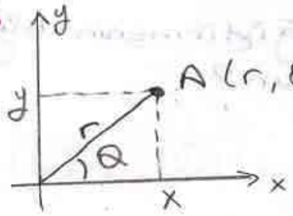
3.4 - Bir düzlemdeki iki noktanın kutupsal koordinatları $(2,5m;\ 30°)$ ve $(3,8m;\ 120°)$ dir.
a) Bu noktaların kartezyen koordinatlarını,
b) Aralarındaki uzaklığı bulunuz.

Cevap:



$x = r\,\text{Cos}\,\theta$
$y = r.\,\text{Sin}\,\theta$

a) $V(2,5m;\ 30°) = (r_1;\ \theta_1)$

$x_1 = r_1 \cdot \text{Cos}\,\theta_1 = 2,5 \cdot \overbrace{\text{Cos}\,30°}^{0,8} = 2\ m$

$y_1 = r_1 \cdot \text{Sin}\,\theta_1 = 2,5 \cdot \underbrace{\text{Sin}\,30°}_{0,5} = 1,25\ m$

$(x_1;\ y_1) = (2;\ 1,25)\ m$

$V(3,8m;\ 120°) = (r_2;\ \theta_2)$

$x_2 = r_2 \cdot \text{Cos}\,\theta_2 = 3,8 \cdot \overbrace{\text{Cos}\,120°}^{-0,5} = -1,9m$

$y_2 = r_2 \cdot \text{Sin}\,\theta_2 = 3,8 \cdot \underbrace{\text{Sin}\,120°}_{0,8} = 3,04m$

$(x_2;\ y_2) = (-1,9;\ 3,04)\ m$

b) $d = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$

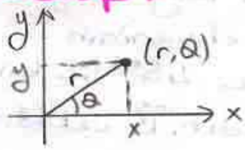
$d = \sqrt{(-1,9-2)^2 + (3,04-1,25)^2}$

$d = \sqrt{15,21 + 3,2} = \sqrt{18,41} \cong 4,3m$

3.6 - (x,y) noktasının kutupsal koordinatları (r,θ) ise aşağıdaki noktaların kutupsal koordinatları ne olur? [(x,y) noktası kartezyen koordinat sisteminde 1. çeyrektedir.]

a) $(-x, y)$
b) $(-2x, -2y)$
c) $(3x, -3y)$

Cevap:



$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\theta = \dfrac{y}{x} \rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)$

ya da

$\theta = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$

a) $(-x, y)$

$\sqrt{(-x)^2 + (y)^2} = \sqrt{x^2+y^2} = r$

$\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{-x}\right) = 180° - \theta \qquad (90° + \theta)$

2. çeyrekte

b) $(-2x, -2y)$

$\sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2} = 2\sqrt{x^2+y^2} = 2r$

$\tan^{-1}\left(\dfrac{-2y}{-2x}\right) = 180° + \theta \qquad (270° - \theta)$

3. çeyrekte

c) $(3x, -3y)$

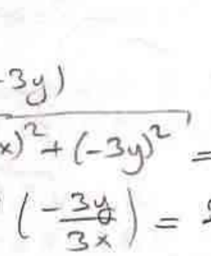
$\sqrt{(3x)^2 + (-3y)^2} = 3r$

$\tan^{-1}\left(-\dfrac{3y}{3x}\right) = 270 + \theta \qquad (360 - \theta)$

$= -\theta$

3.9 - Bir arazi mühendisi, bir nehrin genişliğini şu şekilde bulur: Karşı kıyıdaki bir ağacın tam karşısında durur ve nehir kenarı boyunca 100m yürür, sonra ağaca bakar. Esas aldığı çizgiden ağaca olan açı 35°'dir. Nehrin genişliği nedir?

Cevap:



$\sin 35° = 0,57$
$\cos 35° = 0,82$

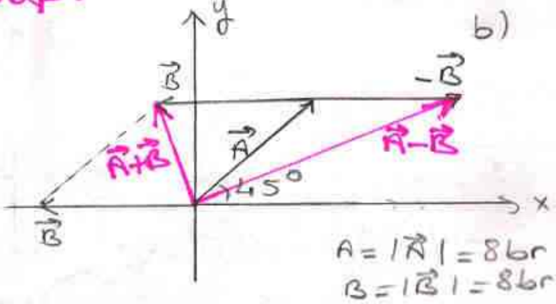
$\tan 35° = \dfrac{x}{100}$, $\tan 35° = \dfrac{0,57}{0,82} = 0,69$

$x = 100 \cdot \tan 35° = 100 \cdot 0,69 = 69m$

3.11 – $\vec{A}$ vektörünün büyüklüğü 8 birim olup, x-ekseninin pozitif yönüyle 45°'lik bir açı yapmaktadır. $\vec{B}$ vektörü de 8 birim uzunluğundadır. Fakat –x yönündedir. Grafik yöntem kullanarak,
a) $\vec{A}+\vec{B}$ toplam vektörünü,
b) $\vec{A}-\vec{B}$ vektör farkını
bulunuz.

Cevap:

a) b)



$A = |\vec{A}| = 8br$
$B = |\vec{B}| = 8br$
$\cos 45° = \sin 45° = 0{,}7$

* $\vec{A} = A_x\hat{i} + A_y\hat{j}$

$$\begin{cases} A_x = A\cdot\cos 45° = 8\cdot 0{,}7 = 5{,}6\ br \\ A_y = A\cdot\sin 45° = 8\cdot 0{,}7 = 5{,}6\ br \end{cases}$$

$\vec{A} = 5{,}6\hat{i} + 5{,}6\hat{j}$, $|\vec{A}| = \sqrt{(5{,}6)^2 + (5{,}6)^2}$
$|\vec{A}| = 8\ br.$

* $\vec{B} = B_x\hat{i} + B_y\hat{j}$

$$\begin{cases} B_x = B = 8br \\ B_y = 0\ br \end{cases}$$

$\vec{B} = -8\hat{i}$, $|\vec{B}| = \sqrt{(-8)^2} = 8\ br$

$\vec{A}+\vec{B} = (5{,}6\hat{i} + 5{,}6\hat{j}) + (-8\hat{i})$
$= (5{,}6 - 8)\hat{i} + 5{,}6\hat{j} = -2{,}4\hat{i} + 5{,}6\hat{j}$

$|\vec{A}+\vec{B}| = \sqrt{37{,}12} \cong 6{,}1\ br.$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5{,}6}{-2{,}4}\right) = -66{,}77° \cong -67°$
ya da 113°

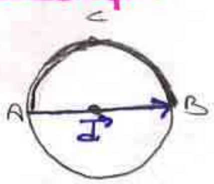
$\vec{A}-\vec{B} = (5{,}6\hat{i} + 5{,}6\hat{j}) - (-8\hat{i}) = 13{,}6\hat{i} + 5{,}6\hat{j}$

$|\vec{A}-\vec{B}| = \sqrt{216{,}32} = 14{,}7\ br.$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{5{,}6}{13{,}6}\right) \cong 22{,}3°$

3.13 – Bir kişi 5m yarıçaplı bir daire çevresinde dairenin yarısını yürümüştür.
a) Yerdeğiştirme vektörünün büyüklüğünü bulunuz.
b) Kişi ne kadar yol yürümüştür?
c) Daire çevresi tamamlanırsa yerdeğiştirmenin büyüklüğü ne olur?

Cevap:



a) $|\vec{d}| = |10\hat{i}| = 10m$ (A→B)

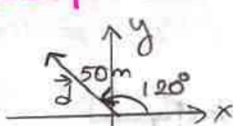
b) Yürünen yol ACB yarım dairesi çevresidir.
$C = 2\pi r$

Alınan yol $= \frac{1}{2}(2\pi r) = \pi \cdot r = 3\cdot 5$
$= 15m$
$(\pi \to 3{,}14 \to 15{,}7m)$

c) $|\vec{d}| = 0$

3.27 – xy düzleminde yer alan bir yerdeğiştirme vektörünün büyüklüğü 50m'dir ve x-ekseninin pozitif yönüyle 120°'lik bir açı yapmaktadır. Bu vektörün x ve y bileşenlerini bulunuz ve birim vektörler cinsinden ifade ediniz.

Cevap: $\cos 120° = -0{,}5$, $\sin 120° = 0{,}86$

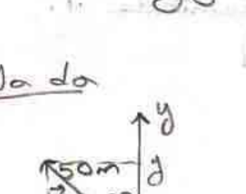


$x = d\cos\theta = 50\cdot\cos 120°$
$= 50\cdot(-0{,}5)$
$= -25m$

$y = d\sin\theta = 50\cdot\sin 120°$
$= 50\cdot(0{,}86)$
$= 43m$

$\vec{d} = x\hat{i} + y\hat{j} \to \vec{d} = (-25\hat{i} + 43\hat{j})m$

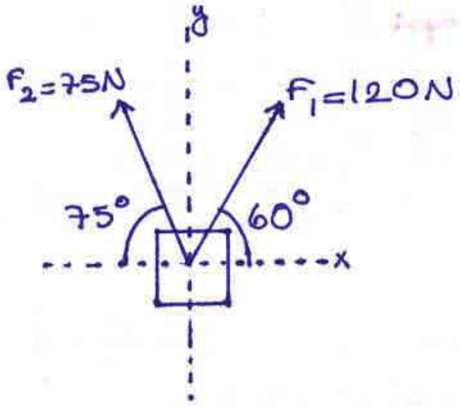
Ya da



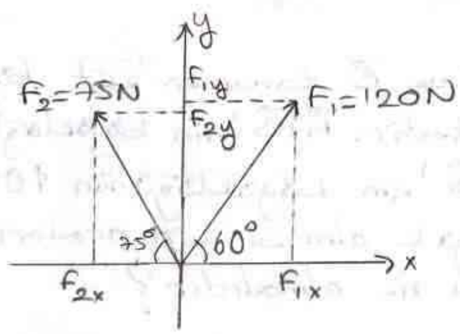
$\cos 60° = \frac{-x}{d} \to x = -d\cos 60°$ (0,5)
$x = -25m$

$\sin 60° = \frac{y}{d} \to y = d\sin 60°$
$y = 43m$

3.37 – Bir kütle şekildeki gibi iki kuvvetle çekilmektedir.
a) Görülen iki kuvvete eşdeğer olan tek kuvveti,
b) Kütlenin hareket etmemesi için uygulanması gereken kuvveti bulunuz.



Cevap: $\cos 75° = 0,25$, $\sin 75° = 0,96$
$\cos 60° = 0,5$, $\sin 60° = 0,86$



$$F_{1x} = F_1 \cdot \cos 60° = 120 \cdot 0,5 = 60\,N$$
$$F_{1y} = F_1 \cdot \sin 60° = 120 \cdot 0,86 = 103,2\,N$$
$$F_{2x} = F_2 \cdot \cos 75° = 75 \cdot 0,25 = 18,75\,N$$
$$F_{2y} = F_2 \cdot \sin 75° = 75 \cdot 0,96 = 72\,N$$

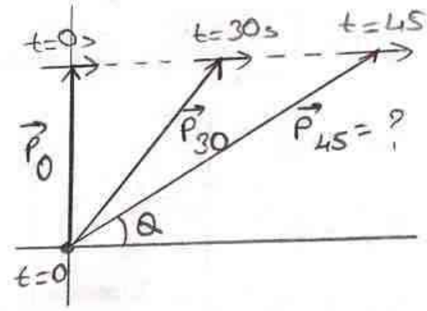
a) $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = [F_{1x}\hat{i} + F_{1y}\hat{j}] + [-F_{2x}\hat{i} + F_{2y}\hat{j}]$

$$\vec{F} = 60\hat{i} + 103,2\hat{j} - 18,75\hat{i} + 72\hat{j}$$
$$\vec{F} = (41,25\hat{i} + 178,2\hat{j})\,N$$
$$F = |\vec{F}| = \sqrt{(41,25)^2 + (178,2)^2} = 182,9 \cong 183\,N$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{F_y}{F_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{178,2}{41,25}\right) = 85,5°$$

b) $\vec{F_3} = -\vec{F} = -(41,25\hat{i} + 178,2\hat{j})$
$= (-41,25\hat{i} - 178,2\hat{j})\,N$

3.40 – Yerde bir koordinat sisteminin orjininde oturuyorsunuz ve üzerinizden x-eksenine paralel olarak $7,6.10^3\,m$ yükseklikten bir uçak sabit bir hızla uçuyor. $t=0$ anında uçak tam tepenizde ve sizden uçağa olan vektör $\vec{P_0} = (7,6.10^3 m)\hat{j}$ olarak veriliyor. $t=30$ s'de sizden uçağa doğru olan konum vektörü $\vec{P_{30}} = (8,04.10^3 m)\hat{i} + (7,6.10^3 m)\hat{j}$ dir. $t=45$ s'de uçağın konum vektörünün büyüklüğü ve yönü nedir?

Cevap:



Uçağın y-koordinatı sabit ve $7,6.10^3\,m$'dir.
x-koordinatı $x = \vartheta_i \cdot t$ ile verilir.
$\vartheta_i \rightarrow$ yatay doğrultuda ve sabit bir hız

$t=30$ s için $x = 8,04.10^3\,m \Rightarrow x = \vartheta_i \cdot t$
$8,04.10^3 = \vartheta_i \cdot 30$
$\vartheta_i = 268\,m/s$

$t=45$ s'de $\rightarrow x = \vartheta_i \cdot t = 268 \cdot 45 = 12060 = 1,21.10^4\,m$

$$\vec{P_{45}} = (1,21.10^4\,\hat{i} + 7,6.10^3\,\hat{j})\,m$$
$$|\vec{P_{45}}| = \sqrt{(1,21.10^4)^2 + (7,6.10^3)^2} = 1,43.10^4\,m$$
$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{7,6.10^3}{1,21.10^4}\right) = 32,2°$$

3.42 – $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ vektörlerinin büyüklükleri eşit olup, 5 birimdir. $\vec{A}$ ve $\vec{B}$'nin toplamı olan vektör $6\hat{j}$ ise, $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ arasındaki açıyı bulunuz.

Cevap: $|\vec{A}|=|\vec{B}|=5$ br.

$\vec{A}=A_x\hat{i}+A_y\hat{j}$, $\vec{B}=B_x\hat{i}+B_y\hat{j}$

✓ $\vec{A}+\vec{B}=6\hat{j}$

$$\underbrace{(A_x+B_x)}_{0}\hat{i}+\underbrace{(A_y+B_y)}_{6}\hat{j}=0.\hat{i}+6.\hat{j}$$

$A_x+B_x=0 \rightarrow A_x=-B_x \ldots (1)$

$A_y+B_y=6 \ldots (2)$

✓ $|\vec{A}|=|\vec{B}|=5$ birim

$\sqrt{A_x^2+A_y^2}=\sqrt{B_x^2+B_y^2}=5$

$A_x^2+A_y^2=B_x^2+B_y^2=25$

$A_x^2+A_y^2=B_x^2+B_y^2$

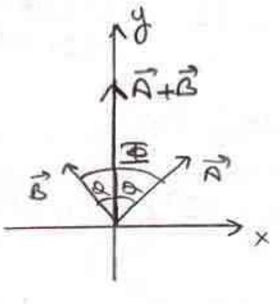
(1)'den $\rightarrow A_x=-B_x \rightarrow A_x^2=B_x^2$

$\cancel{B_x^2}+A_y^2=\cancel{B_x^2}+B_y^2$

$\rightarrow A_y^2=B_y^2 \rightarrow \boxed{A_y=B_y}$

$A_y=B_y$'i (2)'de yerine yazarız.

$B_y+B_y=6 \rightarrow 2B_y=6 \rightarrow \boxed{A_y=B_y=3\text{br}}$



$\cos\theta=\frac{A_y}{A}=\frac{B_y}{B}=\frac{3}{5}=0,6$

$\theta=\cos^{-1}(0,6)\cong 53^\circ$

$\Phi=2\theta=106^\circ$

3.45 – $\vec{A}=(3\hat{i}-4\hat{j}+4\hat{k})$m ve $\vec{B}(2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k})$m yerdeğiştirme vektörleri verildiğine göre, herbirini dik bileşenleri cinsinden ifade ederek, a) $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}$ ve b) $\vec{D}=2\vec{A}-\vec{B}$ vektörlerinin büyüklüklerini bulunuz.

Cevap: $\vec{A}=3\hat{i}-4\hat{j}+4\hat{k}$

$\vec{B}=2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k}$

a) $\vec{C}=\vec{A}+\vec{B}=5\hat{i}-\hat{j}-3\hat{k}$

$|\vec{C}|=\sqrt{(5)^2+(-1)^2+(-3)^2}=\sqrt{25+1+9}=\sqrt{35}$
$=5,92$m

b) $\vec{D}=2\vec{A}-\vec{B}=2(3\hat{i}-4\hat{j}+4\hat{k})-(2\hat{i}+3\hat{j}-7\hat{k})$

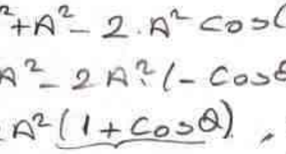
$\vec{D}=4\hat{i}-11\hat{j}+15\hat{k}$

$|\vec{D}|=\sqrt{(4)^2+(-11)^2+(15)^2}=\sqrt{16+121+225}$
$=\sqrt{362}\cong 19$m

3.53 – $\vec{A}$ ve $\vec{B}$ tamamen eşit büyüklüktedir. $\vec{A}+\vec{B}$'nin büyüklüğünün $\vec{A}-\vec{B}$'nin büyüklüğünün 100 kez büyük olması için aralarındaki açı ne olmalıdır?

Cevap:

*



İkizkenar üçgen oluştururlar. $|\vec{A}|=|\vec{B}|=A$ diyelim.

Cos. Teoreminden

$R^2=A^2+B^2-2.\vec{A}.\vec{B}.\cos\theta$ idi.

$R^2=A^2+A^2-2.A^2\cos(180-\theta)$ ⊛

$R^2=2A^2-2A^2(-\cos\theta)$

$R^2=2A^2(1+\cos\theta)$, $\cos^2x=\frac{1+\cos 2x}{2}$

$(1+\cos 2x)=2\cos^2\theta$

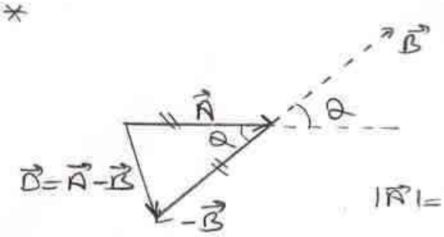
$R^2=2A^2(2.\cos^2\frac{\theta}{2})$

$R^2=4A^2\cos^2\frac{\theta}{2} \rightarrow \boxed{R=2A.\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

⊛ $\cos(\theta\mp\phi)=\cos\theta\cos\phi\mp\sin\theta\sin\phi$

$\cos(180-\theta)=\underbrace{\cos 180^\circ}_{-1}.\cos\theta-\underbrace{\sin 180^\circ}_{0}.\sin\theta=-\cos\theta$

*



$|\vec A| = |\vec B| = 5$ br.

Cos. Teoreminden,

$D^2 = A^2 + B^2 - 2\vec A\,\vec B\cos\theta$

$D^2 = A^2 + A^2 - 2A^2\cos\theta$

$D^2 = 2A^2 - 2A^2\cos\theta$

$D^2 = 2A^2(1-\cos\theta)$

$(1-\cos\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$D^2 = 2A^2 \cdot 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$D^2 = 4A^2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \to \boxed{D = 2A\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$

$R = 100 \cdot D$ olması isteniyor.

$\cancel{2A}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 100 \cdot \cancel{2A}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$

$\frac{1}{100} = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$

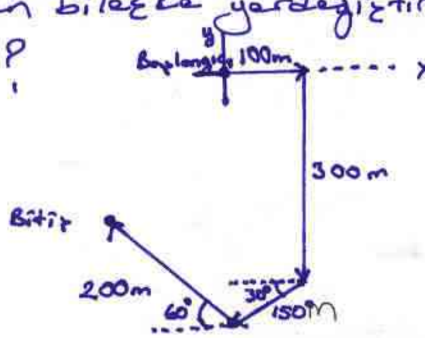
$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0{,}01$

$\frac{\theta}{2} = \tan^{-1}(0{,}01)$

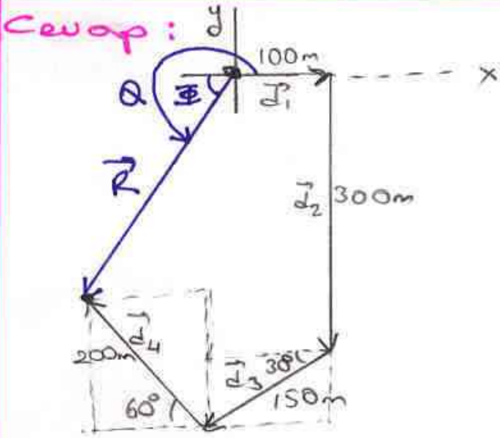
$\theta = 2 \cdot \tan^{-1}(0{,}01)$

$\theta = 2 \cdot (0{,}57) \to \boxed{\theta = 1{,}14^\circ}$

3.57 – Yürüyüşe çıkan bir kişi şekildeki yolu takip etmektedir. Toplam yürüyüş dört tane doğrusal yoldan ibarettir. Yürüyüşün sonunda, kişinin başlangıç noktasından itibaren ölçülen bileşke yerdeğiştirmesi nedir?



Cevap:



$\vec d_1 = 100\hat i$

$\vec d_2 = -300\hat j$

$\vec d_3 = -150\cdot\underbrace{\cos 30^\circ}_{0{,}86}\hat i - 150\cdot\underbrace{\sin 30^\circ}_{0{,}5}\hat j = -130\hat i - 75\hat j$

$\vec d_4 = -200\cdot\underbrace{\cos 60^\circ}_{0{,}5}\hat i + 200\cdot\underbrace{\sin 60^\circ}_{0{,}86}\hat j = -100\hat i + 172\hat j$

$\vec R = \vec d_1 + \vec d_2 + \vec d_3 + \vec d_4$

$= 100\hat i - 300\hat j - 130\hat i - 75\hat j - 100\hat i + 172\hat j$

$= (100 - 130 - 100)\hat i + (-300 - 75 + 172)\hat j$

$\vec R = -130\hat i - 203\hat j$

$|\vec R| = \sqrt{(-130)^2 + (-203)^2} = 241\,m$

$\Phi = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{-203}{-130}\right) = 57^\circ$

$\theta = 180 + \Phi = 180^\circ + 57^\circ = 237^\circ$