1) Bir metalin iletkenlik elektronları, metalin "iç potansiyeli" adı verilen bir potansiyel yardımı ile metalde tutulmaktadır. Metalin iç potansiyelinin;

$$V(x) = \begin{cases} -V_0, & x<0 \\ 0, & x>0 \end{cases}$$

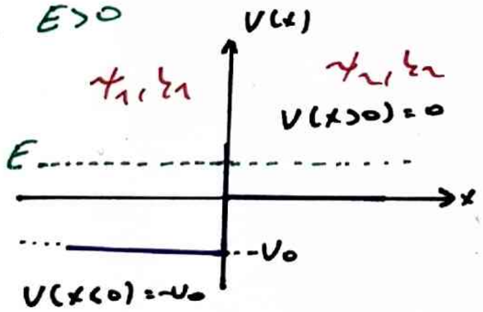
olduğunu varsayarak herbiri E enerjili iletkenlik elektronlarının yüzeyden yansıma ve geçme olasılıklarını;

a) $E>0$

b) $-V_0<E<0$ iken bulunuz.

c) $-V_0<E<0$ halinde, elektronların $x>0$ bölgesinde bulunma olasılığı nedir?

a: $E>0$



$\psi(x<0) \Rightarrow \psi_1(x,t)$:

$$\psi_1 = A e^{i(k_1x-\omega t)} + B e^{-i(k_1 x-\omega t)}$$

$\psi(x>0) \Rightarrow \psi_2(x,t)$:

$$\psi_2 = C e^{i(k_2x-\omega t)} + D e^{-i(k_2 x-\omega t)}$$

$$\psi_1(x,t) = \psi_1(x) e^{-iEt/\hbar} \Rightarrow \psi_1(x) = A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x} \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x,t) = \psi_2(x) e^{-iEt/\hbar} \Rightarrow \psi_2(x) = C e^{ik_2x} + D e^{-ik_2x} \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

Süreklilik şartından;

- $\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \Rightarrow Ae^0 + Be^0 = Ce^0 + \cancel{D}e^0$

$\cancel{D}=0$ 'dır. Çünkü $x>0$ için yansıma olasılığı yoktur.

$$\boxed{A+B=C}$$

- $\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \Rightarrow A ik_1 e^{ik_1 0} - B ik_1 e^{-ik_1 0} = ik_2 C e^0$

$$k_1(A-B) = k_2 C \Rightarrow \boxed{A-B = \frac{k_2}{k_1} C}$$

Arş. Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr

- $A+B = C$, $A-B = \frac{k_2}{k_1} C \Rightarrow 2A = C\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right) \Rightarrow C = \left(\frac{2k_1}{k_1+k_2}\right) A$ //

- $A-B = \frac{k_2}{k_1} C \Rightarrow A-B = \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{2k_1}{k_1+k_2}\right) A \Rightarrow B = \left(\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right) A$ //

- $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$ Yansıma olasılığı;

$$R = \frac{\left|\frac{k_1-k_2}{k_1+k_2}\right|^2 \cancel{|A|^2}}{\cancel{|A|^2}} = \frac{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2}{k_1^2+k_2^2+2k_1k_2}, \quad k_1 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}, \quad k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

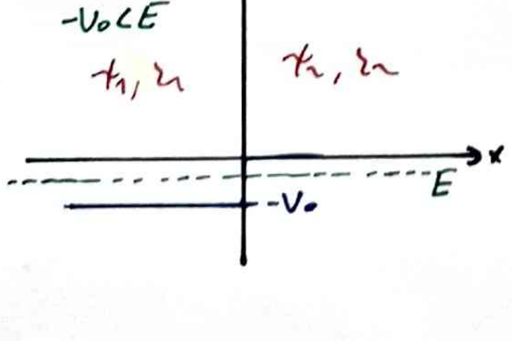
$$R = \frac{2m(E+V_0) + 2mE - 4m\sqrt{E(E+V_0)}}{2m(E+V_0) + 2mE + 4m\sqrt{E(E+V_0)}} = \frac{(2E+V_0)^2 - 2\sqrt{E(E+V_0)}}{\left[(2E+V_0)+2\sqrt{E(E+V_0)}\right]^2}$$

$$R = \frac{V_0^2}{\left[\sqrt{E+V_0}+\sqrt{E}\right]^2} \text{ //}, \quad T+R=1$$

- $T = \frac{k_2}{k_1}\left|\frac{C}{A}\right|^2$ geçiş olasılığı;

$$T = \frac{4\sqrt{E(E+V_0)}}{\left(\sqrt{E+V_0}+\sqrt{E}\right)^2} \text{ //}$$

6: $E<0$, $-V_0<E$



$\psi_1(x<0) = A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x}$

$k_1 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar} \in R$

$\psi_2(x>0) = C e^{ik_2x}$

$k_2 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = \frac{-i\sqrt{2m|E|}}{\hbar} \notin R$

Arş. Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr

$\Rightarrow$ $x=0$'da süreklilik şartından;

$$\psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \Rightarrow Ae^0 + Be^0 = Ce^0 \Rightarrow \boxed{A+B=C}$$

$$\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \Rightarrow A i k_1 e^0 - B i k_1 e^0 = \frac{i\sqrt{2m|E|}}{\hbar} e^0 C$$

$$\boxed{A-B = \frac{i\sqrt{2m|E|}}{\hbar k_1}}$$

- $$B = \frac{k_1 - i\frac{\sqrt{2Em}}{\hbar}}{k_1 + i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}} A, \qquad C = \frac{2k_1}{k_1 + i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}} A$$

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \left| \frac{k_1 - i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}}{k_1 + i\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}} \right|^2 = 1, \qquad T+R=1 \Rightarrow T=0$$

c) $$\psi_2 = Ce^{ik_2x}, \quad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}, \quad k_2 = -i\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}$$

$$|\psi_2|^2 = P(x>0)$$

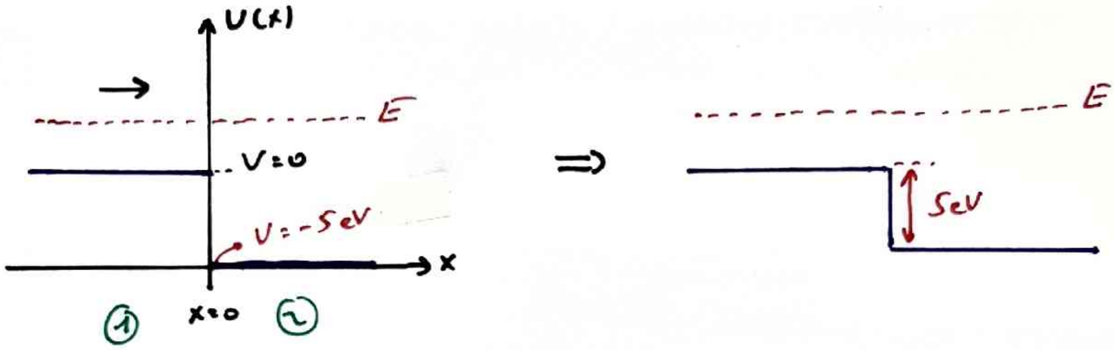
$$P(x>0) = |C|^2 \left| e^{-\frac{\sqrt{2m|E|}}{\hbar}x} \right|^2 = C^2 e^{-2\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}x} \neq 0$$

Bu sonuç, klasik teorinin aksine, enerjisi metalin iş potansiyelinden küçük olan elektronun $x>0$ bölgesinde bulunma olasılığının sıfırdan farklı olduğunu ve yüzeyden itibaren üstel olarak azaldığını ifade eder.

Arş. Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr

2) Na metalinin düşük enerjili elektronları için yansıma katsayısını, enerjinin bir fonksiyonu olarak hesaplayınız.

Düşük enerjili elektronlar için metal yüzeyindeki potansiyel engeli bir basamak şeklinde düşünülebilir. Metal içindeki bir elektronun potansiyel enerjisi -5 eV olduğunu varsayıp metalin bu elektronlar için kırılma indisini bulunuz.



$E > V$

$$\psi_1(x) = A e^{ik_1x} + B e^{-ik_1x}, \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2mE_0}}{\hbar}$$

$$\psi_2(x) = C e^{ik_2x} + \cancel{D e^{-ik_2x}}_{\,0}, \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E+V_0)}}{\hbar}$$

$$\Rightarrow \quad \psi_1(x=0) = \psi_2(x=0) \Rightarrow A e^0 + B e^0 = C e^0 \Rightarrow A + B = C$$

$$\left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} = \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{x=0} \Rightarrow A\, ik_1 e^0 - ik_1 B e^0 = ik_2 C e^0 \Rightarrow A - B = \left(\frac{k_2}{k_1}\right) C$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{k_2}{k_1}\right) C = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1 + k_2}{k_1}\right) C$$

$$T = \frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2}$$

$$B = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k_2}{k_1}\right) C = \frac{1}{2}\left(\frac{k_1 - k_2}{k_1}\right) C$$

$$\Rightarrow T = \frac{(k_1 - k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1k_2}{k_1^2 + k_2^2 + 2k_1k_2} = \frac{\cancel{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}}\left[\sqrt{E_0} - \sqrt{E_0 + V}\right]^2}{\cancel{\frac{\sqrt{2m}}{\hbar}}\left[\sqrt{E_0} + \sqrt{E_0 + V}\right]^2}$$

Arş. Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr

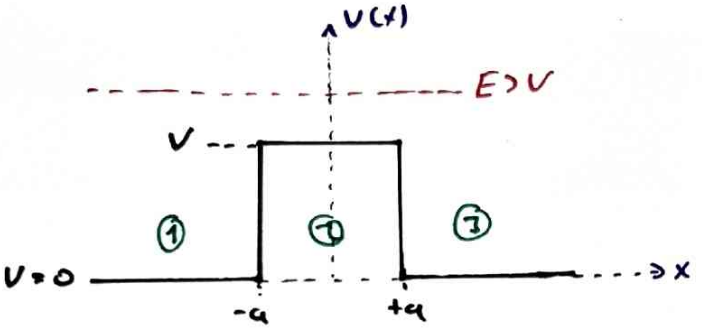
$$T = \left(\frac{\sqrt{E_0} - \sqrt{E_0 + V_0}}{\sqrt{E_0} + \sqrt{E_0 + V_0}} \right)^2 \,//$$

- $n = \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}$, $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

$$\Rightarrow \quad n = \frac{\frac{2\pi}{k_1}}{\frac{2\pi}{k_2}} = \frac{k_2}{k_1} = \frac{\sqrt{E+V_0}\ \cancel{\frac{2\pi}{h}}}{\sqrt{E}\ \cancel{\frac{2\pi}{h}}} = \sqrt{\frac{E+V_0}{E}} \,//$$

Arş. Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr

3) Dikdörtgen bir potansiyel engeline soldan gelen bir parçacık demetinin engeli geçiş katsayısını bulunuz. (Demetteki parçacıkların % kaçı engeli aşacak veya bir parçacık geliyorsa engeli aşma ihtimali nedir?



$$\hat{H}\psi_n = E_n \psi_n$$

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right]\psi = E\psi$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

$E>V \Rightarrow$

1. Bölge için; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} + \underbrace{V(x)}_{0}\psi_1 = E\psi_1 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x^2} = E\psi_1$

2. Bölge için; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} + \underbrace{V(x)}_{V}\psi_2 = E\psi_2 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_2}{\partial x^2} = (E-V)\psi_2$

3. Bölge için; $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} + \underbrace{V(x)}_{0}\psi_3 = E\psi_3 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_3}{\partial x^2} = E\psi_3$

$$\Rightarrow \psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \qquad k_1 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k_3$$

$$\psi_2(x) = Ce^{ik_2x} + De^{-ik_2x} \qquad k_2 = \frac{\sqrt{2m(E-V)}}{\hbar}$$

$$\psi_3(x) = Fe^{ik_3x} + \underbrace{G}_{0}e^{-ik_3x} \qquad k_3 = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} = k_1$$

$\Rightarrow \quad \bullet \ \psi_1(x=-a) = \psi_2(x=-a)$

$$Ae^{-ik_1a} + Be^{+ik_1a} = Ce^{-ik_2a} + De^{+ik_2a} \quad ①$$

$$\bullet \ \left.\frac{\partial\psi_1}{\partial x}\right|_{x=-a} = \left.\frac{\partial\psi_2}{\partial x}\right|_{x=-a}$$

$$ik_1\left(Ae^{-ik_1a} - Be^{+ik_1a}\right) = ik_2\left(Ce^{-ik_2a} - De^{+ik_2a}\right) \quad ②$$

Arş. Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr

- $\psi_2(x=a) = \psi_3(x=a)$

$$C e^{-ik_2 a} + D e^{-ik_2 a} = F e^{ik_3 a} = F e^{ik_1 a} \quad (3)$$

- $\left.\dfrac{\partial \psi_2}{\partial x}\right|_{x=a} = \left.\dfrac{\partial \psi_3}{\partial x}\right|_{x=a}$

$$ik_2\left(C e^{ik_2 a} - D e^{-ik_2 a}\right) = ik_3 F e^{ik_3 a} = ik_1 e^{ik_1 a} \quad (4)$$

$$T = \frac{|F|^2}{|A|^2}, \qquad \frac{1}{T} = \frac{|A|^2}{|F|^2}$$

$$(3)+(4) \Rightarrow \quad C = \frac{F}{2}\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right) e^{i(k_1-k_2)a}$$

$$(3)-(4) \Rightarrow \quad D = \frac{F}{2}\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right) e^{i(k_1+k_2)a}$$

$$(1)+(2) \Rightarrow \quad A = \frac{C}{2}\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right) e^{-i(k_2-k_1)a} + \frac{D}{2}\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right) e^{i(k_1+k_2)a}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow \quad B = \frac{C}{2}\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right) e^{-i(k_1+k_2)a} + \frac{D}{2}\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right) e^{-i(k_1-k_2)a}$$

C ve D'yi yerine yazarsak;

$$A = \frac{F}{4}\left[\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)\left(1+\frac{k_2}{k_1}\right) e^{2i(k_1-k_2)a} + \left(1-\frac{k_1}{k_2}\right)\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right) e^{2i(k_1+k_2)a}\right]$$

$$B = \frac{F}{4}\left[\left(1+\frac{k_1}{k_2}\right)\left(1-\frac{k_2}{k_1}\right) e^{-2ik_2 a} + \left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)\left(1-\frac{k_1}{k_2}\right) e^{2ik_2 a}\right]$$

$$A = \frac{F}{4}\left[\left(2+\frac{k_1}{k_2}+\frac{k_2}{k_1}\right) e^{-2ik_2 a} + \left(2-\frac{k_1}{k_2}-\frac{k_2}{k_1}\right) e^{2ik_2 a}\right] e^{2ik_1 a}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$$

Arş. Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr

$$A = F\left[\cos 2k_2 a - \frac{i}{2}\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right)\sin 2k_2 a\right]e^{2ik_1 a}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} = \left|\frac{A}{F}\right|^2 = \cos^2 2k_2 a + \frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right)^2 \sin^2 2k_2 a$$

$$\frac{1}{T} = 1 - \sin^2 2k_2 a + \frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2} + \frac{k_2}{k_1}\right)^2 \sin^2 2k_2 a$$

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1}\right)^2 \sin^2 2k_2 a$$

$$\frac{k_1}{k_2} - \frac{k_2}{k_1} = \frac{k_1^2 - k_2^2}{k_1 k_2} = \frac{\cancel{\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)} V}{\cancel{\frac{2m}{\hbar^2}}\sqrt{E}\sqrt{E-V}} = \frac{V}{\sqrt{E(E-V)}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{T} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{V}{\sqrt{E(E-V)}}\right)^2 \sin^2 2k_2 a$$

$$\frac{1}{T} = 1 + \frac{V^2}{4E(E-V)}\sin^2 2k_2 a \;//$$

Arş. Gör. Çağlar Çetinkaya
caglarcetinkaya@istanbul.edu.tr