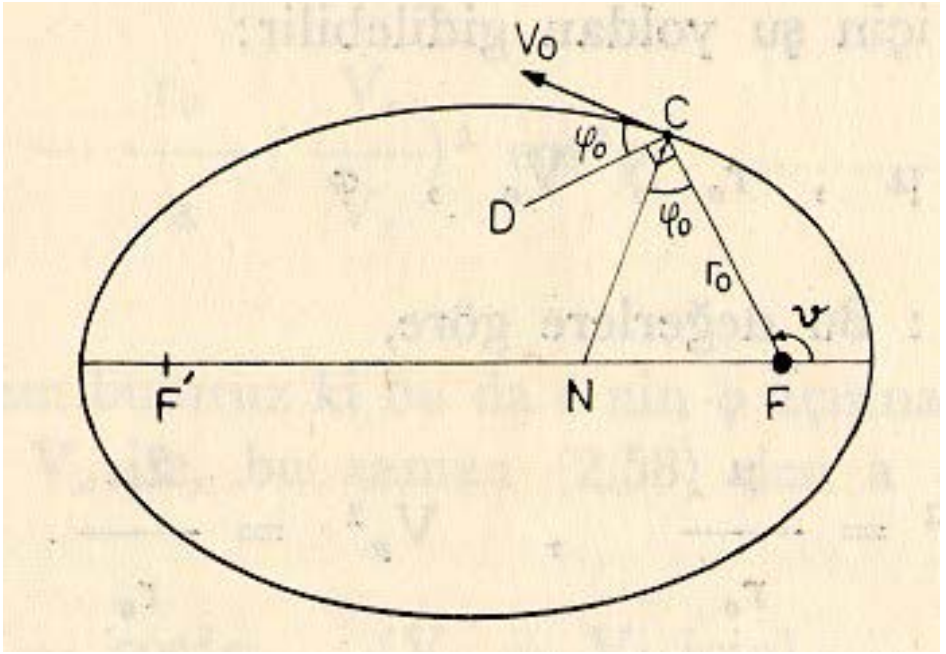


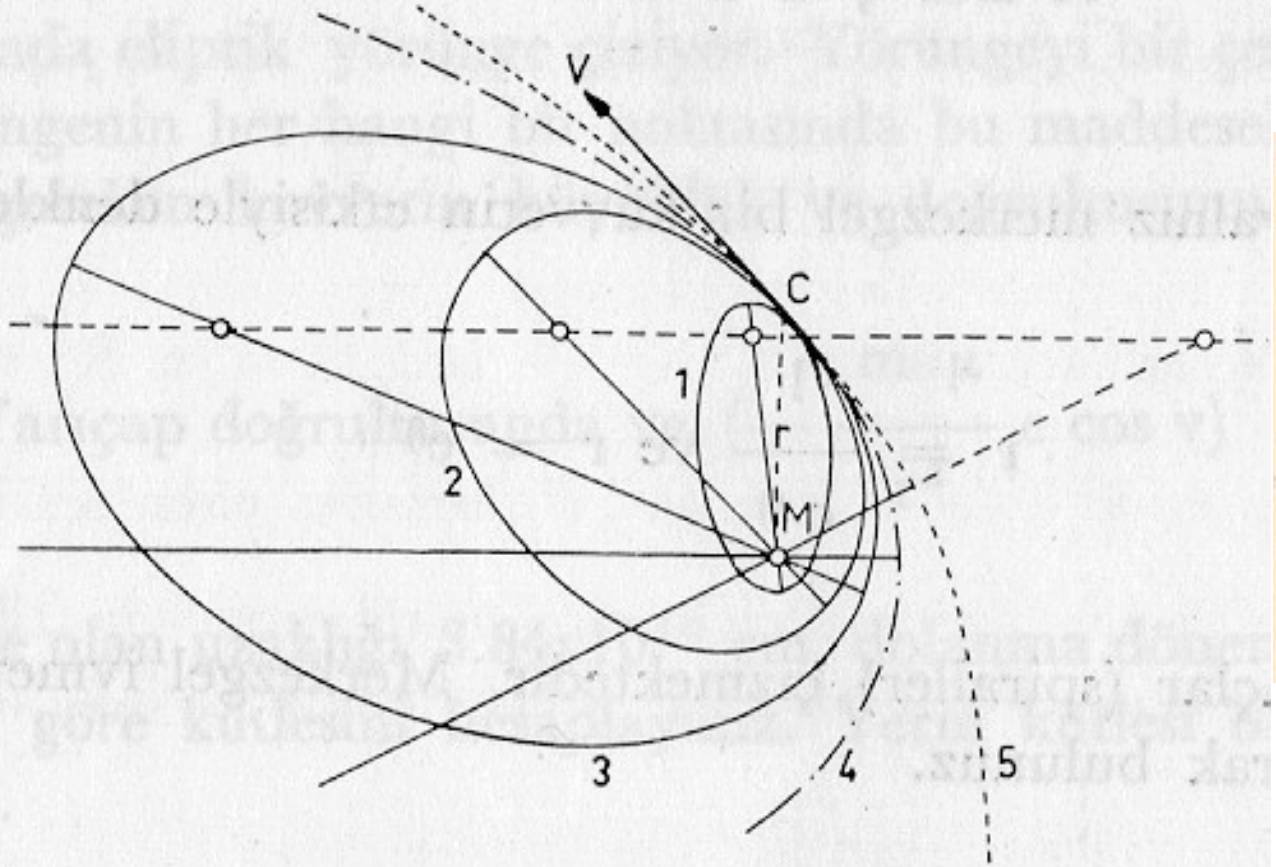


$\varphi = 0°$ lik bir fırlatma.

1. Yörünge : $V_o/V_c = 0.5$; $a/r = 0.57$, $e = 0.75$
2. » : » $= 1.0$; » $= 1.00$, $e = 0.00$
3. » : » $= 1.2$; » $= 1.78$, $e = 0.44$
4. » : » $= \sqrt{2}$; » $= \infty$, $e = 1$

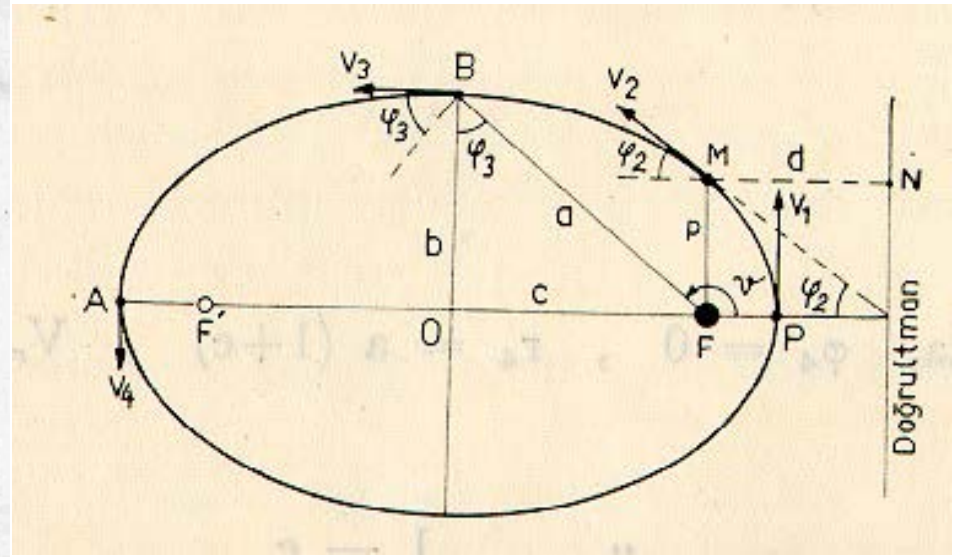


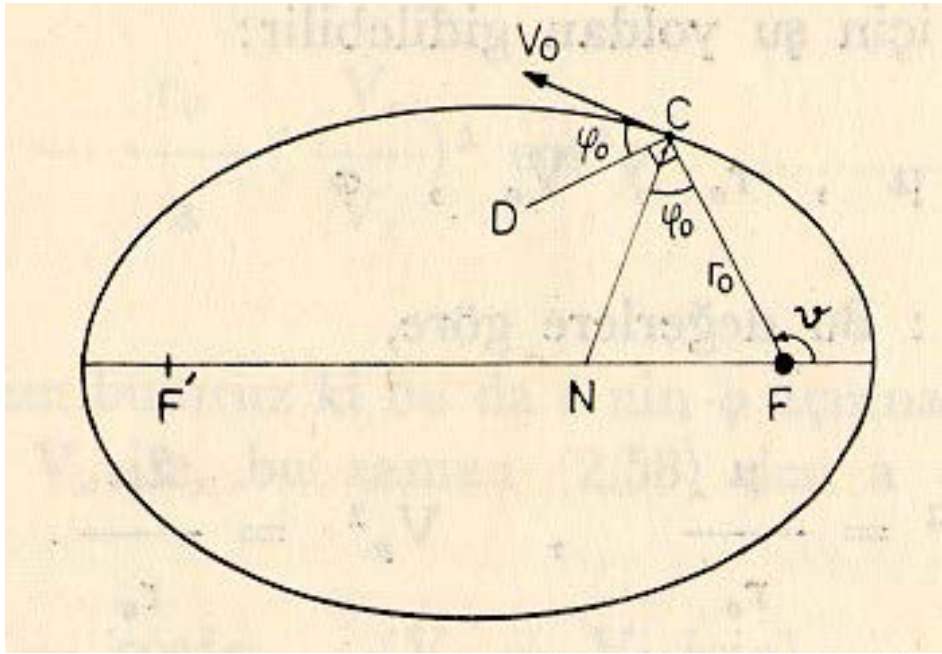


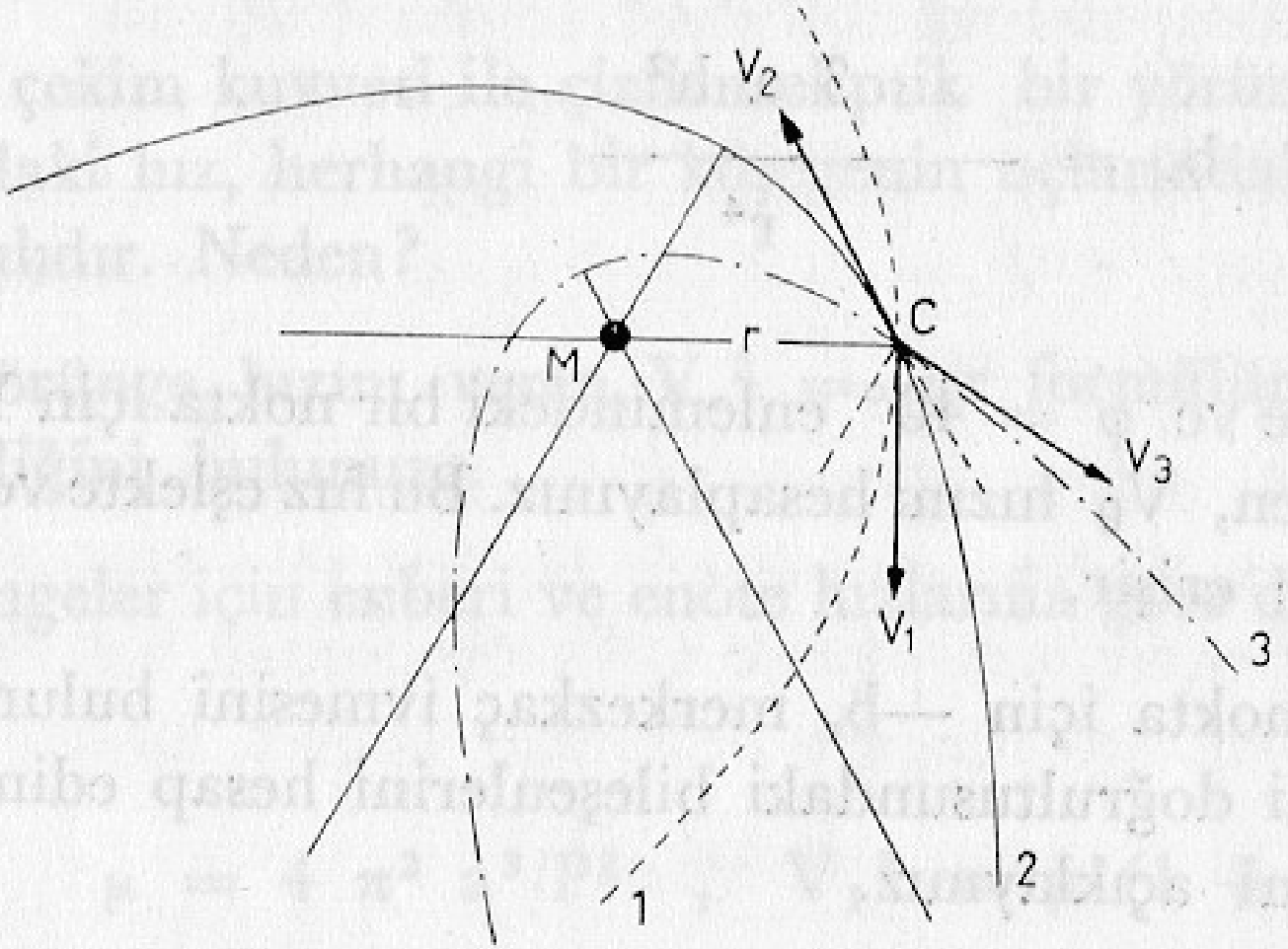


$\varphi = 45°$ için beş çeşit yörünge.

1. Yörünge : $V/V_c = 0.5$; $a/r = 0.57$, $e = 0.88$
2. » : » $= 1.0$; » $= 1.0$, $e = 0.71$
3. » : » $= 1.2$; » $= 1.78$, $e = 0.77$
4. » : » $= \sqrt{2}$; » $= \infty$, $e = 1.00$
5. » : » $= 2$; » $= -0.5$, $e = 2.23$







$V_o = V_p$ için üç çeşit parabolik yörünge, (her üçü için de V_o ayni alınmıştır).

1. Yörünge : $\varphi = 0°$, $p/2 = r$
2. » : $\varphi = 30°$, $p/2 = 3r/4$
3. » : $\varphi = 60°$, $p/2 = r/4$

