T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEZEGEN OLUŞUM DİSKLERİNDE OHMİK DİFÜZYONUN MANYETİK DÖNME KARARSIZLIĞINA KATKISI

Burak KINANOGLU

Fizik Anabilim Dalı

Matematiksel Fizik Programı

DANIŞMAN
Doç. Dr. Ayşe ULUBAY

Temmuz, 2025

İSTANBUL

Bu çalışma, 23.07.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı, Matematiksel Fizik Programında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Doç. Dr. Ayşe ULUBAY(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi Can GÜNGÖR
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakütesi

Dr. Öğr. Üyesi Sinem ŞAŞMAZ
İstanbul Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

İntihal Programı Beyanı

20.04.2016 tarihli Resmi Gazete'de yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

Proje Destekleri

Bu tez, 124F025 numaralı TÜBİTAK projesi ile desteklenmiştir.

Tezden Üretilmiş Yayınların Künye Bilgileri

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanma sürecinde yanımda olan, her zaman destek veren, sabrıyla ve sevgisiyle beni motive eden sevgili eşime en içten teşekkürlerimi sunuyorum. Bu süreçte onun varlığı benim için büyük bir güç kaynağı oldu.

Danışmanım Doç. Dr. Ayşe ULUBAY ve Doç. Dr. Ebru DEVLEN'e, bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösterdikleri, sorularımı sabırla yanıtladıkları ve her aşamada destek verdikleri için teşekkür ederim.

Ayrıca, lisans eğitimim sırasında danışmanlığımı yapan ve bu tezde jüri üyem olarak bana tekrar destek olan değerli Can hocama da teşekkür ederim. Akademik hayatımda üzerimde büyük emeği vardır.

Bu çalışmanın hayata geçmesini sağlayan ve tezimi destekleyen TÜBİTAK'a da teşekkür ederim.

Destek olan herkese teşekkür ederim.

Temmuz 2025 Burak KINANOGLU

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ ..... **iv**
İÇİNDEKİLER ..... **v**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **vi**
TABLO LİSTESİ ..... **vii**
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ ..... **viii**
ÖZET ..... **ix**
SUMMARY ..... **xi**
1. GİRİŞ **1**
2. GENEL KISIMLAR **3**
2.1. KÜTLE AKTARIM DİSKLERİ 3
2.2. MANYETİK DÖNME KARARSIZLIĞI 3
2.3. İDEAL OLMAYAN MANYETOHİDRODİNAMİK (MHD) SÜREÇLER 5
2.4. DİYAMANYETİK ETKİ VE MANYETİZASYON PARAMETRESİ 7
3. MALZEME VE YÖNTEM **8**
3.1 MODEL VE TEMEL MHD DENKLEMLERİ 8
3.2 DOĞRUSAL KARARLILIK ANALİZİ 10
3.3 BOYUTSUZLAŞTIRMA VE DAĞILMA BAĞINTISI 17
4. BULGULAR **22**
TARTIŞMA VE SONUÇ **30**
KAYNAKLAR **32**
EKLER **34**
EK 1. Vektör özdeşlikleri 34
ÖZGEÇMİŞ **35**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 2.1. Manyetik dönme kararsızlığının fiziksel benzetimi: Manyetik alan çizgileriyle birbirine bağlı iki akışkan parçacığının diferansiyel dönme altında açısal momentum taşınımı. (Armitage, 2022). ……..……..….4

Şekil 2.2 Disk boyunca, yoğunluk (ρ) ve sıcaklık (T) düzleminde ideal olmayan MHD etkilerinin baskınlık bölgeleri: Ohmik difüzyon iç yani yoğunluğun yüksek olduğu bölgelerde (grafikte sağ kısım), Hall etkisi orta bölgelerde (grafikte orta kısım), ambipolar difüzyon ise dış yani yoğunluğun düşük olduğu bölgelerde (grafikte sol kısım) etkilidir (Armitage, 2011). ……..……..……..6

Şekil 4.1: G = -1, κ = 0, ε = 0 ve farklı Re_M değerleri için maksimum büyüme oranları: Re_M = 10^5 (siyah çizgi), Re_M = 100 (kırmızı çizgi), Re_M = 10 (mavi çizgi), Re_M = 1 (yeşil çizgi), Re_M = 0.5 (turuncu çizgi), ve Re_M = 0.1 (sarı çizgi). Re_M azaldıkça, maksimum büyüme oranı düşmekte, tepe noktası daha küçük X değerlerine kaymakta ve kararsızlık bölgesi daralmaktadır. ……..……..…23

Şekil 4.2: κ = 0, ε = 0 ve Re_M = 100 için farklı G değerlerinde maksimum büyüme oranları: G = -1 (siyah çizgi), ve G = 0 (kırmızı çizgi). $G = -1$ durumunda $G = 0$ durumuna göre maksimum büyüme oranı artmakta ve kararsızlık bölgesi genişleyerek X ekseni üzerindeki aralık büyümektedir. G = 0 için maksimum büyüme oranı 0.74 olup, bu değer Balbus ve Hawley (1991) çalışmasında bulunan standart MRI büyüme oranına çok yakın bir değerdir. ….……24

Şekil 4.3: G = -1, κ = 0, farklı manyetik Reynolds sayısı, Re_M ve farklı manyetizasyon parametresi, ε, değerleri için maksimum büyüme oranları: ε = 0, Re_M = 100 (siyah çizgi), ε = 0.5, Re_M = 100 (kırmızı çizgi), ε = 0.5 ve Re_M = 10^5 (mavi çizgi). Manyetizasyon parametresinin (ε) artırılması, kararsızlığın büyüme oranını azaltmakta, kararsızlığın geçerli olduğu X aralığını ise genişletmektedir. ……..……...…….…25

Şekil 4.4: G = -1, κ = 0, ve ε = 0.5 için, farklı Re_M değerleri için maksimum büyüme oranları: Re_M = 10^5 (siyah çizgi), Re_M = 1 (kırmızı çizgi), ve Re_M = 0.5 (mavi çizgi). Re_M azaldıkça maksimum büyüme oranı artmakta olup, bu davranış ε = 0 durumu için gözlemlenenin tersidir (bkz. Şekil 4.1). ……..……...…26

Şekil 4.5: G = -1, κ = 5 ($B_{0_r} = 5B_{0_z}$), ve ε = 0 için, Re_M değerleri için maksimum büyüme oranları: Re_M = 100 (siyah çizgi), Re_M = 1 (kırmızı çizgi), ve Re_M = 0.5 (mavi çizgi). κ değerinin artması, maksimum büyüme oranlarının yükselmesine neden olmaktadır……...…27

Şekil 4.6: G = -1, κ = 5, ve ε = 0.5 için, farklı Re_M değerleri için maksimum büyüme oranları: Re_M = 10^5 (siyah çizgi), Re_M = 1 (kırmızı çizgi), ve Re_M = 0.5 (mavi çizgi). ε = 0.5 ve κ = 5 durumlarının birleşimi. Bu birleşim kararsızlığın büyümesinde Ohmik difüzyonun daha önceden elde edilen sonuçlardan farklı sonuçlara sebep olabileceğine işaret etmektedir. ..……...28

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1: Şekil 4.1'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği *X* değerleri. ……..…….…..…..…23

Tablo 4.2: Şekil 4.2'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği *X* değerleri. ……..…….…..…..…24

Tablo 4.3: Şekil 4.3'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği *X* değerleri. ……..…….…..……..…25

Tablo 4.4: Şekil 4.4'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği *X* değerleri. ……..…….…..…..…26

Tablo 4.5: Şekil 4.5'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği *X* değerleri. ……..…….…..…..…27

Tablo 4.6: Şekil 4.6'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği *X* değerleri. ……..…….…..……..29

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler **Açıklama**

t : Zaman

ρ : Yoğunluk

P : Basınç

$\vec{\mathbf{B}}$: Manyetik alan vektörü

$\vec{\mathbf{v}}$: Hız vektörü

$\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{0}}$: Dengedeki manyetik alan vektörü

$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{0}}$: Dengedeki hız vektörü

$\vec{\mathbf{B}}_{\mathbf{1}}$: Tedirginlik manyetik alan vektörü

$\vec{\mathbf{v}}_{\mathbf{1}}$: Tedirginlik hız vektörü

η : Manyetik difüzyon katsayısı

Ω : Açısal hız

$\mathbf{k_z}$: Dikey dalga sayısı

ω : Tedirginliğin frekansı

σ : Boyutsuz frekans (ω / Ω)

$\mathbf{v_A}$: Alfven hızı

$\mathbf{M_A}$: Alfven Mach sayısı

$\mathbf{Re_M}$: Manyetik Reynolds sayısı

ε : Manyetizasyon parametresi

κ : Manyetik alanın r bileşeninin z bileşenine oranı

G : Manyetik alanın gradiyenti

Kısaltmalar **Açıklama**

AB : Astronomik birim

MHD : Manyetohidrodinamik

MRI : Magnetorotational Instability

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GEZEGEN OLUŞUM DİSKLERİNDE OHMİK DİFÜZYONUN MANYETİK DÖNME KARARSIZLIĞINA KATKISI

Burak KINANOGLU

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Ayşe ULUBAY

Manyetik dönme kararsızlığı (Magnetorotational Instability: MRI), kütle aktarım disklerinde açısal momentum taşınımını açıklamak için en güçlü mekanizma adaylarından biri olarak kabul edilmektedir. Gezegen oluşum disklerinin iç bölgelerinde, Ohmik difüzyon nedeniyle bu kararsızlığın büyüme oranı ideal manyetohidrodinamik (MHD) durumdan farklılık göstermektedir. Bu tezde, doğrusal kararlılık analizi yöntemiyle diyamanyetik gezegen oluşum disklerinde Ohmik difüzyonun MRI üzerindeki etkisi incelenmiştir. Manyetik alanın hem radyal hem de dikey bileşenleri dikkate alınarak, eksen-simetrik tedirginliklerin büyüme oranları belirlenmiştir. Ohmik difüzyonun katkısını belirleyen manyetik Reynolds sayısı (Re_M), manyetik alan bileşenlerinin oranı (κ), manyetik alan gradyenti (G) ve manyetizasyon parametresi (ε) gibi parametrelerin etkileri araştırılmıştır. Elde edilen sonuçlar, daha önceden yapılan çalışmalarda olduğu gibi, Re_M azaldıkça Ohmik difüzyonun MRI'yı baskılayarak maksimum büyüme oranını düşürdüğünü ve kararsızlık bölgesini daralttığını göstermektedir. Ancak manyetizasyon parametresi ε artırıldığında kararsızlık aralığı genişlemekte ve bazı durumlarda Re_M azaldıkça büyüme oranı artmaktadır. Manyetik alan gradiyentinin göz önüne alınması maksimum büyüme oranını artırarak ve kararsızlık bölgesini genişleterek MRI'yı güçlendirmektedir. Ayrıca κ parametresinin artırılması, maksimum büyüme oranlarını artırmaktadır. Bu bulgular, gezegen oluşum disklerinin iç bölgelerinde MRI'nın manyetizasyon ve Ohmik difüzyon altında da etkili bir şekilde işleyebileceğine işaret etmektedir.

Temmuz 2025, 47 sayfa.

Anahtar kelimeler: Gezegen Oluşum Diskleri, Açısal Momentum Taşınımı, Manyetik Dönme Kararsızlığı, Diyamanyetik Etki, Ohmik Difüzyon

SUMMARY

M.Sc. THESIS

THE EFFECT OF OHMIC DIFFUSION ON MAGNETOROTATIONAL INSTABILITY IN PROTOPLANETARY DISCS

Burak KINANOGLU

Istanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ayşe ULUBAY

Magnetorotational instability (MRI) is considered to be one of the plausible candidate mechanisms to explain angular momentum transport in accretion discs. In the inner regions of protoplanetary discs, the growth rate of this instability differs from the ideal magnetohydrodynamic (MHD) case due to Ohmic diffusion. In this thesis, the effect of Ohmic diffusion on MRI in diamagnetic protoplanetary discs is investigated using linear stability analysis. Considering both the radial and the vertical components of the magnetic field growth rates of axisymmetric perturbations are obtained. The effects of parameters such as the magnetic Reynolds number (Re_M), which quantifies the contribution of Ohmic diffusion, the ratio of magnetic field components (κ), the magnetic field gradient (G), and the magnetization parameter (ε) are examined. The results obtained, consistent with previous studies, show that as Re_M decreases, Ohmic diffusion suppresses MRI by reducing the maximum growth rate and narrowing the instability region. However, when the magnetization parameter ε is increased, the instability range expands, and in some cases, the growth rate increases as Re_M decreases. The magnetic field gradient strengthens MRI by increasing the maximum growth rate and broadening the instability region. Additionally, increasing the κ parameter increases the maximum growth rates. These findings indicate that MRI might still operate in the inner regions of protoplanetary discs even under the influence of magnetization and Ohmic diffusion.

July 2025, 47 pages.

Keywords: Protoplanetary Discs, Angular Momentum Transport, Magnetorotational Instability, Diamagnetic Effect, Ohmic Diffusion

1. GİRİŞ

Kütle aktarım diskleri, yıldız, karadelik gibi cisimlerin çevresinde oluşan, yoğunluk ve sıcaklık açısından farklılık gösteren yapılardır. Bu disklerdeki madde, merkeze doğru hareket ederken, önemli miktarda potansiyel enerji açığa çıkar ve bu enerji elektromanyetik ışıma olarak gözlemlenir. Bu yönüyle kütle aktarım diskleri, astrofizikte hem elektromanyetik ışınım kaynağı hem de madde taşınımı bakımından temel yapı taşlarından biri olarak kabul edilmektedir (Frank ve diğ. 2002).

Bir kütle aktarım diskinin evrimini anlayabilmek için, diskteki açısal momentumun ne şekilde taşındığı sorusuna yanıt verilmesi gerekir. Çünkü bir parçacık merkezdeki cisme yaklaşabilmek için açısal momentumunu kaybetmek zorundadır. Bu konuda yapılan çalışmalar, türbülansın açısal momentum taşınımında anahtar bir rol oynadığına işaret etmektedir (Balbus ve Hawley, 1991; Balbus 1998; Balbus, 2003). Dolayısıyla, diskteki türbülansın nasıl ortaya çıktığı ile ilgili çalışmalar önem kazanmaktadır.

Bu bağlamda, manyetik dönme kararsızlığı (MRI) diskte türbülansa neden olan ve açısal momentum taşınımını sağlayan güçlü bir aday mekanizmadır. Balbus ve Hawley (1991) tarafından detaylı şekilde tanımlanan MRI, diferansiyel dönme ile zayıf bir manyetik alanın etkileşimi sonucu oluşur. MRI'nın önemi, yalnızca zayıf bir manyetik alan varlığında dahi ve çok kısa zaman ölçeklerinde büyüme göstermesidir.

Her ne kadar MRI ilk olarak ideal manyetohidrodinamik (MHD) koşullarında ortaya çıkan bir kararsızlık olarak önerilmiş olsa da gezegen oluşum diskleri gibi disklerde ideal MHD koşulları çoğu zaman sağlanmaz (Armitage, 2011). Gezegen oluşum diskleri gibi düşük sıcaklık ve düşük iyonlaşma derecesine sahip ortamlarda, plazma ile manyetik alanın birlikte hareket etmesi ile tanımlanan "donmuşluk" koşulu geçerli değildir ve ideal olmayan MHD süreçleri devreye girer. Bu tezde, bu etkilerden biri olan Ohmik difüzyon ele alınmıştır. Ohmik difüzyon, düşük iletkenlik nedeniyle elektrik akımlarının sönümlenmesini ve manyetik alanların zamanla zayıflamasını ifade eder.

Bu tez çalışmasının amacı, ideal olmayan MHD etkilerinin başında gelen Ohmik difüzyonun etkisi altında, manyetik eksen ile dönme ekseni arasında açı olan (hizalanmamış), diyamanyetik

gezegen oluşum disklerinde MRI'nın, davranışını araştırmaktır. Daha önce Devlen ve Pekünlü (2007) tarafından yapılan çalışmada manyetik ekseni ve dönme ekseni çakışan sistemler (hizalı sistemler) için diyamanyetik etkilerin MRI üzerindeki etkisi incelenmiştir. Diyamanyetik akımlar MRI'ın büyüme oranını değiştirir. Manyetik dipol ekseni dönme eksenine dik olduğunda, diyamanyetik akımların neden olduğu manyetik alan gradiyentleri tarafından sürülen yeni kararsız modlar ortaya çıkar. Devlen ve diğ. (2020) hizalanmamış disklerde yıldız dipol alanının radyal bileşenini de dikkate alarak ideal MHD koşulunda manyetik dönme kararsızlığını çalışmışlardır. Diyamanyetik akım ile manyetik alanın radyal bileşeni arasındaki etkileşimin MRI'ı daha da güçlendirdiğini göstermişlerdir. Ayrıca, manyetik alanın dikey bileşeninde bir radyal gradiyentin oluşunun hem eksen simetrik hem de eksen simetrik olmayan modların büyüme oranlarında bir artışa neden olduğunu göstermişlerdir. Bu tez çalışmasında ise hizalanmamış disk geometrisi dikkate alınarak ideal olmayan MHD koşulunda, yani manyetik indüksiyon denklemine Ohmik difüzyonun dahil edilmesiyle MRI'nın nasıl davranacağı çalışılmıştır. Kararsızlığın büyümesinin, manyetizasyon düzeyi ve diğer fiziksel parametreler ile nasıl değiştiği olarak araştırılmıştır.

Tezin "Genel Kısımlar" bölümünde manyetik dönme kararsızlığı, ideal olmayan MHD süreçleri ve diyamanyetik etki hakkında bilgiler sunulmuştur.

"Malzeme ve Yöntem" kısmında ilk olarak, kullanılan fiziksel model tanıtılmış ve temel MHD denklemleri verilmiştir. Temel denklemlerden sonra, uygulanan doğrusal kararlılık analizine dair hesaplamalar anlatılmış ve boyutsuzlaştırma işleminden sonra elde edilen dağılma bağıntısı verilmiştir. Bu bölümde son olarak, dağılma bağıntısının çözümlerinin nasıl elde edildiği anlatılmıştır.

"Bulgular" bölümünde, elde edilen sonuçlar doğrultusunda, sistemin kararsız ya da kararlı olduğu parametre aralıklarına dair şekiller verilmiştir. Özellikle manyetik Reynolds sayısı ve manyetizasyon parametresinin MRI üzerindeki etkileri incelenmiştir.

Tezin son kısmı "Tartışma ve Sonuç" bölümünde, tezden elde edilen ana sonuçlar ve bundan sonra yapılabilecek çalışmalar hakkında bir tartışma sunulmuştur.

Bu tez çalışması, hem teorik MHD literatürüne katkı sunmayı hem de gezegen oluşum disklerinde MRI'nın davranışını daha gerçekçi koşullar altında ortaya koymayı amaçlamaktadır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. KÜTLE AKTARIM DİSKLERİ

Bazı yıldızların, kara deliklerin veya benzeri yoğun gök cisimlerinin etrafında, bu cisimlerin kütleçekim etkisi altında hareket eden maddeler gözlemlenmektedir. Bu maddeler çoğunlukla yörüngesel hareketlerinden dolayı açısal momentum taşırlar ve açısal momentumun korunumu ilkesi gereği doğrudan merkeze düşemez, bunun yerine cismin etrafında dönerler. Yörüngedeki bu maddeler çarpışmalar ve viskoz kuvvetler yoluyla birbiriyle etkileşime girdikçe, zamanla merkezdeki cismin etrafında düzleşmiş, dönen bir yapı oluşturacak biçimde yayılmaya başlarlar. Bu yapıya "kütle aktarım diski" adı verilir.

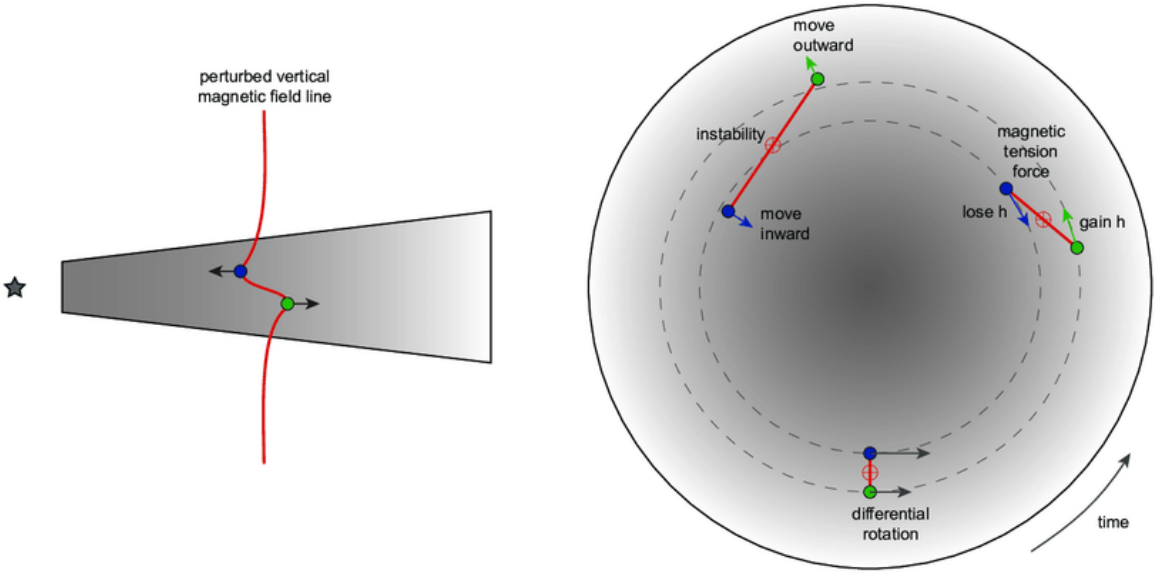
Disklerde açısal momentum taşınımının nasıl gerçekleştiği konusu, astrofizikte hâlâ tam anlamıyla çözülememiş temel problemlerden biridir. Moleküler viskozite, gözlenen madde aktarım oranlarını açıklamakta yetersiz kalır (Frank ve diğ., 2002). Bu nedenle, türbülans gibi etkilerin devreye girdiği düşünülmektedir. Ancak klasik hidrodinamik açısından Kepler tipi dönme profiline sahip sistemlerde doğal bir türbülans beklenmez. Bu durum, türbülansı başlatabilecek fiziksel mekanizmaların araştırılmasına neden olmuştur (Balbus ve Hawley, 1991; 1998).

2.2. MANYETİK DÖNME KARARSIZLIĞI

Manyetik dönme kararsızlığı (MRI), kütle aktarım disklerinde açısal momentumun taşınımını açıklamak üzere öne sürülmüş en güçlü mekanizmalardan biridir. MRI'nın diskte etkin olması için dışa doğru azalan açısal hız ve zayıf bir manyetik alanın varlığı gereklidir (Balbus ve Hawley, 1991).

MRI'ın ortaya çıkışını anlatmak için **Şekil 2.1**'de gösterildiği gibi, manyetik alan çizgisiyle bağlanmış iki akışkan parçacığı düşünülebilir (Armitage, 2022). Dikey yönde varsayılan manyetik alana bir tedirginlik uygulanmış olsun. Diskteki parçacıklar zaman içinde, diferansiyel dönme nedeniyle birbirlerinden ayrılmaya başlar. İçteki parçacık dıştakine göre daha fazla açısal momentuma sahiptir ve manyetik stresler yoluyla dıştaki parçacığa açısal momentum aktarır. Sonuç olarak, içteki parçacık yavaşlar ve merkeze doğru hareket eder,

dıştaki ise hızlanarak dışa doğru hareket eder. İki parçacık birbirinden uzaklaştıkça sistem kararsız hale gelebilir ve türbülans ortaya çıkabilir (Balbus ve Hawley 1998).



Şekil 2.1 Manyetik dönme kararsızlığının fiziksel benzetimi: Manyetik alan çizgileriyle birbirine bağlı iki akışkan parçacığının diferansiyel dönme altında açısal momentum taşınımı. (Armitage, 2022).

MRI'nın büyüme oranı ideal MHD altında Kepler açısal hızının (Ω) yaklaşık %75'ine eşittir (0.75 Ω) (Balbus ve Hawley 1991). Bu yüksek büyüme oranı MRI'yı, diskteki açısal momentum taşınımını sağlayan güçlü bir mekanizma haline getirir.

Manyetik alanın yalnızca dikey değil diğer bileşenlerinin de göz önüne alınması MRI'ın büyüme oranını ve kararsızlık aralığını değiştirebilir: Örneğin, tamamen toroidal alanlarda bile MRI ortaya çıkabilir ve büyüme oranları Kepler frekansı mertebesinde kalır (Terquem ve Papaloizou 1996). Dikey yönde ve azimutal gradiyente sahip bir manyetik alan için kararsızlık daha geniş bir dalgasayısı aralığında geçerli olur ve büyüme oranı artar (Doğan, 2017).

Ayrıca MRI'nın etkileri yalnızca ideal MHD koşuluyla sınırlı değildir. Gezegen oluşum diskleri gibi sistemlerde, düşük iyonlaşma nedeniyle plazma ile manyetik alanın birlikte hareket ettiğini ifade eden "donmuşluk" koşulu sağlanmaz (Armitage, 2011). Bu durumda ideal olmayan MHD etkileri devreye girer ve MRI'nın davranışını değiştirir. Bu etkiler bir sonraki bölümde anlatılmaktadır.

MRI hem kuramsal (Balbus ve Hawley, 1991, 1998; Jin, 1996; Wardle 1999; Balbus ve Terquem, 2001; Wardle 2007, Pandey ve Wardle, 2012) hem de sayısal (Sano ve Stone 2002a,2002b; Fromang ve Papaloizou 2006; Bai 2011; Iwasaki ve diğ. 2024) olarak geniş çapta çalışılmıştır.

2.3. İDEAL OLMAYAN MANYETOHİDRODİNAMİK (MHD) SÜREÇLER

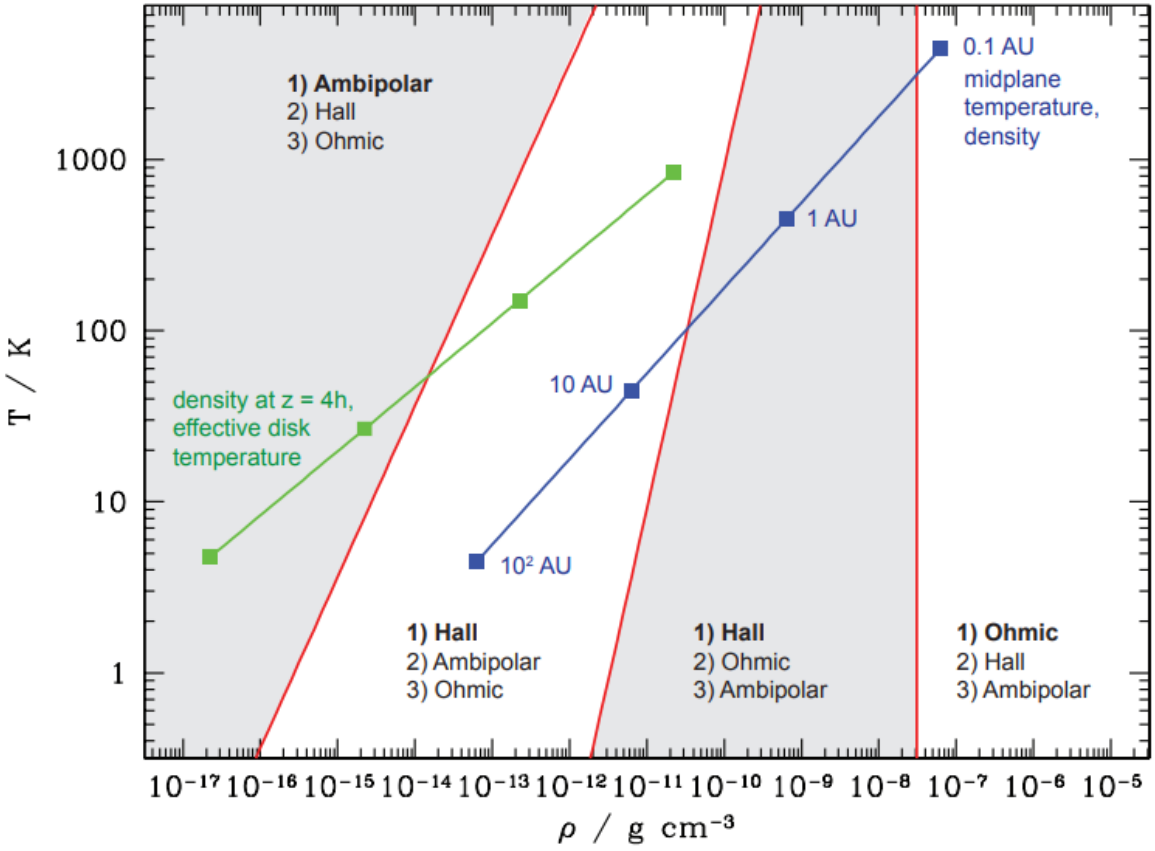
Bir diskteki akışkan maddenin manyetik alan çizgileri ile birlikte hareket ettiği durumda akışkanın manyetik alana "donmuş" olduğu kabul edilir (Balbus ve Hawley, 1998). Gezegen oluşum diskleri genellikle düşük sıcaklık ve iyonlaşma derecelerine sahip olduğu için zayıf iyonize plazmalardan oluşur. Bu durumda plazma ile manyetik alan arasındaki bağlantı zayıflar ve plazma manyetik alan çizgileriyle birlikte hareket edemez. Böylece üç temel ideal olmayan MHD terimi önem kazanır (Armitage 2011, 2017, Jin, 1996; Sano ve Miyama, 1999; Wardle, 1999; Balbus ve Terquem, 2001):

- **Ohmik difüzyon:** Diskin yoğunluğunun yüksek olduğu iç bölgelerde baskındır. Elektriksel iletkenlik azaldıkça elektrik akımı sönümlenir ve MRI'nın büyümesi engellenir (Jin 1996; Sano ve Miyama 1999). Gammie (1996), Ohmik difüzyon nedeni ile diskteki aktarımın katmanlı bir yapıda olabileceğini ve diskin orta düzlemine yakın bölümünde aktif olmayan bölgelerin oluşabileceğini göstermiştir.

- **Hall etkisi:** Manyetik alan elektronlarla hâlâ bağlı ancak iyonlarla bağlı olmadığı için Hall etkisi diskin orta kısımlarında baskındır (Warlde ve Ng, 1999; Armitage, 2011). Manyetik alanla açısal hız arasındaki yönelime duyarlıdır (Balbus ve Terquem 2001).

- **Ambipolar difüzyon:** Düşük yoğunluklu olan diskin dış bölgelerinde etkilidir. Nötr parçacıklar ile yüklü parçacıklar arasındaki bağ zayıflar. Sadece iyonlar manyetik alan çizgileriyle birlikte hareket eder. MRI'yı bastırıcı etkisi olmasına rağmen (Mac Low ve diğ. 1995) bazı durumlarda küçük büyüme oranlarına sahip MRI ortaya çıkabilir (Desch, 2004).

Şekil 2.2'de yoğunluk ve sıcaklık değişimine bağlı olarak ideal olmayan MHD etkilerinin diskte baskın olduğu bölgeler gösterilmektedir. 10 AU (astronomik birim) yarıçapına kadar olan iç bölgelerde Ohmik difüzyon ve Hall etkisi öne çıkarken, daha dış katmanlarda Hall etkisi ile ambipolar difüzyonun daha baskın olduğu görülmektedir (Armitage, 2011).



Şekil 2.2 Disk boyunca, yoğunluk (ρ) ve sıcaklık (T) düzleminde ideal olmayan MHD etkilerinin baskınlık bölgeleri: Ohmik difüzyon iç yani yoğunluğun yüksek olduğu bölgelerde (grafikte sağ kısım), Hall etkisi orta bölgelerde (grafikte orta kısım), ambipolar difüzyon ise dış yani yoğunluğun düşük olduğu bölgelerde (grafikte sol kısım) etkilidir (Armitage, 2011).

2.4. DİYAMANYETİK ETKİ VE MANYETİZASYON PARAMETRESİ

Yeni oluşan yıldız ve/veya gezegen disklerinde elektron akışı manyetik alan çizgilerine donmuş durumdadır. Elektronlar, manyetik alan çizgilerinin disk düzlemi kısmında hapsolmuş durumdadır ve hem bu çizgiler etrafında Larmor hareketi yapar hem de azimutal yönde sürüklenirler. Bu hareket sonucu ortaya çıkan diyamanyetik akımların ürettiği ters yönlü manyetik alan, yani manyetizasyon şöyle verilir (Singal 1986; Bodo ve diğ. 1992; Devlen ve Pekünlü 2007):

$$\vec{M} = -\frac{2\vec{B}}{3B^2} W_k \tag{2.1}$$

Burada $\vec{B}$ manyetik alanı ve W_k elektronların kinetik enerji yoğunluğunu temsil eder. Manyetik enerji yoğunluğu için $W_B = \frac{B^2}{8\pi}$ kullanarak, $\varepsilon = \frac{W_k}{3W_B}$ manyetizasyon parametresi olarak tanımlanırsa (Devlen ve Pekünlü, 2007) aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\vec{M} = -\varepsilon \frac{\vec{B}}{4\pi} \tag{2.2}$$

Manyetizasyon parametresinin maksimum değeri Devlen ve Pekünlü (2007) çalışmasında 0.5 olarak bulunmuştur. Manyetizasyon parametresi MRI'nın davranışını belirleyen fiziksel niceliklerden biridir. Ortaya çıkan diyamanyetik akım, MHD denklemlerine bir kaynak terimi olarak eklenir. Bu akım manyetik alanda radyal ve/veya dik gradiyentlere neden olur. Devlen ve Pekünlü (2007) diyamanyetik gezegen oluşum disklerinde dikey manyetik alan varlığında MRI'nın zayıflamadığını, etkili olduğu dalgasayısı yani kararsızlık aralığının genişlediğini göstermişlerdir. Radyal yönde değişen dikey manyetik alan varlığında yeni kararsız modların üretildiğini bulmuşlardır. Devlen ve diğ. (2020) çalışmasında radyal ve dikey yönde manyetik alanla sarılı eğri disklerde manyetizasyonun daha hızlı ve etkin kararsız MRI modlarına neden olabileceğine dair bulgulara ulaşılmıştır. Eksen simetrik ve eksen simetrik olmayan modlar için $\kappa = B_r/B_z < 1$ durumunda karasızlığın büyüme oranları ideal MRI ile aynı olmasına karşın, daha dik alan gradyentlerinde büyüme oranları oldukça yüksektir ve neredeyse tüm dalga sayıları kararsızdır.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1 MODEL VE TEMEL MHD DENKLEMLERİ

Bu çalışmada, *M* kütleli merkezi bir yıldız etrafında dönen, ince yapılı ($\frac{H}{r}$ <<1) yani kalınlığı ihmal edilmiş bir Kepler tipi kütle aktarım diskinin iç bölgesi ele alınmıştır. Burada *H* diskin kalınlığını temsil eder. Disk, silindirik koordinat sisteminde (*r*, ϕ, *z*) tanımlanmıştır. Diferansiyel dönmeye sahip diskin merkezden *r* uzaklığındaki açısal hızı $\Omega(r)$ şu şekilde verilmektedir:

$$\Omega(r) = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \tag{3.1}$$

Burada *G* kütleçekim sabitini temsil etmektedir.

Bu çalışmada ele aldığımız temel MHD denklemleri aşağıda verilmektedir:

1. Kütle Korunumu (süreklilik denklemi):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \tag{3.2}$$

Burada ρ yoğunluğu, $\vec{v}$ hızı ve *t* zamanı temsil etmektedir.

2. Momentum Denklemi:

Bu denklem, plazmanın hareketini belirleyen momentum korunumu denklemidir.

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla P + \frac{1}{c}\vec{J} \times \vec{B} \tag{3.3}$$

Burada *P* basıncı, $\vec{B}$ manyetik alanı ve $\vec{J}$ akım yoğunluğunu temsil etmektedir.

Sol taraftaki terimler, akışkanın hız değişimini (ivmelenmesini) ve taşınma etkisini temsil eder.

Sağ tarafta ise basınç gradyenti kuvveti $-\nabla P$ ile Lorenz kuvveti $\vec{J} \times \vec{B}$ yer alır.

3. İndüksiyon Denklemi:

Bu denklem, manyetik alanın zamana göre nasıl değiştiğini tanımlar.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B} - \eta \frac{4\pi}{c} \vec{J}\right) \tag{3.4}$$

İlk terim $(\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}))$ adveksiyonu temsil ederken ikinci terim $\nabla \times \left(-\eta \frac{4\pi}{c} \vec{J}\right)$ Ohmik difüzyonun katkısını verir. η direnci temsil etmektedir.

Klasik ideal MHD'de, $\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\left[\nabla \times \vec{B}\right]$ ile tanımlanan akım yoğunluğu, diyamanyetik etkiler göz önüne alındığında aşağıdaki şekilde verilir (Devlen ve Pekünlü, 2007):

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\left[\nabla \times \vec{B} - \alpha_m \frac{V_\phi^2}{B^2} \nabla \times \vec{B} + 2\alpha_m \frac{V_\phi^2}{B^3} (\nabla B \times \vec{B})\right] \tag{3.5}$$

$\alpha_m = \varepsilon \cdot \frac{{B_z}^2(\kappa^2+1)}{{v_\phi}^2}$ olarak tanımlanmıştır.

MHD denklemleri tedirgin edilerek doğrusallaştırılacak, ardından dağılma bağıntısı elde edilecektir.

3.2 DOĞRUSAL KARARLILIK ANALİZİ

Bu çalışmada Devlen ve diğ. (2020) tarafından kullanılan manyetik alan konfigürasyonu kullanılarak, denge durumu için manyetik alanın hem *r* hem de *z* bileşenlere sahip olduğu, hızın ise sadece ϕ bileşeninin olduğu ve bu iki niceliğin yalnızca yarıçapa bağlı olduğu varsayılmıştır.

Tedirginlikler (3.2)-(3.5) numaralı denklemlerde verilen MHD denklemlerine

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_1, \quad \vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}_1, \quad P = P_0 + P_1, \ \rho = \rho_0 + \rho_1 \tag{3.6}$$

olacak şekilde eklenerek, tedirgin edilmiş MHD denklemleri elde edilir.

Burada '0' indisli olan denge "1" indisli olan tedirginlik nicelikleri temsil eder.

Denge nicelikleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

Manyetik alan:

$$\vec{B}_0 = [\kappa B_{0_z}(r), \quad 0, \quad B_{0_z}(r)] \tag{3.7}$$

$$\kappa = \frac{B_{0_r}(r)}{B_{0_z}(r)} \tag{3.8}$$

Hız:

$$\vec{v}_0 = \left[0, \quad v_{0_\phi}(r), \quad 0\right] \tag{3.9}$$

Yine Devlen ve diğ. (2020) çalışmasında olduğu gibi tedirginlikler aşağıdaki formda ifade edilmiştir:

$$e^{\boldsymbol{i}(m\phi + k_z z - \omega t)} \tag{3.10}$$

Burada *m* eksenel simetrik modu, k_z dikey dalga sayısını ve ω açısal frekansı temsil etmektedir.

Tedirginlik nicelikleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$\vec{B}_1 = [B_{1_r}, \quad B_{1_\phi}, \quad B_{1_z}]\, e^{\boldsymbol{i}(m\phi + k_z z - \omega t)} \tag{3.11}$$

$$\vec{v}_1 = [v_{1_r}, \quad v_{1_\phi}, \quad v_{1_z}]\, e^{\boldsymbol{i}(m\phi + k_z z - \omega t)} \tag{3.12}$$

Manyetik alanın hem denge hem de tedirginlik durumu için büyüklükleri aşağıdaki şekilde yazılır:

$$|\vec{B}_0| = B_0 = \sqrt{\kappa^2 + 1}\ B_{0_z} \tag{3.13}$$

$$|\vec{B}_1| = B_1 = \sqrt{\kappa^2 + 1}\, B_{1_z} e^{i(m\phi + k_z z - \omega t)} \tag{3.14}$$

Bu tez çalışmasında süreklilik ve momentum denklemlerinin tedirgin edilmiş halleri, Devlen ve diğ. (2020) çalışmasından alınmıştır. Bahsedilen çalışmadan farklı olarak bu tez çalışmasında Ohmik difüzyonun kararsızlığa katkısı inceleneceği için aşağıda sadece indüksiyon denkleminin tedirgin edilmiş halinin nasıl elde edildiği verilmiştir.

İlk önce indüksiyon denklemini ve buradaki akım yoğunluğunu tekrar yazalım:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B} - \eta \frac{4\pi}{c} \vec{J}\right) \tag{3.15}$$

$$\vec{J} = \frac{c}{4\pi}\left[\nabla \times \vec{B} - \alpha_m \frac{V_\phi^2}{B^2} \nabla \times \vec{B} + 2\alpha_m \frac{V_\phi^2}{B^3} (\nabla B \times \vec{B})\right] \tag{3.16}$$

Manyetik indüksiyon denkleminde akım yoğunluğunu yerine koyup rotasyoneli açarak ifadeyi genişletirsek aşağıdaki ifade bulunur:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) - \eta \nabla \times (\nabla \times \vec{B}) + \eta \alpha_m \nabla \times \left(\frac{V_\phi^2}{B^2} \nabla \times \vec{B}\right) - 2\eta \alpha_m \nabla \times \left(\frac{V_\phi^2}{B^3} (\nabla B \times \vec{B})\right) \tag{3.17}$$

Bu denklemin sol tarafında yer alan $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ ifadesi $\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} + \frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ şeklinde yazılır. $\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t}$ ifadesi, denklemin sağ tarafındaki denge nicelikleri ile birlikte ele alındığında 0 olur. $\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$ 'nin bileşenleri ise aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial B_{1r}}{\partial t} = -B_{1_r} i\omega \hat{r} \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial B_{1\phi}}{\partial t} = -B_{1_\phi} i\omega \hat{\phi} \tag{3.19}$$

$$\frac{\partial B_{1_z}}{\partial t} = -B_{1_z} i\omega \hat{z} \tag{3.20}$$

(3.17) denklemin sağ tarafını dört terime ayıralım ve her bir terimi ayrı ayrı inceleyelim.

$$\mathrm{I} - \eta \mathrm{II} + \eta \alpha_m \mathrm{III} - 2\eta \alpha_m \mathrm{IV} \tag{3.21}$$

Terim I:

İlk önce Ohmik difüzyonun dahil olmadığı terim elde edilmiştir:

$$\nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) \tag{3.22}$$

Tedirginlikler eklendiğinde bu terim aşağıdaki hali alır:

$$\nabla \times \left[(\vec{v}_0 + \vec{v}_1) \times \left(\vec{B}_0 + \vec{B}_1\right)\right] \tag{3.23}$$

Parantezler açıldığında

$$\nabla \times \left(\vec{v}_0 \times \vec{B}_0\right) + \nabla \times \left(\vec{v}_0 \times \vec{B}_1\right) + \nabla \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_0\right) + \nabla \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_1\right) \tag{3.24}$$

elde edilir. Bu ifadede

$$\nabla \times \left(\vec{v}_0 \times \vec{B}_0\right) \tag{3.25}$$

terimi yalnızca denge niceliklerini içerdiğinden ve denge terimleri toplamı 0 olduğundan bu terim üzerinde herhangi bir işlem yapmayacağız.

Tedirginlik terimleri çok küçük varsayıldığından, burada doğrusal analiz uygulanabilir; dolayısıyla iki tedirginlik teriminin çarpımı ihmal edilebilecek kadar küçük olacağından göz ardı edilebilir:

$$\nabla \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_1\right) = 0 \tag{3.26}$$

Bu durumda (3.24) ifadesi aşağıdaki hali alır:

$$\nabla \times \left(\vec{v}_0 \times \vec{B}_1\right) + \nabla \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_0\right) \tag{3.27}$$

Ek 1'de verilen E1.1 numaralı vektörel özdeşliği kullanırsak

$$\nabla \times \left(\vec{v}_0 \times \vec{B}_1\right) = (\vec{B}_1 \cdot \nabla)\vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{B}_1 + \left(\nabla \cdot \vec{B}_1\right)\vec{v}_0 - (\nabla \cdot \vec{v}_0)\vec{B}_1 \quad (3.28)$$

ve

$$\nabla \times \left(\vec{v}_1 \times \vec{B}_0\right) = (\vec{B}_0 \cdot \nabla)\vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \nabla)\vec{B}_0 + \left(\nabla \cdot \vec{B}_0\right)\vec{v}_1 - (\nabla \cdot \vec{v}_1)\vec{B}_0 \quad (3.29)$$

elde edilir.

Manyetik alanın diverjansı koşulu $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ olduğundan (3.28) ve (3.29) denklemlerindeki $\nabla \cdot \vec{B}_0$ ve $\nabla \cdot \vec{B}_1$ terimleri 0 olur. Bu koşul, fiziksel olarak manyetik monopollerin olmadığı anlamına gelir.

Boussinesq yaklaşımına göre yoğunluk değişimi (zaman ve uzayda) yalnızca kaldırma kuvveti teriminde önemlidir. Bu yüzden süreklilik denkleminden hız vektörünün diverjansının sıfır olduğu elde edilir (sıkıştırılamazlık ilkesi):

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (3.30)$$

Bu denklemi (3.28) ve (3.29) denklemlerine yerine koyarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) = (\vec{B}_1 \cdot \nabla)\vec{v}_0 - (\vec{v}_0 \cdot \nabla)\vec{B}_1 + (\vec{B}_0 \cdot \nabla)\vec{v}_1 - (\vec{v}_1 \cdot \nabla)\vec{B}_0 \quad (3.31)$$

Şimdi, aynı yöntemi izleyerek, denge terimlerini ihmal edip Ohmik terim için doğrusal analiz uygulayacağız.

Terim II:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla\left(\nabla \cdot \vec{B}\right) - \nabla^2\vec{B} \quad (3.32)$$

Manyetik alanın diverjansı sıfır olduğu için $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, yukarıdaki ifade sadeleşir:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\nabla^2\vec{B} \quad (3.33)$$

Manyetik alanı denge ve tedirginlik bileşenlerine ayırdığımızda aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = \nabla^2\vec{B}_0 + \nabla^2\vec{B}_1 \quad (3.34)$$

Ancak $\nabla^2\overrightarrow{B_0}$ terimi denge terimleri toplamına gireceğinden denklem (3.34) aşağıdaki hali alır:

$$\nabla \times \left(\nabla \times \vec{B}\right) = -\nabla^2 \vec{B}_1 \tag{3.35}$$

Terim III:

Ek 1'de verilen E1.2 numaralı vektörel özdeşliği kullanırsak aşağıdaki ifade bulunur:

$$\nabla \times \left(\frac{v_\phi^2}{B^2}\nabla \times \vec{B}\right) = v_{0\phi}^2 \nabla \frac{1}{B_0^2} \times \left(\nabla \times \vec{B}_1\right) + \left(2v_{0\phi}v_{1\phi}\nabla \frac{1}{B_0^2} - 2v_{0\phi}^2 \nabla \frac{B_1}{B_0^3}\right) \times \left(\nabla \times \vec{B}_0\right)$$

$$+ \frac{v_{0\phi}^2}{B_0^2}\nabla^2 \vec{B}_1 + \left(\frac{2v_{0\phi}v_{1\phi}}{B_0^2} - \frac{2v_{0\phi}^2 B_1}{B_0^3}\right)\nabla^2 \vec{B}_0 \tag{3.36}$$

Terim IV:

Ek 1'de verilen E1.3 numaralı vektörel özdeşliği kullanırsak

$$\nabla \times \left(\frac{v_\phi^2}{B^3}\left(\nabla B \times \vec{B}\right)\right) = \nabla \cdot \left(\frac{v_{0\phi}^2}{B_0^3}\nabla B_0\right)\vec{B}_1 + \nabla \cdot \left[\frac{v_{0\phi}^2}{B_0^3}\nabla B_1 + \left(\frac{2v_{0\phi}v_{1\phi} - 3v_{0\phi}^2 B_1}{B_0^4}\right)\nabla B_0\right]\vec{B}_0$$

$$+ \frac{v_{0\phi}^2}{B_0^3}\left[\left(\vec{B}_0 \cdot \nabla\right)\nabla B_1 + \left(\vec{B}_1 \cdot \nabla\right)\nabla B_0\right] + \left(\frac{2v_{0\phi}v_{1\phi}}{B_0^3} - \frac{3v_{0\phi}^2 B_1}{B_0^4}\right)\left(\vec{B}_0 \cdot \nabla\right)\nabla B_0$$

$$+ \frac{v_{0\phi}^2}{B_0^3}\left[\left(\nabla B_0 \cdot \nabla\right)\vec{B}_1 + \left(\nabla B_1 \cdot \nabla\right)\vec{B}_0\right] + \left(\frac{2v_{0\phi}v_{1\phi}}{B_0^3} - \frac{3v_{0\phi}^2 B_1}{B_0^4}\right)\left(\nabla B_0 \cdot \nabla\right)\vec{B}_0 \tag{3.37}$$

bulunur.

(3.17) denkleminin sağ tarafındaki ifadelerin açılımını ayrı ayrı elde etmiş olduk.

(3.18), (3.19) ve (3.20) denklemlerini ve I, II, III, IV terimlerinin sonuçlarını (3.17) denkleminde yerine koyarak Ek 1'de verilen E1.4, E1.5 ve E1.6. numaralı vektör özdeşlikleri uyguladığımızda Ohmik difüzyonunun katkısını da içeren manyetik indüksiyon denkleminin tedirgin edilmiş *r*, ϕ ve *z* bileşenleri sırasıyla aşağıdaki şekilde bulunmuş olur:

r bileşeni

$$\left[-i(\omega - m\Omega) + \eta\left(k_z^2 - \varepsilon k_z^2 + \frac{m^2}{r^2} - \frac{\varepsilon m^2}{r^2} + \frac{6\varepsilon\left(\frac{dB_{0_z}(r)}{dr}\right)^2}{B_{0_z}(r)^2}\right)\right] B_{1_r} + \left[\left(\frac{2im}{r^2} - \frac{2i\varepsilon m}{r^2}\right)\right] B_{1_\phi}$$

$$+ \left[\eta\left(2\varepsilon k_z^2\kappa - \frac{18\varepsilon\kappa\left(\frac{dB_{0_z}(r)}{dr}\right)^2}{B_{0_z}(r)^2} - \frac{2\varepsilon\kappa\frac{d^2B_{0_z}(r)}{dr^2}}{B_{0_z}(r)} + \frac{2\varepsilon\kappa m^2}{r^2} + \frac{2i\varepsilon k_z\frac{dB_{0_z}(r)}{dr}}{B_{0_z}(r)}\right)\right] B_{1_z}$$

$$+ \left[\kappa\frac{dB_{0_z}(r)}{dr} - k_z B_{0_z}(r)i\right] v_{1_r} = 0 \qquad (3.38)$$

ϕ bileşeni

$$\left[-i(\omega - m\Omega) - \eta\left(\varepsilon k_z^2 - k_z^2 - \frac{m^2}{r^2} + \frac{\varepsilon m^2}{r^2} - \frac{6\varepsilon\left(\frac{dB_{0_z}(r)}{dr}\right)^2}{B_{0_z}(r)^2} + \frac{2\varepsilon\frac{d^2B_{0_z}(r)}{dr^2}}{B_{0_z}(r)}\right)\right] B_{1_\phi}$$

$$+ \left[-r\frac{d\Omega(r)}{dr} + \frac{2i\varepsilon\eta m\frac{dB_{0_z}(r)}{dr}}{rB_{0_z}(r)}\right] B_{1_r} + \left[-\frac{2\varepsilon\eta k_z m}{r}\right] B_{1_z} + \left[-k_z B_{0_z}(r)i\right] v_{1_\phi} = 0 \qquad (3.39)$$

z bileşeni

$$\left[-i(\omega - m\Omega) + \eta\left(k_z^2 - \varepsilon k_z^2 + \frac{m^2}{r^2} + \frac{\varepsilon m^2}{r^2} - \frac{6\varepsilon\left(\frac{dB_{0_z}(r)}{dr}\right)^2}{B_{0_z}(r)^2} + \frac{2\varepsilon\frac{d^2B_{0_z}(r)}{dr^2}}{B_{0_z}(r)}\right)\right] B_{1_z}$$

$$+ \left[\frac{dB_{0_z}(r)}{dr}\right] v_{1_r} + \left[-k_z B_{0_z}(r)i\right] v_{1_z} + \left[\left(\frac{2i\varepsilon k_z\frac{dB_{0_z}(r)}{dr}}{B_{0_z}(r)}\right)\right] B_{1_r} = 0 \qquad (3.40)$$

Dağılma bağıntısını hesaplamak için tedirgin edilmiş süreklilik denklemi ve momentum denkleminin *r, ϕ, ve z* bileşenleri de benzer şekilde elde edilir. Bunlar sırasıyla aşağıdaki şekildedir (Devlen ve diğ. 2020):

$$\frac{m}{r}\, v_{1_\phi} + k_z\, v_{1_z} = 0 \tag{3.41}$$

$$-i(\omega - m\Omega)v_{1_r} - 2\Omega v_{1_\phi} + \left(\frac{1}{4\pi\rho}\left(ik_z B_{0_z}\right)(\varepsilon - 1)\right) B_{1_r}$$

$$+ \left(\frac{1}{4\pi\rho}\left((1-\varepsilon)\frac{dB_{0z}}{dr} - 2ik_z\varepsilon\kappa B_{0_z}\right)\right) B_{1_z} = 0 \tag{3.42}$$

$$-i(\omega - m\Omega)v_{1_\phi} + \frac{1}{2}\frac{\kappa_e^2}{\Omega} v_{1_r} + \frac{im}{r\rho}P_1 + \left[\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{1}{r}\, imB_{0z}\,\kappa(1-\varepsilon)\right)\right] B_{1_r}$$

$$+ \left[\frac{1}{4\pi\rho}\left(ik_z B_{0z}(\varepsilon - 1) - 2\varepsilon\kappa\frac{dB_{0z}}{dr}\right)\right] B_{1_\phi}$$

$$+ \left[\frac{1}{4\pi\rho}\left(\frac{1}{r}\, im\,\varepsilon B_{0_z}(\varepsilon + 2\kappa^2\varepsilon + 1)\right)\right] B_{1_z} = 0 \tag{3.43}$$

$$-i(\omega - m\Omega)v_{1_z} + \left(\frac{ik_z}{\rho}\right) P_1 + \left[\frac{1}{4\pi\rho}\left(ik_z B_{0_z}\kappa(1-\varepsilon) - \frac{dB_{0z}}{dr}(1+\varepsilon)\right)\right] B_{1_r}$$

$$+ \left[\frac{1}{2\pi\rho}\left(\varepsilon\kappa\frac{dB_{0_z}}{dr} + ik_z\varepsilon\kappa^2 B_{0_z}\right)\right] B_{1_z} = 0 \tag{3.44}$$

3.3 BOYUTSUZLAŞTIRMA VE DAĞILMA BAĞINTISI

Dağılma bağıntısı bir dalganın frekansı ω ile dalga sayısı k arasındaki matematiksel ilişkiyi tanımlar ve karasızlığın büyüme oranı ve geçerli olduğu dalgasayısı aralığı hakkında bilgi verir. $\omega = \mathrm{Re}(\omega) + i\,\mathrm{Im}(\omega)$ şeklinde yazılabilir. Tedirginlik formu (3.10) göz önüne alındığında, eğer sanal kısım pozitifse, tedirginliğin zamanla büyüdüğünü, yani sistemin kararsız hâle geldiğini gösterir; eğer sanal kısım negatifse, bu durumda tedirginlikler zamanla sönümlenir ve sistem kararlı olur.

Dağılma bağıntısını elde etmek için, süreklilik denklemi ile momentum ve indüksiyon denklemlerinin tedirgin edilmiş hallerinden oluşan 7 denklemin oluşturduğu denklem sisteminin çözülmesi gerekir. Bunun için matris yöntemi kullanılmıştır. 7x7'lik matris oluşturulup katsayılar determinantının sıfıra eşitlenmesiyle dağılma bağıntısı bulunur. Denklem sisteminin $m = 0$ (eksen-simetrik tedirginlikler) için çözümü MATLAB yazılımı kullanılarak elde edilmiştir. Elde edilen dağılma bağıntısı aşağıdaki gibi 5. dereceden bir polinomdur:

$$a_5\omega^5 + a_4\omega^4 + a_3\omega^3 + a_2\omega^2 + a_1\omega + a_0 = 0 \tag{3.45}$$

Bu dağılma bağıntısında

$$a_5 = \frac{k_z^2}{\rho} \tag{3.46}$$

olarak bulunmuştur. Dağılma bağıntısını çözebilmek için, beşinci dereceden terimin katsayısını 1 yapmak amacıyla denklemin tamamı a_5'e bölünmüştür. Sonrasında ise dağılma bağıntısını boyutsuzlaştırmak üzere aşağıdaki tanımlar kullanılmıştır:

Alfven hızı:

$$v_A = \frac{B_z(r)}{\sqrt{4\pi\rho}} \tag{3.47}$$

bir plazma içinde manyetik dalgaların yayılma hızıdır.

Alfven Mach sayısı:

$$M_A = \frac{\Omega(r)\cdot r}{v_A} \tag{3.48}$$

bir akışkanın hızının Alfven hızına oranıdır.

$$X = \frac{k_z v_A}{\Omega(r)} \tag{3.49}$$

X parametresi dalgasayısı k_z'nin bir ölçüsü olarak tanımlanmıştır. Bu parametrenin önemi MRI'ın hangi dalga sayısı aralığında etkili olduğunu göstermesidir.

Manyetik Reynolds sayısı için aşağıdaki tanım kullanılmıştır (Sano ve Stone, 2002; Devlen ve Pekünlü, 2007):

$$\frac{1}{Re_M} = \frac{\eta \cdot \Omega(r)}{v_A^2} \tag{3.50}$$

Manyetik Reynolds sayısı Ohmik difüzyonun katkısını belirlemek için kullanılmıştır.

Ayrıca aşağıdaki tanımlamalar yapılarak dağılma bağıntısının a_4, a_3, a_2, a_1, ve a_0 katsayılarında yer alan ilgili terimler boyutsuz hale getirilmiştir.

$$\alpha = \frac{r}{\Omega}\frac{d\Omega}{dr} \tag{3.51}$$

Boyutsuz açısal frekans:

$$\sigma = \frac{\omega}{\Omega} \tag{3.52}$$

Boyutsuz epiksiklik frekans:

$$\zeta = \frac{\kappa_e}{\Omega} \tag{3.53}$$

Manyetik alanın gradiyenti:

$$G = \frac{r}{B_{0_z}}\frac{dB_{0_z}}{dr} \tag{3.54}$$

$$\gamma = \frac{r^2\frac{d^2B_{0_z}}{dr^2}}{B_{0_z}} \tag{3.55}$$

Bu işlemlerden sonra, boyutsuzlaştırılmış dağılma bağıntısı aşağıdaki şekli alır:

$$\sigma^5 + a_4'\sigma^4 + a_3'\sigma^3 + a_2'\sigma^2 + a_1'\sigma + a_0' = 0 \tag{3.56}$$

Burada yer alan a_4', a_3', a_2', a_1', ve a_0' katsayıları aşağıdaki şekilde bulunmuştur:

$$a_4' = -\frac{3(\varepsilon-1)}{Re_{\mathrm{M}}}X^2 i + \frac{6G^2\varepsilon}{M_A^2 Re_{\mathrm{M}}}i \tag{3.57}$$

$$a_3' = -\frac{3(\varepsilon-1)^2}{{Re_{\mathrm{M}}}^2}X^4 + \frac{4G\varepsilon^2\kappa}{M_A{Re_{\mathrm{M}}}^2}X^3 i + \left(2\varepsilon + \frac{4G^2\varepsilon(2\varepsilon-3)}{M_A^2{Re_{\mathrm{M}}}^2} - 2\right)X^2$$
$$+ \left(\frac{G\kappa(\varepsilon-1)}{M_A} - \frac{4G\varepsilon^2\kappa(9G^2+\gamma)}{M_A^3{Re_{\mathrm{M}}}^2}\right)Xi + \frac{4\varepsilon^2(-3G^2+\gamma)^2}{M_A^4{Re_{\mathrm{M}}}^2} - \frac{G^2(\varepsilon-1)}{M_A^2} - \zeta^2 \tag{3.58}$$

$$a_2' = \frac{(\varepsilon-1)^3}{{Re_{\mathrm{M}}}^3}X^6 i + \frac{4G\varepsilon^2\kappa(\varepsilon-1)}{M_A{Re_{\mathrm{M}}}^3}X^5 - \left(\frac{4(\varepsilon-1)^2}{Re_{\mathrm{M}}} + \frac{2G^2\varepsilon(\varepsilon-1)(\varepsilon-3)}{M_A^2{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)X^4$$
$$- \left(\frac{2G\kappa(3\varepsilon-1)}{M_A Re_{\mathrm{M}}} + \frac{4G\varepsilon^2\kappa\left((15\varepsilon-9)G^2-\gamma(\varepsilon+1)\right)}{M_A^3{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)X^3$$
$$+ \left(\frac{3\zeta^2(\varepsilon-1)}{Re_{\mathrm{M}}} - \frac{2\left(\left((2\kappa^2-3)\varepsilon^2+4\varepsilon-1\right)G^2-\varepsilon\gamma(\varepsilon-1)\right)}{M_A^2 Re_{\mathrm{M}}} + \frac{4\varepsilon^2\left((5\varepsilon-3)G^2-\gamma(\varepsilon-1)\right)(-3G^2+\gamma)}{M_A^4{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)X^2 i$$
$$+ \left(\frac{2G\varepsilon\kappa\left((2\varepsilon+10)G^2-\gamma(5\varepsilon-1)\right)}{M_A^3 Re_{\mathrm{M}}} - \frac{8G\varepsilon^3\kappa(-27G^4+6\gamma G^2+\gamma^2)}{M_A^5{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)X$$
$$+ \left(\frac{24G^2\varepsilon^3(-3G^2+\gamma)^2}{M_A^6{Re_{\mathrm{M}}}^3} - \frac{6G^2\varepsilon\zeta^2}{M_A^2 Re_{\mathrm{M}}} + \frac{2G^2\varepsilon(\varepsilon-1)(-6G^2+\gamma)}{M_A^4 Re_{\mathrm{M}}}\right)i \tag{3.59}$$

$$a_1' = -\frac{2(\varepsilon-1)^3}{{Re_{\mathrm{M}}}^2}X^6 + \frac{G\kappa(5\varepsilon-1)(\varepsilon^2-1)}{M_A{Re_{\mathrm{M}}}^2}X^5 i$$
$$+ \left(\left(\frac{3\zeta^2}{{Re_{\mathrm{M}}}^2}+1\right)(\varepsilon-1)^2 + \frac{G^2\left(\left(1-12\kappa^2\right)\varepsilon^3+\left(4\kappa^2-7\right)\varepsilon^2+7\varepsilon-1\right)+2\varepsilon\gamma(\varepsilon-1)^2}{M_A^2{Re_{\mathrm{M}}}^2}\right)X^4$$
$$+ \left(\frac{G\kappa(\varepsilon-1)^2}{M_A} - \frac{4G\varepsilon^2\kappa\zeta^2}{M_A{Re_{\mathrm{M}}}^2} + \frac{2G\varepsilon\kappa\left(\left(-30\varepsilon^2+4\varepsilon+10\right)G^2+\gamma\left(5\varepsilon^2-2\varepsilon+1\right)\right)}{M_A^3{Re_{\mathrm{M}}}^2}\right)X^3 i$$

$$+\left(\frac{4\varepsilon^2\gamma^2(\varepsilon-1)-12G^4\varepsilon\left(\left(-8\kappa^2-3\right)\varepsilon^2+2\varepsilon+1\right)+2G^2\varepsilon\gamma\left(-13\varepsilon^2+12\varepsilon+1\right)}{M_A^4{Re_{\mathrm{M}}}^2}-2\alpha(\varepsilon-1)\ -\right.$$

$$\left.\frac{G^2\left((\varepsilon-1)^2-2\varepsilon\kappa^2(\varepsilon+1)\right)}{M_A^2}-\frac{4G^2\varepsilon\zeta^2(2\varepsilon-3)}{M_A^2{Re_{\mathrm{M}}}^2}\right)X^2$$

$$+\left(\frac{4G\varepsilon^2\kappa\zeta^2\left(9G^2+\gamma\right)}{M_A^3{Re_{\mathrm{M}}}^2}-\frac{2G^3\varepsilon\kappa(\varepsilon-1)}{M_A^3}-\frac{4G\varepsilon^2\kappa\left((5\varepsilon+7)G^2-2\gamma(\varepsilon-1)\right)\left(-3G^2+\gamma\right)}{M_A^5{Re_{\mathrm{M}}}^2}-\frac{2G\alpha\kappa(3\varepsilon-1)}{M_A}\right)Xi$$

$$+\frac{4G^2\alpha\varepsilon\kappa^2}{M_A^2}-\frac{4\varepsilon^2\zeta^2\left(-3G^2+\gamma\right)^2}{M_A^4{Re_{\mathrm{M}}}^2}-\frac{12G^4\varepsilon^2(\varepsilon-1)\left(-3G^2+\gamma\right)}{M_A^6{Re_{\mathrm{M}}}^2} \qquad (3.60)$$

$$a_0'=-(\varepsilon-1)^3\left(\frac{1}{Re_{\mathrm{M}}}+\frac{\zeta^2}{{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)X^6i-\left(\frac{G\kappa\left(\varepsilon^2(\varepsilon+3)-5\varepsilon+1\right)}{M_ARe_{\mathrm{M}}}+\frac{4G\varepsilon^2\kappa\zeta^2(\varepsilon-1)}{M_A{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)X^5$$

$$+\left(\frac{2\alpha(\varepsilon-1)^2}{Re_{\mathrm{M}}}-\frac{G^2\left((\varepsilon-1)^2(\varepsilon+1)+\varepsilon\kappa^2\left(10\varepsilon^2-2\right)\right)-2\varepsilon\gamma(\varepsilon-1)^2}{M_A^2Re_{\mathrm{M}}}+\frac{2G^2\varepsilon\zeta^2(\varepsilon-1)(\varepsilon-3)}{M_A^2{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)X^4i$$

$$+\left(\frac{4G\varepsilon\kappa\left(2G^2\left(\varepsilon^2\kappa^2+2\varepsilon-2\right)-\gamma(2\varepsilon-1)(\varepsilon-1)\right)}{M_A^3Re_{\mathrm{M}}}+\frac{4G\varepsilon^2\kappa\zeta^2\left((15\varepsilon-9)G^2-\gamma(\varepsilon+1)\right)}{M_A^3{Re_{\mathrm{M}}}^3}-\frac{2G\alpha\kappa(5\varepsilon-1)(\varepsilon-1)}{M_ARe_{\mathrm{M}}}\right)X^3$$

$$-\left(\frac{2G^4\left(3\varepsilon(\varepsilon-1)^2+2\varepsilon^2\kappa^2(\varepsilon-7)\right)+8G^2\varepsilon^2\gamma\kappa^2(\varepsilon-1)}{M_A^4Re_{\mathrm{M}}}+\frac{4\alpha\varepsilon\left(\left((3\varepsilon-1)\kappa^2-2\varepsilon+2\right)G^2+\gamma(\varepsilon-1)\right)}{M_A^2Re_{\mathrm{M}}}+\right.$$

$$\left.\frac{4\varepsilon^2\zeta^2\left((5\varepsilon-3)G^2-\gamma(\varepsilon-1)\right)\left(-3G^2+\gamma\right)}{M_A^4{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)X^2i$$

$$+\left(\frac{12G^5\varepsilon^2\kappa(\varepsilon-1)}{M_A^5Re_{\mathrm{M}}}+\frac{8G\alpha\varepsilon\kappa\left((\varepsilon-3)G^2+\gamma(2\varepsilon-1)\right)}{M_A^3Re_{\mathrm{M}}}+\frac{8G\varepsilon^3\kappa\zeta^2\left(-27G^4+6\gamma G^2+\gamma^2\right)}{M_A^5{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)X$$

$$+\left(\frac{16G^2\alpha\varepsilon^2\kappa^2\left(3G^2+\gamma\right)}{M_A^4Re_{\mathrm{M}}}-\frac{24G^2\varepsilon^3\zeta^2\left(-3G^2+\gamma\right)^2}{M_A^6{Re_{\mathrm{M}}}^3}\right)i \qquad (3.61)$$

$\mathrm{Re_M} \to \infty$ limitinde Ohmik terimler ortadan kalkar ve elde edilen sonuçlar, Devlen ve diğ. (2020) çalışmasındaki dağılma bağıntısıyla örtüşür, çünkü söz konusu çalışmada Ohmik difüzyon etkisi dikkate alınmamıştır. Bu sınır durumu, yaptığımız hesaplamaların doğruluğunu teyit etmesi açısından bir kontrol sağlamaktadır. Devlen ve diğ. (2020) çalışmasındaki katsayılar aşağıda verilmektedir:

$$a_4' = 1 \tag{3.62}$$

$$a_3' = 0 \tag{3.63}$$

$$a_2' = \frac{G^2}{M_A^2}(1-\varepsilon) - 2X^2(1-\varepsilon) - i\frac{\kappa XG}{M_A}(1-\varepsilon) - \zeta^2 \tag{3.64}$$

$$a_1' = 0 \tag{3.65}$$

$$a_0' = i\frac{2\kappa G^3 X\epsilon}{M_A^3}(1-\varepsilon) - \frac{X^2G^2}{M_A^2}(\varepsilon-1)^2 + X^4(\varepsilon-1)^2 + 2X^2\alpha(1-\varepsilon) + i\frac{\kappa X^3 G}{M_A}(\varepsilon-1)^2$$
$$+ i\frac{2\kappa G\alpha X}{M_A}(1-3\varepsilon) + \frac{2X^2\varepsilon G^2\kappa^2}{M_A^2(\varepsilon+1)} + \frac{4\kappa^2G^2\varepsilon\alpha}{M_A^2} \tag{3.66}$$

Dağılma bağıntısının çözümlerini elde etmek için NAG Fortran kütüphanesi kullanılmıştır.

4. BULGULAR

Aşağıdaki şekillerde, manyetik dönme kararsızlığının maksimum büyüme oranları boyutsuz parametre X'e bağlı olarak gösterilmiştir. Her bir grafikte $M_A = 1$, $\gamma = -2$, $\zeta = 1$ ve $\alpha = -1.5$ (Kepler diski) olarak alınmıştır. Bu şekilleri elde ederken manyetizasyon parametresi, ε, manyetik alanın radyal bileşeninin dikey bileşenine oranı, κ, manyetik alan gradiyentinin ölçüsü olan G parametresi ve Ohmik difüzyonun katkısının ölçüsü olan Re_M için farklı sayısal değerler varsayılmıştır.

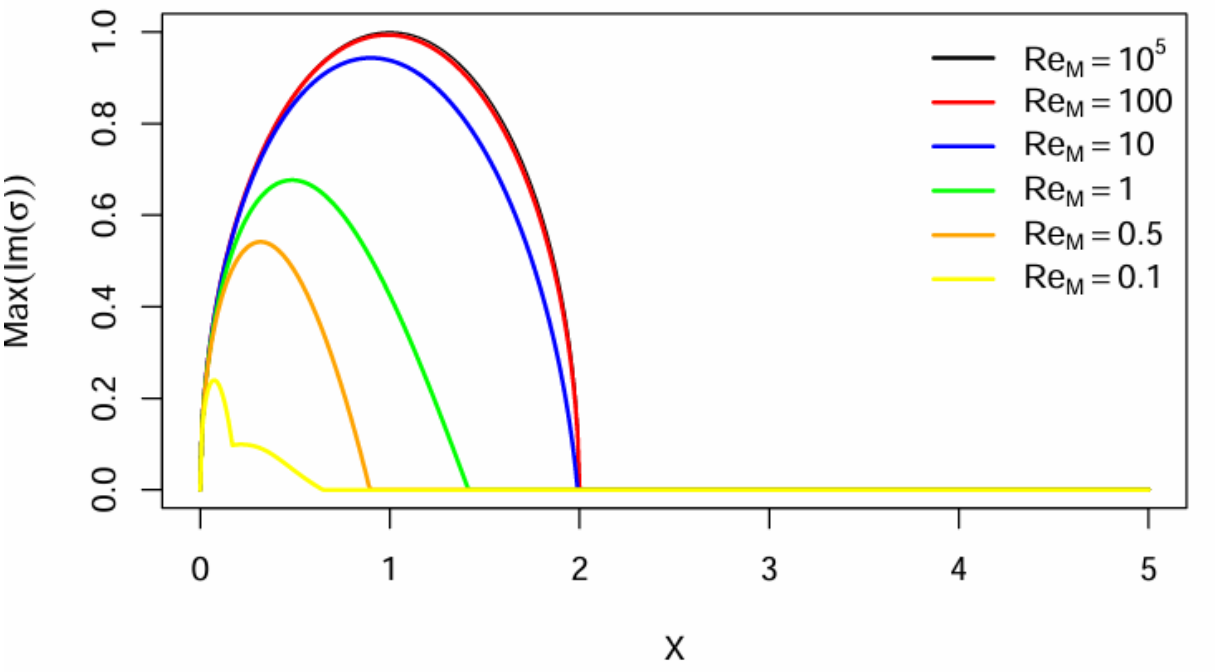
Şekil 4.1'de G = -1, κ = 0 ($B_{0_r} = 0$), ε = 0 ve farklı manyetik Re_M değerleri için manyetik dönme kararsızlığının maksimum büyüme oranları, dalga sayısı k'ya bağlı olan ve X parametresiyle temsil edilen değişken cinsinden gösterilmiştir.

Elde edilen grafiklerde, MRI'nin maksimum büyüme oranının X = 0 noktasında sıfırdan başladığı, ardından belirli bir X değeri (X_{Max}) için zirveye ($Max(Im(\sigma))_{Max}$) ulaştığı ve sonrasında tekrar azalarak başka bir X değeri için ($X_{Max(Im(\sigma))\,=\,0}$) sıfıra indiği gözlenmektedir. Yani $X > X_{Max(Im(\sigma))\,=\,0}$ durumunda manyetik dönme kararsızlığı sönümlenmektedir. Bu da sistemin kararlı hale geldiğini göstermektedir.

MRI'nin maksimum büyüme oranının sıfırdan farklı olduğu X değerleri aralığı, MRI'ın etkin olduğu bölgeyi temsil etmektedir. Bu aralık dışında, büyüme oranı sıfıra indiği için sistem kararlı hale gelir ve MRI mekanizması çalışmaz.

İdeal MHD durumu, teorik olarak Re_M sonsuz ya da çok büyük bir değer alındığında gerçekleşmektedir. **Şekil 4.1**'de de görüldüğü üzere, Re_M değeri 100'ün üzerine çıkarıldığında MRI büyüme oranlarında belirgin bir değişiklik gözlemlenmemektedir. Bu da ε = 0 için ideal MHD sınırının Re_M = 100 olarak alınmasının yeterli olduğunu göstermektedir.

Şekil 4.1'de Re_M değeri azaldıkça (yani Ohmik difüzyon arttıkça), maksimum büyüme oranının en yüksek değeri düşmektedir. Ayrıca, bu tepe noktası daha küçük X değerlerine doğru kaymakta ve kararsızlık bölgesi daralarak X ekseni üzerindeki aralığı küçülmektedir. Bu durum, Ohmik difüzyonun MRI üzerindeki baskılayıcı etkisini açıkça göstermektedir.



Şekil 4.1: G = -1, κ = 0, ε = 0 ve farklı Re_M değerleri için maksimum büyüme oranları: $Re_M = 10^5$ (siyah çizgi), $Re_M = 100$ (kırmızı çizgi), $Re_M = 10$ (mavi çizgi), $Re_M = 1$ (yeşil çizgi), $Re_M = 0.5$ (turuncu çizgi), ve $Re_M = 0.1$ (sarı çizgi). Re_M azaldıkça, maksimum büyüme oranı düşmekte, tepe noktası daha küçük X değerlerine kaymakta ve kararsızlık bölgesi daralmaktadır.

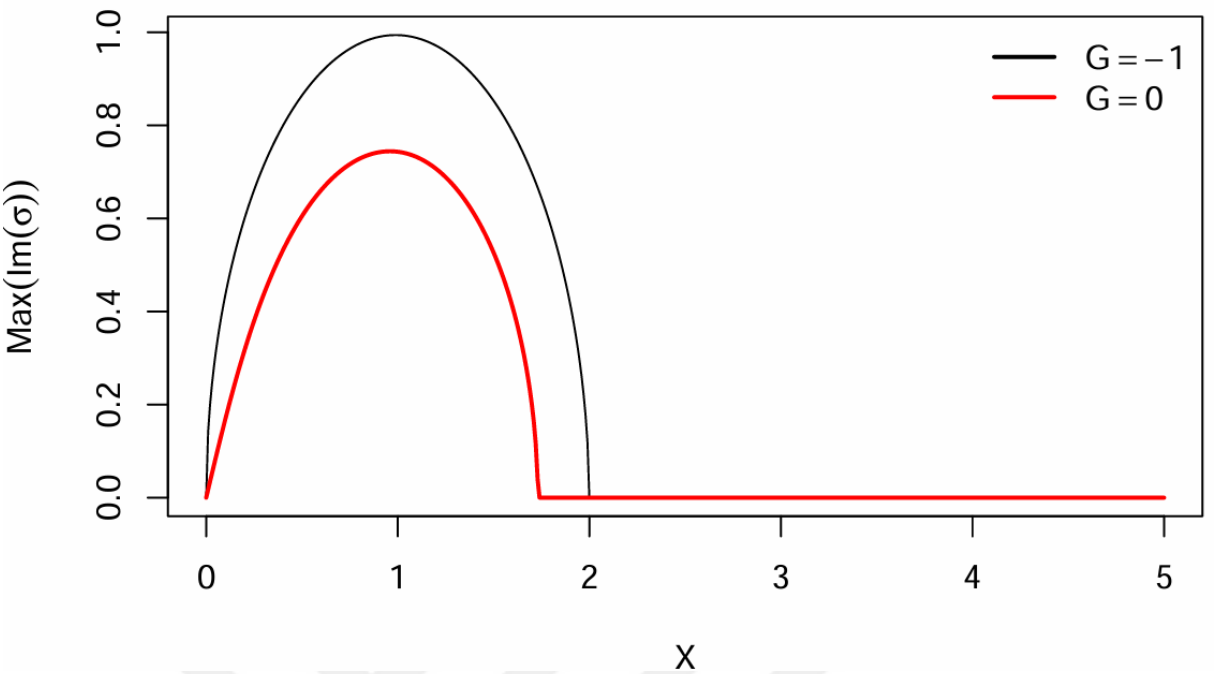
Tablo 4.1: Şekil 4.1'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği X değerleri.

Re_M	$(X, \text{Max}(\text{Im}(\sigma))_{\text{Max}})$	$X_{\text{Max}(\text{Im}(\sigma))=0}$
10^5	(1.0,1.0)	2.0
100	(0.99,0.99)	2.0
10	(0.90,0.95)	2.0
1	(0.48,0.68)	1.4
.5	(0.32,0.54)	0.90
.1	(0.07,0.24)	0.65

Şekil 4.2'de κ = 0, ε = 0, ve Re_M = 100 için farklı G değerlerinde (G = 0 ve G = -1) MRI'nın maksimum büyüme oranları, dalga sayısı k'ya bağlı olan ve X parametresiyle temsil edilen değişken cinsinden gösterilmektedir.

G = 0 durumu için elde edilen maksimum büyüme oranının yaklaşık 0.74 olduğu görülmektedir. Bu değer, ideal MHD koşulları altında MRI için literatürde kabul edilen standart büyüme oranına (0.75) oldukça yakındır. Bu sonuç, Balbus (1998) ve Devlen ve Pekünlü (2007) tarafından da gösterilmiştir.

$G = -1$ durumu için, MRI'nin maksimum büyüme oranının en yüksek değerinin, G = 0 durumuna göre arttığı görülmektedir. Ayrıca, kararsızlık bölgesinin genişlediği ve X ekseni üzerindeki aralığın da büyüdüğü görülmektedir.



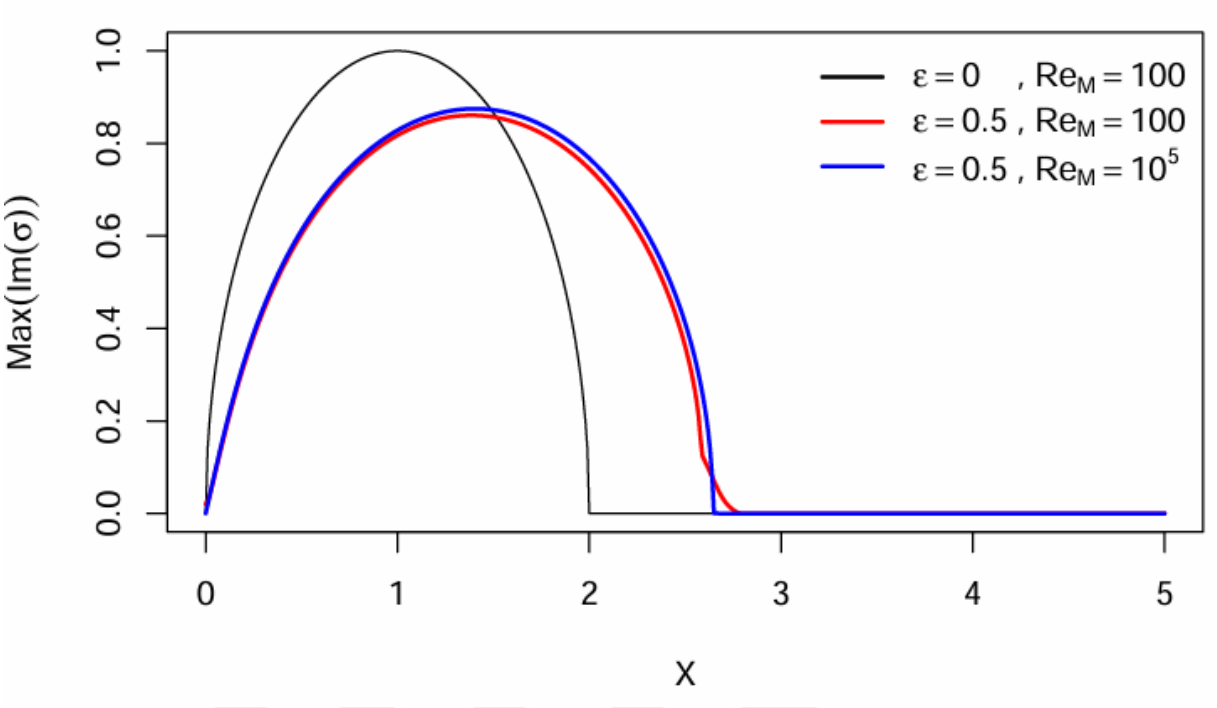
Şekil 4.2: $\kappa = 0$, $\varepsilon = 0$ ve $Re_M = 100$ için farklı G değerlerinde maksimum büyüme oranları: G = -1 (siyah çizgi), ve $G = 0$ (kırmızı çizgi). $G = -1$ durumunda $G = 0$ durumuna göre maksimum büyüme oranı artmakta ve kararsızlık bölgesi genişleyerek X ekseni üzerindeki aralık büyümektedir. $G = 0$ için maksimum büyüme oranı 0.74 olup, bu değer Balbus ve Hawley (1991) çalışmasında bulunan standart MRI büyüme oranına çok yakın bir değerdir.

Tablo 4.2: Şekil 4.2'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği X değerleri.

G	$(X, \text{Max}(\text{Im}(\sigma))_{\text{Max}})$	$X_{\text{Max}(\text{Im}(\sigma))=0}$
-1	(0.99,0.99)	2.0
0	(0.96,0.74)	1.7

Şekil 4.3'te G = -1, $\kappa = 0$, iki farklı manyetik Reynolds sayısı, Re_M ve iki farklı manyetizasyon parametresi, ε, değeri için MRI'nın maksimum büyüme oranları, dalga sayısı k'ya bağlı olan ve X parametresiyle temsil edilen değişken cinsinden gösterilmektedir. $\varepsilon = 0.5$ olduğu durumda ideal MHD sınırı için $\varepsilon = 0$ durumunda olduğu gibi Re_M değeri 100 olmayıp, $Re_M = 10^5$ olarak alınmıştır.

Manyetizasyon parametresinin varlığının, MRI'nın büyüme oranının davranışı üzerinde etkili olduğu görülmektedir. ε parametresinin varlığında, MRI'nın maksimum büyüme oranı azalmaktadır. Buna karşılık, kararsızlık bölgesi genişlemekte ve X ekseni üzerindeki aralık genişlemektedir. Bu sonuç, daha önceden, Ohmik difüzyonun ve manyetizasyonun göz önüne alındığı, ancak manyetik alanın radyal bileşeninin göz önüne alınmadığı ($\kappa = 0$) Devlen ve Pekünlü (2007) çalışmasında elde edilen sonuçlar ile uyumludur.



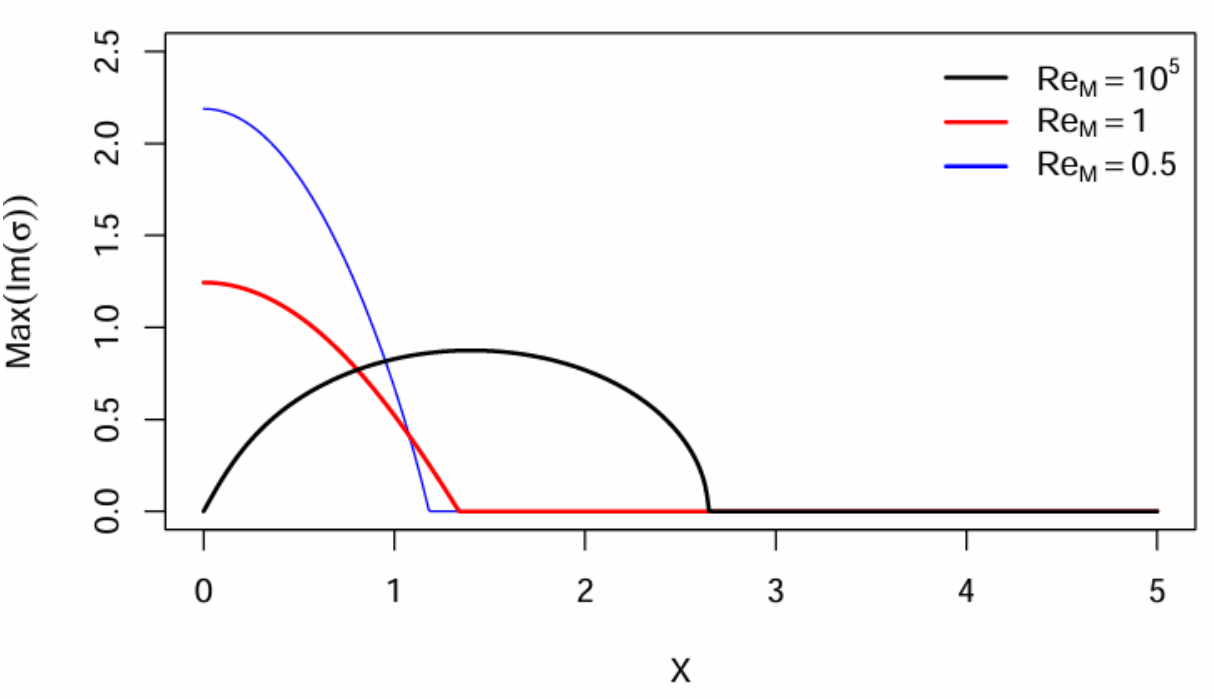
Şekil 4.3: G = -1, κ = 0, farklı manyetik Reynolds sayısı, Re_M ve farklı manyetizasyon parametresi, ε, değerleri için maksimum büyüme oranları: ε = 0, Re_M = 100 (siyah çizgi), ε = 0.5, Re_M = 100 (kırmızı çizgi), ε = 0.5 ve Re_M = 10^5 (mavi çizgi). Manyetizasyon parametresinin (ε) artırılması, kararsızlığın büyüme oranını azaltmakta, kararsızlığın geçerli olduğu X aralığını ise genişletmektedir.

Tablo 4.3: Şekil 4.3'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği X değerleri.

ε	Re_M	$(X, \text{Max}(\text{Im}(\sigma))_{\text{Max}})$	$X_{\text{Max}(\text{Im}(\sigma))=0}$
0	100	(0.99,0.99)	2.0
0.5	100	(1.4,0.88)	2.8
0.5	10^5	(1.4,0.88)	2.8

X, kararlı kılıcı bir kuvvet olan manyetik gerilme kuvvetinin bir temsilidir. Daha önceki bölümde MRI'nın bir yay benzetmesiyle açıklanabileceğinden bahsedilmişti (bakınız Şekil 2.1 ve anlatımı). Donmuş-akı koşuluna göre, manyetik alan ve akışkan birlikte hareket eder. Eğer akışkanın manyetik alan çizgisine bir yay ile bağlı olduğunu düşünürsek, manyetik alan tedirgin edildiğinde bu çizgi bir yay gibi gerilir. Bu durumda, yayın gerilme kuvveti akışkanı veya yayı tekrar denge durumuna döndürmeye çalışırken, merkezcil kuvvet (diferansiyel dönme) onu daha da uzaklaştırmaya çalışır. Gerilme kuvveti ifadesindeki Alfven hızı, manyetik alanı içerir (bkz. Denklem (3.47)). Diyamanyetizma etkisiyle manyetik alan zayıflar ve dolayısıyla gerilme kuvveti de zayıflar; bu da X ekseninde kararsızlık bölgesinin genişlemesine neden olur. Böylece, kararsızlık daha geniş bir dalga sayısı aralığında ortaya çıkar.

Şekil 4.4'te G = -1, κ = 0, ε = 0.5 ve farklı Re_M değerleri için MRI'nın maksimum büyüme oranları, dalga sayısı k'ya bağlı olan ve X parametresiyle temsil edilen değişken cinsinden gösterilmektedir. **Şekil 4.1**'de manyetizasyonun göz önüne alınmadığı ε = 0 durumu için, Re_M azaldıkça maksimum büyüme oranının en yüksek değerinin de azaldığı gösterilmişti. **Şekil 4.4**'te ise manyetizasyonun göz önüne alındığı ve manyetizasyon parametresinin ε = 0.5 olarak seçildiği durum gösterilmektedir. Bu durumda, Re_M azaldıkça maksimum büyüme oranının değeri artmaktadır.



Şekil 4.4: G = -1, κ = 0, ve ε = 0.5 için, farklı Re_M değerleri için maksimum büyüme oranları: $Re_M = 10^5$ (siyah çizgi), Re_M = 1 (kırmızı çizgi), ve Re_M = 0.5 (mavi çizgi). Re_M azaldıkça maksimum büyüme oranı artmakta olup, bu davranış ε = 0 durumu için gözlemlenenin tersidir (bkz. Şekil 4.1).

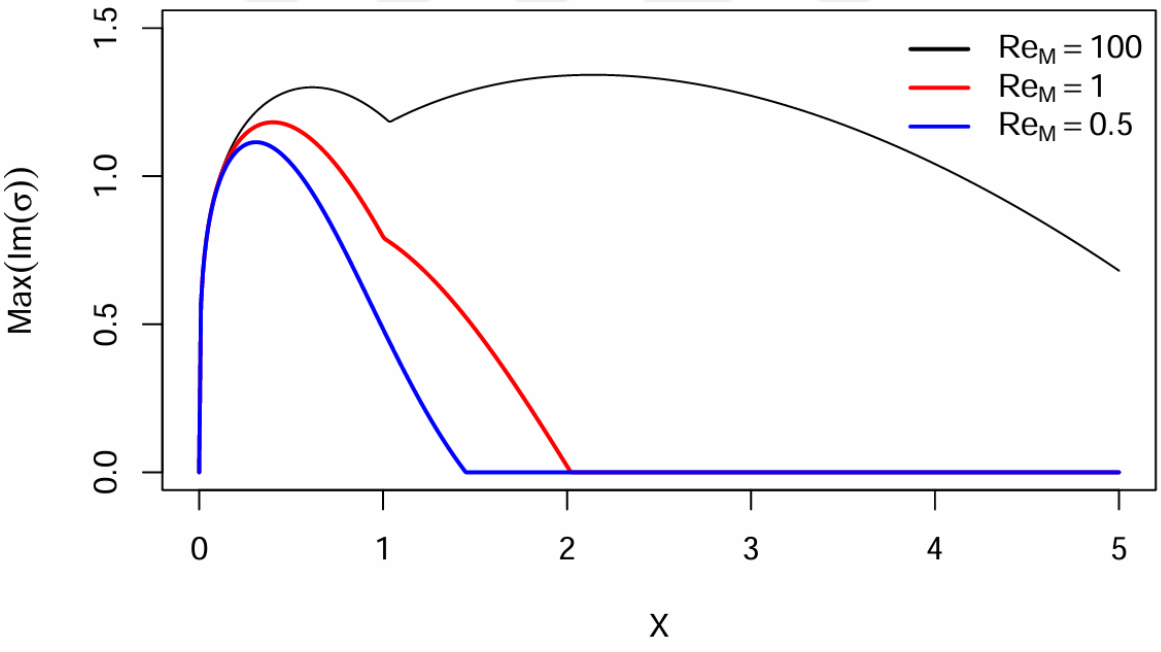
Tablo 4.4: Şekil 4.4'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği X değerleri.

Re_M	$(X, \text{Max}(\text{Im}(\sigma))_{\text{Max}})$	$X_{\text{Max}(\text{Im}(\sigma))=0}$
10^5	(1.4,0.88)	2.8
1	(0.0,1.2)	1.3
0.5	(0.0,2.2)	1.2

Şekil 4.5'te G = -1, κ = 5 ($B_{0_r} = 5B_{0_z}$), ε = 0 ve farklı Re_M değerleri için MRI'nın maksimum büyüme oranları, dalga sayısı k'ya bağlı olan ve X parametresiyle temsil edilen değişken cinsinden gösterilmektedir.

Şekil 4.5'te, maksimum büyüme oranlarının en büyük değerleri, $\kappa = 0$ durumu için elde edilen **Şekil 4.1**'e kıyasla daha büyük hale gelmiştir. Bu da, manyetik alanın radyal bileşeninin dikey bileşenine oranı olan κ değerinin artırılmasının maksimum büyüme oranlarını yükselttiği anlamına gelir. Bu sonuç, daha önceden farklı parametre değerleri ile manyetik alanın radyal bileşeninin göz önüne alındığı Devlen ve diğ. (2020) çalışmasında verilen sonuçlarla uyumludur.

Re_M = 100 (siyah çizgi) için büyüme oranı önce artarak bir maksimum değere ulaşmakta, ardından azalmakta ve tekrar artarak ikinci bir tepe noktasına ulaşmaktadır. Bu ikinci tepe noktasından sonra büyüme oranı tekrar azalmaya başlasa da ele aldığımız X değerleri için sıfıra ulaşmamaktadır. Yani diskin bu aralıktaki tüm dalga sayıları için kararsız olduğu gözlenmektedir. Bu durum, sistemin parametrelerine bağlı olarak büyüme oranının tek bir tepeyle sınırlı kalmadığını ve karmaşık bir kararsızlık yapısına sahip olabileceğini göstermektedir.



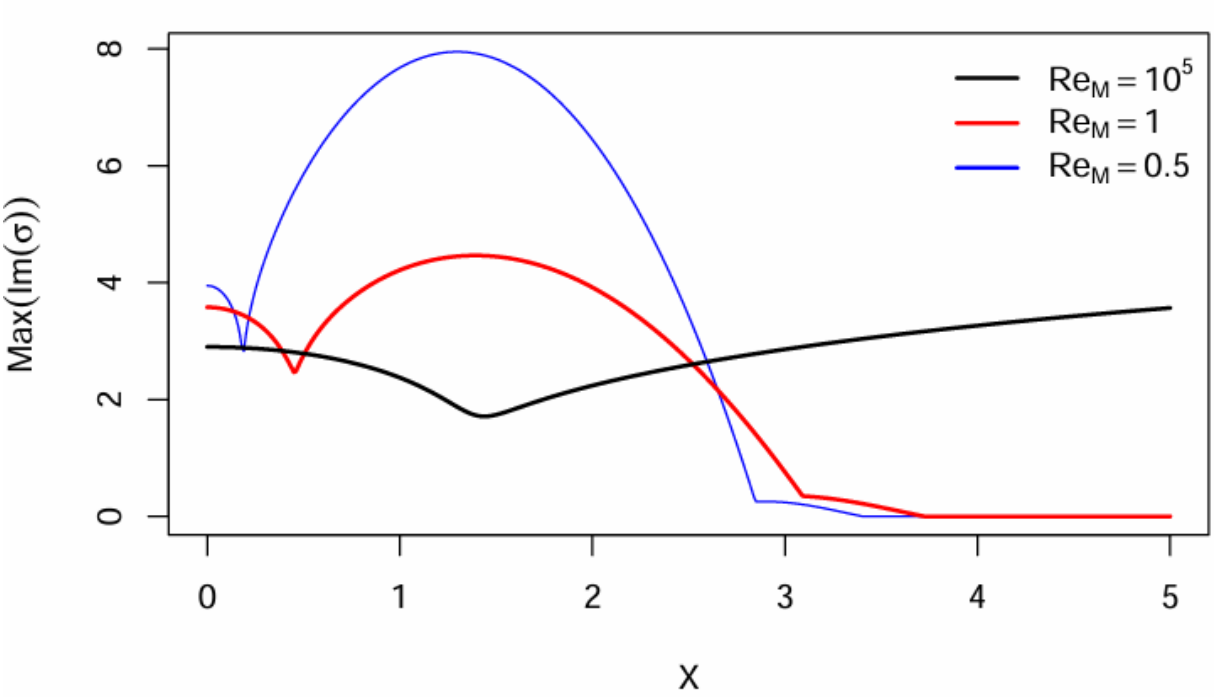
Şekil 4.5: G = -1, κ = 5 ($B_{0_r} = 5B_{0_z}$), ve ε = 0 için, Re_M değerleri için maksimum büyüme oranları: Re_M = 100 (siyah çizgi), Re_M = 1 (kırmızı çizgi), ve Re_M = 0.5 (mavi çizgi). κ değerinin artması, maksimum büyüme oranlarının yükselmesine neden olmaktadır.

Tablo 4.5: Şekil 4.5'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği X değerleri.

Re_M	$(X, \text{Max}(\text{Im}(\sigma))_{\text{Max}})$	$X_{\text{Max}(\text{Im}(\sigma))=0}$
100	(0.60,1.3) (2.1,1.3)	-
1	(0.40,1.2)	2.03
0.5	(0.31,1.1)	1.45

Şekil 4.6'da G = -1, κ = 5, ve ε = 0.5 farklı Re_M değerleri için MRI'ın maksimum büyüme oranları, dalga sayısı k'ya bağlı olan ve X parametresiyle temsil edilen değişken cinsinden gösterilmektedir.

Şekil 4.6, iki farklı durumun birleştirilmiş halini temsil etmektedir. Birinci durum, $\varepsilon = 0.5$ olan ve **Şekil 4.4**'te gösterilen durumdur. İkinci durum ise, κ = 5 değerinin maksimum büyüme oranlarını artırdığı ve $Re_M = 10^5$ için büyüme oranının iki farklı X değerinde tepe noktası yaptığı durumdur. Bu iki etkinin birleşimi, yani hem manyetizasyon hem de manyetik alanın radyal bileşeninin varlığı, kararsızlığın büyümesinde Ohmik difüzyonun daha önceden yapılan çalışmalardakinden farklı sonuçlara sebep olabileceğine işaret etmektedir. Şekilde verilen tüm Re_M değerleri için maksimum büyüme oranlarının, standart MRI büyüme oranından yüksek olduğu gözlenmektedir.



Şekil 4.6: G = -1, κ = 5, ve ε = 0.5 için, farklı Re_M değerleri için maksimum büyüme oranları: $Re_M = 10^5$ (siyah çizgi), Re_M = 1 (kırmızı çizgi), ve Re_M = 0.5 (mavi çizgi). ε = 0.5 ve κ = 5 durumlarının birleşimi. Bu birleşim kararsızlığın büyümesinde Ohmik difüzyonun daha önceden elde edilen sonuçlardan farklı sonuçlara sebep olabileceğine işaret etmektedir.

Tablo 4.6: Şekil 4.6'de verilen parametreler için zirve ve kararsızlığın sönümlendiği X değerleri.

Re_M	$(X, \mathrm{Max}(\mathrm{Im}(\sigma))_{\mathrm{Max}})$	$X_{\mathrm{Max}(\mathrm{Im}(\sigma))=0}$
10^5	-	-
1	(1.4,4.5)	3.73
0.5	(1.3,7.9)	3.41

TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu tez çalışmasında, diyamanyetik gezegen oluşum disklerinin iç bölgelerinde manyetik dönme kararsızlığının (MRI) davranışı incelenmiştir. Devlen ve diğ. (2020) çalışmasında, manyetik alanın yalnızca radyal ve dikey bileşenlerinin bulunduğu kabul edilerek, manyetizasyon parametresinin ve manyetik alan gradiyentinin MRI üzerindeki etkisi araştırılmıştır. Bu tez çalışmasında ise, söz konusu modele ek olarak indüksiyon denklemine Ohmik difüzyon terimi dahil edilmiştir. Bu bağlamda, manyetik Reynolds sayısının MRI'nın maksimum büyüme oranı üzerindeki etkisi, eksen-simetrik mod ($m = 0$) için analiz edilmiştir.

Model olarak merkezi bir yıldız etrafında dönen, ince yapılı Kepler tipi bir gezegen oluşum diski ele alınmıştır. Doğrusal kararlılık analizi yöntemiyle, diyamanyetik etkinin ve manyetik alanın r ve z bileşenlerinin varlığı varsayımı altında, Ohmik difüzyon etkisini içeren indüksiyon denkleminin tedirgin edilmiş hali elde edilmiştir. Devlen ve diğ. (2020) çalışmasında elde edilmiş olan süreklilik ve momentum denklemlerinin tedirgin edilmiş halleri ile bu tez çalışması kapsamında elde edilen indüksiyon denkleminin tedirgin edilmiş halinden oluşan denklem sistemi yine bu tez çalışması kapsamında yazılan bir MATLAB programı kullanılarak çözülmüştür. Buradan, kararsızlık için dağılma bağıntısı elde edilmiş ve bu dağılma bağıntısı, Ohmik difüzyonun katkısını belirleyen manyetik Reynolds sayısı, manyetizasyon parametresi, manyetik alan bileşenlerinin oranı gibi boyutsuz nicelikler cinsinden ifade edilerek boyutsuzlaştırılmıştır. Beşinci dereceden bu dağılma bağıntısının kompleks çözümleri NAG Fortran kütüphanesi aracılığıyla hesaplanmıştır. Böylece diyamanyetik gezegen oluşum disklerinde, manyetik alanın radyal bileşeninin de göz önüne alındığı durumda, Ohmik difüzyonun MRI üzerindeki etkisi boyutsuz parametreler cinsinden değerlendirilmiştir.

Elde edilen başlıca bulgular aşağıda sıralanmıştır:

1. **Ohmik difüzyonun etkisi:**
   Ohmik difüzyonu kontrol eden manyetik Reynolds sayısı Re_M azaldıkça, kararsızlığın maksimum büyüme oranı düşmekte, tepe noktası daha küçük dalga sayılarına kaymakta ve kararsızlık bölgesi daralmaktadır. Bu durum, Ohmik difüzyonun MRI üzerindeki baskılayıcı etkisini göstermektedir. Bu sonuç, daha önceden manyetizasyonun göz önüne alınmadığı sonuçlarla (Jin ,1996; Sano ve Miyama,1999) uyumludur.

2. **Manyetik alan gradiyentinin etkisi:**
   Manyetik alan gradiyentinin ölçüsü olan G parametresi $G = -1$ alındığında, $G = 0$ durumuna göre maksimum büyüme oranı artmakta ve kararsızlık bölgesi genişleyerek MRI daha geniş bir dalga sayısı aralığında etkin olmaktadır. Bu, manyetik alan gradiyentinin MRI'yi güçlendirdiğini göstermektedir.

3. **Manyetizasyon etkisi:**
   Manyetizasyon parametresi ε'un artırılmasının kararsızlığa etkisi manyetik alan gradiyenti ile ilişkili bulunmuştur. $G = -1$ için kararsızlığın büyüme oranı azaltmakta; buna karşılık MRI'nin geçerli olduğu X aralığını genişletmektedir. Bu etki diyamanyetizma nedeniyle manyetik alanın dolayısıyla manyetik gerilme kuvvetinin zayıflaması nedeniyle ortaya çıkar. Bu sonuç Devlen ve Pekünlü (2007) çalışmasında elde edilen sonuçlar ile uyumludur. $\varepsilon = 0.5$ durumunda, Re_M azaldıkça maksimum büyüme oranı artmaktadır. Bu davranış, $\varepsilon = 0$ için gözlemlenenin tersidir.

4. **Manyetik alanın radyal bileşeninin etkisi:**
   Manyetik alanın radyal bileşeninin dikey bileşenine oranı olarak tanımlanan κ değerinin artması, maksimum büyüme oranlarının yükselmesine neden olmaktadır. Bu da radyal bileşenin varlığında MRI'nın daha kuvvetli bir şekilde ortaya çıktığını göstermektedir. Bu sonuç Devlen ve diğ. (2020) çalışmasında elde edilen sonuçlar ile uyumludur.

Gelecekte yapılacak çalışmalarda, öncelikle bu çalışmada ele alınan varsayımlar altında eksen-simetrik olmayan ($m \neq 0$) tedirginlikler için dağılma bağıntısının elde edilmesi planlanmaktadır. Daha sonraki aşamada ise, ideal olmayan manyetohidrodinamik etkilerden Hall etkisinin hesaplamalara dahil edilmesi ve bu çalışmada kullanılan parametreler üzerinden bir araştırma yapılması hedeflenmektedir.

KAYNAKLAR

Armitage, P.J., 2011, Dynamics of protoplanetary disks, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 49(1), pp.195-236.

Armitage, P.J., 2017, Lecture notes on the formation and early evolution of planetary systems, *arXiv preprint astro-ph/0701485*.

Armitage, P.J., 2022, Lecture notes on accretion disk physics, *arXiv preprint arXiv:2201.07262*.

Balbus, S.A. and Hawley, J.F., 1991, A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I-Linear analysis. II-Nonlinear evolution. *Astrophysical Journal, Part 1 (ISSN 0004-637X), vol. 376,* pp.214-233.

Balbus, S.A. and Hawley, J.F., 1998, Instability, turbulence, and enhanced transport in accretion disks, *Reviews of modern physics*, 70(1), p.1.

Balbus, S.A. and Terquem, C., 2001, Linear Analysis of the Hall Effect in Protostellar Disks, *The Astrophysical Journal*, 552(1), p.235.

Balbus, S.A., 2003, Enhanced angular momentum transport in accretion disks, *Annual Review of Astronomy and Astrophysics*, 41(1), pp.555-597.

Bodo, G., Ghisellini, G. and Trussoni, E., 1992, Diamagnetic effects in synchrotron sources, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 255(4), pp.694-700.

Desch, S.J., 2004, Linear analysis of the magnetorotational instability, including ambipolar diffusion, with application to protoplanetary disks, *The Astrophysical Journal*, 608(1), p.509.

Devlen, E. and Pekünlü, E.R., 2007, Influence of the diamagnetic effect on the magnetorotational instability in accretion discs, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 377(3), pp.1245-1262.

Devlen, E., Ulubay, A. and Pekünlü, E.R., 2020, Magnetorotational instability in diamagnetic, misaligned protostellar discs, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 491(4), pp.5481-5488.

Doğan, S., 2017, Magnetic field gradient effects on the magnetorotational instability, *Astronomische Nachrichten*, 338(6), pp.740-747.

Frank, J., King, A.R. and Raine, D., 2002, *Accretion power in astrophysics*, Cambridge University Press.

Fromang, S. and Papaloizou, J., 2006, Dust settling in local simulations of turbulent protoplanetary disks, *Astronomy & Astrophysics*, 452(3), pp.751-762.

Gammie, C.F., 1996, Layered accretion in T Tauri disks, *Astrophysical Journal,* v. 457, p. 355.

Iwasaki, K., Tomida, K., Takasao, S., Okuzumi, S. and Suzuki, T.K., 2024, Dynamics near the inner dead-zone edges in a proprotoplanetary disk, *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 76(4), pp.616-652.

Jin, L., 1996, Damping of the shear instability in magnetized disks by Ohmic diffusion, *Astrophysical Journal,* v. 457, p. 798.

Mac Low, M.M., Norman, M.L., Konigl, A. and Wardle, M., 1995, Incorporation of ambipolar diffusion into the ZEUS magnetohydrodynamics code, *Astrophysical Journal,* vol. 442, no. 2, Part 1, p. 726-735.

Pandey, B.P. and Wardle, M., 2012, Magnetorotational instability in magnetic diffusion dominated accretion discs, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 423(1), pp.222-235.

Sano, T. and Miyama, S.M., 1999, Magnetorotational instability in protoplanetary disks. I. On the global stability of weakly ionized disks with ohmic dissipation, *The Astrophysical Journal*, 515(2), p.776.

Sano, T. and Stone, J.M., 2002, The effect of the Hall term on the nonlinear evolution of the magnetorotational instability, I. Local axisymmetric simulations. *The Astrophysical Journal*, 570(1), p.314.

Sano, T. and Stone, J.M., 2002, The effect of the Hall term on the nonlinear evolution of the magnetorotational instability, II. Saturation level and critical magnetic Reynolds number, *The Astrophysical Journal*, 577(1), p.534.

Singal, A.K., 1986, Magnetization effects in an incoherent synchrotron source, *Astronomy and Astrophysics (ISSN 0004-6361),* vol. 155, no. 2, Feb. p. 242-246.

Terquem, C. and Papaloizou, J.C., 1996, On the stability of an accretion disc containing a toroidal magnetic field, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 279(3), pp.767-784.

Wardle, M., 1999, The Balbus-Hawley instability in weakly ionized discs, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 307(4), pp.849-856.

Wardle, M. and Ng, C., 1999, The conductivity of dense molecular gas, *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, *303*(2), pp.239-246.

Wardle, M., 2007, Magnetic fields in protoplanetary disks. *Astrophysics and Space Science*, 311, pp.35-45.

EKLER

EK 1. Vektör özdeşlikleri:

$\vec{A}$ ve $\vec{B}$ birer vektörü, f bir skaleri temsil etmektedir.

$$\nabla \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = (\vec{B} \cdot \nabla)\vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla)\vec{B} + \left(\nabla \cdot \vec{B}\right)\vec{A} - \left(\nabla \cdot \vec{A}\right)\vec{B} \quad \text{(E1.1)}$$

$$\nabla \times \left(f\vec{A}\right) = \left(\nabla \times \vec{A}\right)f + (\nabla f) \times \vec{A} \quad \text{(E1.2)}$$

$$\nabla \times \left(f\,\vec{A} \times \vec{B}\right) = f\left(\nabla \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right)\right) + (\nabla f) \times \left(\vec{A} \times \vec{B}\right) \quad \text{(E1.3)}$$

Silindirik koordinatlarda:

$$\left(\vec{A} \cdot \nabla\right)\vec{B} = \left(A_r \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r}\frac{\partial B_r}{\partial \phi} + A_z \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{A_\phi B_\phi}{r}\right)\hat{r} \quad \text{(E1.4)}$$

$$+ \left(A_r \frac{\partial B_\phi}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r}\frac{\partial B_\phi}{\partial \phi} + A_z \frac{\partial B_\phi}{\partial z} + \frac{A_\phi B_r}{r}\right)\hat{\phi} + \left(A_r \frac{\partial B_z}{\partial r} + \frac{A_\phi}{r}\frac{\partial B_z}{\partial \phi} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}\right)\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \quad \text{(E1.5)}$$

$$\nabla \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z}\right)\right)\hat{r} + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}\right)\hat{\phi} + \left(\frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}\left(rA_\phi\right) - \frac{\partial A_r}{\partial \phi}\right)\right)\hat{z} \quad \text{(E1.6)}$$

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Burak KINANOGLU
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	Tarih girmek için tıklayın veya dokunun.
Uyruğu	☑ T.C. ❒ Diğer:
E-Posta Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Astronomi ve Uzay Bilimleri
Mezuniyet Yılı	2022

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Fizik
Programı	Matematiksel Fizik

Makale ve Bildiriler