CEBİR III KONULARI İLE İLGİLİ SORULAR ve CEVAPLARI

Aşağıdaki iddialar doğru mudur? Neden?

(a) $a, b\in \mathbb{R}$ olmak üzere**,** $a+bi$ ile $a-bi$ kompleks sayıları $\mathbb{R}$ üzerinde eşleniktir.

Çözüm: İddia doğrudur. $\begin{array}{c} \psi_{i,-i}: \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ a+bi \mapsto a-bi \end{array}$ tasviri $\mathbb{C}$ nin bir $\mathbb{R}$-otomorfisidir.

$irr(a+bi, \mathbb{R}) = a_0 + a_1x + ... + x^n$ ise, $a_0 + a_1(a+bi) + ... + (a+bi)^n = 0$ olacağından $0 = \psi_{i,-i}(0) = \psi_{i,-i}(a_0 + a_1(a+bi) + ... + (a+bi)^n) = \psi_{i,-i}(a_0) + \psi_{i,-i}(a_1)\psi_{i,-i}(a+bi) + ... + (\psi_{i,-i}(a+bi))^n$ elde edilir. $\psi_{i,-i}(a+bi) = a-bi$ olduğu ve $\psi_{i,-i}$ tasvirinin $\mathbb{R}$ nin elemanlarını sabit bıraktığı göz önüne alındığında, $0 = a_0 + a_1(a-bi) + ... + (a-bi)^n$ olduğu görülür. O halde, $a-bi \in \mathbb{C}$ $a_0 + a_1x + ... + x^n \in \mathbb{R}[x]$ monik asal polinomunun bir köküdür. Dolayısıyla $irr(a-bi, \mathbb{R}) = a_0 + a_1x + ... + x^n$ olduğundan $a+bi$ ve $a-bi$ elemanları $\mathbb{R}$ üzerinde eşleniktir.

(b) $a, b\in \mathbb{Q}$ olmak üzere, $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun bir kökü ise $a-b\sqrt{2}$ de $f(x)$ polinomunun bir köküdür.

Çözüm: İddia doğrudur. $irr(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = x^2 - 2 = irr(-\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ olduğundan $\sqrt{2}$ ile $-\sqrt{2}$ $\mathbb{Q}$ üzerinde eşleniktir. (Hatırlatma: $F \le E$ bir cisim genişlemesi ve $\alpha, \beta \in E$ F üzerinde eşlenik olsun. Bu durumda, $\psi_{\alpha,\beta}(\alpha) = \beta$ ve her $a \in F$ için $\psi_{\alpha,\beta}(a) = a$ olacak biçimde bir $\psi_{\alpha,\beta}: F(\alpha) \to F(\beta)$ cisim izomorfisi vardır) Bu durumda, $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(\sqrt{2}) = -\sqrt{2}$ olacak biçimde bir $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}: \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \to \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ $\mathbb{Q}$-otomorfisi vardır. Kolayca görülebileceği gibi $a+b\sqrt{2} \in \mathbb{R}$ için $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$ olur. Şimdi $a+b\sqrt{2}$ $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun bir kökü olsun. Bu durumda, $a_0 + a_1(a+b\sqrt{2}) + ... + a_n(a+b\sqrt{2})^n = 0$ olacağından

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(0) = \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a_0 + a_1(a+b\sqrt{2}) + ... + a_n(a+b\sqrt{2})^n) \\ &= \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a_0) + \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a_1)\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a+b\sqrt{2}) + ... + \psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a_n)(\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a+b\sqrt{2}))^n \end{aligned}$$

elde edilir

$\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}(a+b\sqrt{2}) = a-b\sqrt{2}$ olduğu ve $\psi_{\sqrt{2},-\sqrt{2}}$ tasvirinin $\mathbb{Q}$ nun elemanlarını sabit bıraktığı göz önüne alındığında, $0 = a_0 + a_1(a-b\sqrt{2}) + ... + a_n(a-b\sqrt{2})^n$ olduğu görülür. O halde, $a-b\sqrt{2}$ de $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$ polinomunun bir köküdür.

(c) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$

Çözüm: İddia yanlıştır. $irr(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = x^2 - 2$ ve dolayısıyla $\deg(\sqrt{2}, \mathbb{Q}) = 2$ olduğundan $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}] = 2$ dir. Bu durumda $\{1, \sqrt{2}\}$ kümesi $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ nin bir $\mathbb{Q}$-tabanı olduğundan $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \{a.1 + b.\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ olur. $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$ olsa, $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olacağından $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$ olacak biçimde a, b rasyonel sayıları olur. Bu durumda, $3 = a^2 + 2\sqrt{2}ab + 2b^2$ bulunur. $ab = 0$ olsa, $a = 0$ veya $b = 0$ olur ve $a = 0$ ise

$b=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\in\mathbb{Q}$ çelişkisi ; $b=0$ ise, $a=\pm\sqrt{3}\in\mathbb{Q}$ çelişkisi elde edilir. O halde $ab\neq 0$ olmalıdır. Bu durumda ise, $\sqrt{2}=\dfrac{3-(a^2+2b^2)}{2ab}\in\mathbb{Q}$ çelişkisi elde edilir. O halde kabulümüz yanlıştır yani, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\neq\mathbb{Q}(\sqrt{3})$ tür.

(d) 4 elemanlı bir cisim vardır.

Çözüm: İddia doğrudur. $f(x)=x^2+x+1\in\mathbb{Z}_2[x]$ polinomunu göz önüne alalım. $f(\overline{0})=\overline{1}\neq\overline{0}$ ve $f(\overline{1})=\overline{1}\neq\overline{0}$ olduğundan, $f(x)$ polinomunun $\mathbb{Z}_2$ cisminde hiç kökü yoktur. $\deg(f(x))=2$ olduğuda düşünülürse $f(x)$ polinomu $\mathbb{Z}_2[x]$ te asaldır. Kronecker teoremine göre, $\mathbb{Z}_2$ cisminin $f(x)$ polinomunun bir kökünü içeren E gibi bir genişlemesi vardır. Kabul edelim ki $\alpha\in E$ ve $f(\alpha)=0$ olsun. Bu durumda, $irr(\alpha,\mathbb{Z}_2)=f(x)$ ve dolayısıyla $\deg(\alpha,\mathbb{Z}_2)=2$ dir. $\{\overline{1},\alpha\}$ kümesi $\mathbb{Z}_2(\alpha)$ nın bir $\mathbb{Z}_2$-tabanı olacağından $\mathbb{Z}_2(\alpha)=\{a.\overline{1}+b.\alpha \mid a,b\in\mathbb{Z}_2\}$ olur. Sonuç olarak $\mathbb{Z}_2(\alpha)=\{\overline{0},\overline{1},\alpha,\overline{1}+\alpha\}$ bir 4 elamanlı cisimdir.

(e) $F\leq E$ bir cisim genişlemesi ve $[E:F]=p\in IP$ olsun. Bu durumda, her $\alpha\in E-F$ için $F(\alpha)=E$ dir.

Çözüm: İddia doğrudur. Öncelikle $[E:F]=p>1$ olduğundan $F<E$ olduğunu söyleyebiliriz. O halde $E-F$ de en az bir eleman vardır. Şimdi, $\alpha\in E-F$ olsun. Bu durumda $F<F(\alpha)\leq E$ olur. O halde, $p=[E:F]=[E:F(\alpha)].[F(\alpha):F]$ ve dolayısıyla $[F(\alpha):F]\mid p$ dir. $F\neq F(\alpha)$ olduğundan $[F(\alpha):F]>1$ olduğu düşünülürse, $[F(\alpha):F]=p$ olmalıdır. Sonuç olarak, $p=[E:F(\alpha)].[F(\alpha):F]$ ve $[F(\alpha):F]=p$ eşitliklerinden $[E:F(\alpha)]=1$ olduğu görüldüğünden $F(\alpha)=E$ bulunur.

(f) $F\leq E$ bir cisim genişlemesi ve $[E:F]=n\in\mathbb{N}$ olsun. Bu durumda, her $\alpha\in E-F$ için $F(\alpha)=E$ dir.

Çözüm: İddia yanlıştır. $\mathbb{Q}\leq\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ cisim genişlemesini göz önüne alalım. Kolayca görülebileceği gibi $irr(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q})=x^4-2$ ve dolayısıyla $\deg(\sqrt[4]{2},\mathbb{Q})=4$ tür. O halde, $[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}):\mathbb{Q}]=4$ olur. Öte yandan, $\sqrt[4]{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ olduğundan $\sqrt{2}=(\sqrt[4]{2})^2\in\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ ($\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ bir cisim olduğundan "." İşlemine göre kapalıdır) ve dolayısıyla $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})-\mathbb{Q}$ dir. $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})-\mathbb{Q}$ için $\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ olsa, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}):\mathbb{Q}]=4$ olur. Oysaki $\deg(\sqrt{2},\mathbb{Q})=2$ olduğundan $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=2$ dir. O halde, $\mathbb{Q}(\sqrt{2})\neq\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ dir.

(g) $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$

Çözüm: İddia doğrudur. $\sqrt{2}\in\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ olsa, $\mathbb{Q}\leq\mathbb{Q}(\sqrt{2})\leq\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2})$ ve dolayısıyla $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}(\sqrt{2})].[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]$ olur. Bu durumda, $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]=\deg(\sqrt{2},\mathbb{Q})=2$ ve

$[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}]=\deg(\sqrt[3]{2},\mathbb{Q})=3$ olduğundan, $[\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}):\mathbb{Q}(\sqrt{2})]=\frac{3}{2}$ çelişkisi elde edilir ($F\le E$ bir cisim genişlemesi ise, $[E:F]=\infty$ veya $[E:F]\in\mathbb{N}$ olur).

(h) $F\le E$ bir cisim genişlemesi ve $\alpha,\beta\in E$ F üzerinde cebirsel olsun. Bu durumda, $[F(\alpha,\beta):F]=\max\{\deg(\alpha,F),\deg(\beta,F)\}$ olur.

Çözüm: İddia yanlıştır. $\mathbb{Q}\le\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ cisim genişlemesini göz önüne alalım.
$\mathbb{Q}\le\mathbb{Q}(\sqrt{2})\le\mathbb{Q}(\sqrt{2})(\sqrt{3})=\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$ olduğundan
$[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}(\sqrt{2})].[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]$ .....(*) eşitliği geçerlidir. $\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ olduğunu (c) şıkkındaki problemin çözümünden biliyoruz dolayısıyla $\deg(\sqrt{3},\mathbb{Q}(\sqrt{2})>1$ dir. O halde, $1<\deg(\sqrt{3},\mathbb{Q}(\sqrt{2}))\le\deg(\sqrt{3},\mathbb{Q})=2$ eşitsizliğinden $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}(\sqrt{2})]=\deg(\sqrt{3},\mathbb{Q}(\sqrt{2}))=2$ bulunur. $[\mathbb{Q}(\sqrt{2}):\mathbb{Q}]$=2 olduğuda düşünülürse, (*) eşitliğinden $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=4$ olduğu görülür. Ancak $[\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}):\mathbb{Q}]=4\ne 2=\max\{\underbrace{\deg(\sqrt{2},\mathbb{Q})}_{=2},\underbrace{\deg(\sqrt{3},\mathbb{Q})}_{=2}\}$ dir.

(ı) $F\le E$ bir cisim genişlemesi ve $\alpha,\beta\in E$ F üzerinde cebirsel olsun. Bu durumda, $[F(\alpha,\beta):F]=[F(\alpha):F].[F(\beta):F]$ olur.

Çözüm: İddia yanlıştır. **(ÖDEV)**

(j) Her cebirsel genişleme sonludur.

Çözüm: İddia yanlıştır. $\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}=\{\alpha\in\mathbb{C}\mid\alpha,\ \mathbb{Q}\ \textit{üzerinde cebirsel}\}$ yani, $\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}$ $\mathbb{Q}$ nun $\mathbb{C}$ (kompleks sayılar cismi) içindeki cebirsel kapanış cismi olsun. Biliyoruz ki $\mathbb{Q}\le\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}$ bir cebirsel genişlemedir. Şimdi, $\mathbb{Q}\le\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}$ cebirsel genişlemesinin sonlu ve $[\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}:\mathbb{Q}]=n\in\mathbb{N}$ olduğunu varsayalım. Öte yandan, $\sqrt[n+1]{2}\in\mathbb{C}$ için, $irr(\sqrt[n+1]{2},\mathbb{Q})=x^{n+1}-2$ ($x^{n+1}-2\in\mathbb{Q}[x]$ polinomunun asal olduğu Esisenstein kriterinden kolayca görülür) olduğundan $[\mathbb{Q}(\sqrt[n+1]{2}):\mathbb{Q}]=n+1$ olur. $\mathbb{Q}\le\mathbb{Q}(\sqrt[n+1]{2})\le\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}$ olduğu göz önüne alınırsa, $[\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}:\mathbb{Q}(\sqrt[n+1]{2})].\underbrace{[\mathbb{Q}(\sqrt[n+1]{2}):\mathbb{Q}]}_{=n+1}=[\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}:\mathbb{Q}]=n$ olacağından, $n+1\mid n$ çelişkisi elde edilir. O halde $\mathbb{Q}\le\overline{\mathbb{Q}}_{\mathbb{C}}$ cebirsel genişlemesinin derecesi sonlu değildir.

(k) $F\le E$ bir cisim genişlemesi ve $0\ne\alpha,\beta\in E$ olsun. α F üzerinde cebirsel, β F üzerinde transandant ise, $\alpha\beta$ F üzerinde transandanttır.

Çözüm: İddia doğrudur. $\gamma:=\alpha\beta$ F üzerinde cebirsel olsa, $F\le F(\gamma,\alpha)$ bir cebirsel genişleme olur. Bu durumda $F(\gamma,\alpha)$ cisminin her elemanı F üzerinde cebirsel olacağından, $\beta=\alpha^{-1}\gamma\in F(\gamma,\alpha)$ da F üzerinde cebirsel olur. Oysaki β F üzerinde transandanttı. O halde, $\gamma:=\alpha\beta$ F üzerinde cebirsel değil transandant olmalıdır.

(l) İki transandant elemanın çarpımı transandanttır.

Çözüm: İddia yanlıştır. $\pi, \pi^{-1} \in \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ üzerinde transandanttır ($\pi^{-1} \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ üzerinde transandanttır. Çünkü cebirsel olsa, $\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\pi^{-1})$ cisim genişlemesi cebirsel olacağından $\pi \in \mathbb{Q}(\pi^{-1})$ $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsel bulunur!!!). Ancak $1 = \pi . \pi^{-1}$ elemanı $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirseldir.

(m) İki transandant elemanın çarpımı cebirseldir.

Çözüm: İddia yanlıştır. **(ÖDEV)**

(n) Cebirsel kapalı cisimler sonsuz elemanlıdır.

Çözüm: İddia doğrudur. F bir cebirsel kapalı cisim olsun. Şimdi, F cisminin n elemanlı sonlu bir cisim olduğunu varsayalım. $F = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ olsun. Bu durumda, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ elemanlarının hiçbiri $f(x) = (x-\alpha_1)(x-\alpha_2)...(x-\alpha_n) + 1 \in F[x]$ polinomunun kökü olmadığından, $f(x)$ polinomunun F cisminde hiç kökü yoktur. Bu ise F nin cebirsel kapalı cisim olması ile çelişir. O halde F cismi sonsuz elemanlı bir cisimdir.

(o) F bir cebirsel kapalı cisim ve $f(x) \in F[x]$ olsun. $f(x)$ polinomu $F[x]$ te bir asal polinom ise, $\deg(f(x)) = 1$ dir.

Çözüm: İddia doğrudur. $f(x)$ polinomu $F[x]$ te bir asal polinom olduğundan $f(x) \in F[x] - F$ olduğunu zaten biliyoruz. F bir cebirsel kapalı cisim olduğuna göre, $f(\alpha) = 0$ olacak biçimde bir $\alpha \in F$ vardır. Bu durumda, $f(x) = (x-\alpha)g(x)$ olacak biçimde bir $g(x) \in F[x]$ vardır. $f(x)$ polinomu $F[x]$ te bir asal polinom olduğuna göre, $g(x) \in A(F[x]) = F - \{0_F\}$ olmalıdır. Dolayısıyla,
$\deg(f(x)) = \underbrace{\deg(x-\alpha)}_{=1} + \underbrace{\deg(g(x))}_{=0} = 1$ bulunur.

(p) F bir cisim olsun. Eğer $F[x]$ te her asal polinomun derecesi 1 ise, F bir cebirsel kapalı cisimdir.

Çözüm: İddia doğrudur.