T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KARANLIK MADDE VE KARANLIK ENERJİ ETKİLEŞİMLERİNİN İNCELENMESİ

Hatice BAŞER

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ekrem AYDINER

Temmuz, 2024

İSTANBUL

Bu çalışma 23.07.2024 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Ekrem AYDINER (Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Mustafa SARISAMAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Dr. Öğr. Üyesi. Özgür SEVİNÇ
Yeni Yüzyıl Üniversitesi
Mimarlık ve Mühendislik Fakültesi

- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Öncelikle bilgi ve deneyimleri ile bize yol gösteren, tez çalışmamın planlanmasında ve yürütülmesinde çok değerli katkıları bulunan danışman hocam sayın Prof. Dr. Ekrem AYDINER' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışması boyunca bilimsel katkıları ile desteklerini esirgemeyen, çalışmamla ilgili her konuda yardımcı olan Dr. Erkan YILMAZ ve Dr. Özgür ÖKÇÜ' ye teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca çalışmam boyunca anlayışları için iş arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Akademik kariyerimi tamamlamam için her zaman beni destekleyen ve bunun için birçok fedakarlık gösteren canım anneme minettarım. Tez yazımı sürecinde desteğini her zaman yanımda hissettiğim sevgili eşime ve sabrı için canım oğluma minnettarım.

Temmuz, 2024 Hatice BAŞER

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ ..... **iv**
İÇİNDEKİLER ..... **vi**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **viii**
TABLO LİSTESİ ..... **ix**
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ ..... **xi**
ÖZET ..... **xii**
SUMMARY ..... **xiii**
1. GİRİŞ **1**
2. GENEL KISIMLAR **3**
2.1. KOZMOLOJİNİN TEMELLERİ 3
2.1.1. Homojenlik ve İzotropi: FLRW Metriği 4
2.1.2. Friedman Denklemleri 5
2.1.3. Evrenin Gözlemlenebilir Parametreleri 7
2.1.4. Friedman Denklemlerinin Çözümü 8
2.2. KARANLIK MADDE VE KARANLIK ENERJİ 10
2.2.1. Karanlık Madde 10
2.2.2. Karanlık Maddeye İlişkin Gözlemsel Kanıtlar 11
2.2.3. Karanlık Enerji 12
2.2.4. Alternatif Karanlık Enerji Modelleri 13
2.3. KARANLIK MADDE VE KARANLIK ENERJİ ETKİLEŞİMİ 17
2.3.1. Etkileşimli Karanlık Madde ve Karanlık Enerji Modelleri 17
2.4. KARANLIK SEKTÖR ETKİLEŞİMİNE YENİ YAKLAŞIM 20
2.4.1. Kaotik Evren Modeli 20
2.4.2. Karanlık Madde ve Karanlık Enerji Arasındaki Kaotik Etkileşimler 23
2.4.3. Tip-I etkileşim denklemi: 26
2.4.4. Tip-II etkileşim denklemi: 27
2.4.5. Tip-III etkileşim denklemi: 28

2.5. KAOS FİZİĞİ 28
2.5.1. Kaos Fiziğinin Felsefesi ve Tarihçesi 29
2.5.2. Kaosun Temel Kavramları 30
3. MALZEME VE YÖNTEM 35
3.1. MODİFİYE ETKİLEŞİM DENKLEMİ 35
3.2. KAOTİK ZAMAN SERİLERİ ANALİZİ 35
4. BULGULAR 41
4.1. MODİFİYE ETKİLEŞİM DENKLEMİNİN ANALİZİ 41
4.2. SABİT NOKTALARIN HESAPLANMASI 41
4.3. ETKİLEŞİM DENKLEMLERİNİN KAOS ANALİZİ 43
4.3.1. Denklemlerden Zaman Serilerinin Elde Edilmesi 43
4.3.2. Zaman Serilerinin Faz Uzayında Gösterilmesi 43
4.3.3. Zaman Gecikmeli Koordinat Sisteminde Faz Uzayının Yeniden İnşası 45
4.3.4. Lyapunov Üstelinin Hesaplanması 50
4.3.5. Farklı Başlangıç Durumu İçin Çözümler 51
5. TARTIŞMA VE SONUÇ 59
KAYNAKLAR 61
ÖZGEÇMİŞ 65

ŞEKİL LİSTESİ

Page No

Şekil 2.1: Karanlık madde ve karanlık enerji arasındaki öz etkileşimi içeren yeni etkileşim şeması 23

Şekil 2.2: Lorenz çekicisi 31

Şekil 2.3: Fraktal şekiller 32

Şekil 2.4: Julia kümesi 33

Şekil 2.5: Mandelbrot kümesi 34

Şekil 4.1: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen x_1 zaman serisi grafiği. 44

Şekil 4.2: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen x_2 zaman serisi grafiği. 44

Şekil 4.3: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen x_3 zaman serisi grafiği. 45

Şekil 4.4: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen zaman serileri x_1, x_2 ve x_3' ün faz uzayı grafiği.(q=15,2)..... 46

Şekil 4.5: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen zaman serileri x_1 ve x_2'nin birbirlerine karşı faz uzayı grafiği. (q=15,2) 46

Şekil 4.6: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen zaman serileri x_1 ve x_3'ün birbirlerine karşı faz uzayı grafiği. (q=15,2) 47

Şekil 4.7: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen zaman serileri x_2 ve x_3' ün birbirlerine karşı faz uzayı grafiği. (q=15,2) 47

Şekil 4.8: x_1 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için yeniden yapılandırılan faz uzayı grafikleri. *Sol:* $x_1(t) - x_1(t+9)$ *grafiği, Sağ:* $x_1(t) - x_1(t+18)$ *grafiği.* 48

Şekil 4.9: x_2 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için yeniden yapılandırılan faz uzayı grafikleri. *Sol:* $x_2(t) - x_2(t+3)$ *grafiği, Sağ:* $x_2(t) - x_2(t+6)$ *grafiği.* 49

Şekil 4.10: x_3 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için yeniden yapılandırılan faz uzayı grafikleri. *Sol:* $x_3(t) - x_3(t+7)$ *grafiği, Sağ:* $x_3(t) - x_3(t+14)$ *grafiği.* 49

Şekil 4.11: x_1 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için en büyük Lyapunov üsteli grafiği.(q=15,2) 51

Şekil 4.12: x_2 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için en büyük Lyapunov üsteli grafiği.(q=15,2) 52

Şekil 4.13: x_3 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için en büyük Lyapunov üsteli grafiği.(q=15,2) 52

Şekil 4.14: Sol: (4.1) denkleminin farklı başlangıç koşullarında numerik çözümü ile elde edilen x_1 zaman serisi. Sağ: (4.1) denkleminin farklı başlangıç koşullarında numerik çözümü ile elde edilen x_2 zaman serisi (q=5). 53

Şekil 4.15: Sol: (4.1) denkleminin farklı başlangıç koşullarında nümerik çözümü ile elde edilen x_3 zaman serisi. Sağ: x_1 ve x_2 zaman serilerinin birbirlerine karşı faz uzayı grafiği (q=5). ... 53

Şekil 4.16: Sol: x_1 ve x_3 zaman serilerinin birbirlerine karşı faz uzayı grafiği (q=5). Sağ: x_2 ve x_3 zaman serilerinin birbirlerine karşı faz uzayı grafiği (q=5). 53

Şekil 4.17: Farklı başlangıç koşulları için x_1, x_2 ve x_3 zaman serilerinin üç boyutlu faz uzayı grafiği. (q=5) 54

Şekil 4.18: x_1 zaman serisinin faz uzayında yeniden yapılandırma grafikleri. ($\tau = 8$ ve $m = 3$) *Sol:* $x_1(t) - x_1(t+8)$,*Sağ:* $x_1(t) - x_1(t+16)$ *grafiği.*..... 55

Şekil 4.19: x_2 zaman serisinin faz uzayında yeniden yapılandırma grafikleri. ($\tau = 7$ ve $m = 3$) *Sol:* $x_2(t) - x_2(t+7)$,*Sağ:* $x_2(t) - x_2(t+14)$ *grafiği.*..... 55

Şekil 4.20: x_3 zaman serisinin faz uzayında yeniden yapılandırma grafikleri. ($\tau = 6$ ve $m = 3$) *Sol:* $x_3(t) - x_3(t+6)$,*Sağ:* $x_3(t) - x_3(t+12)$ *grafiği.*..... 56

Şekil 4.21: x_1 zaman serisinin farklı başlangıç koşulları ve $\tau = 8$, $m = 3$ için en büyük Lyapunov üsteli grafiği (q=5). 56

Şekil 4.22: x_2 zaman serisinin farklı başlangıç koşulları ve $\tau = 7$, $m = 3$ için en büyük Lyapunov üstelleri grafiği (q=5). 57

TABLO LİSTESİ

Page No

Tablo 2.1: Evrenin k uzay-zaman eğriliği sabitine göre durumları. 8

Tablo 2.2: Evreni oluşturan bileşenler ve yüzdeleri. 10

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler **Açıklama**

a : Ölçek Faktörü
k : Uzay-Zaman Eğriliği Sabiti
K : Kretschmann Eğrilik Skaleri
$R^{\mu\nu\alpha\beta}$: Riemann Tensörü
R : Ricci Skaleri
$R_{\mu\nu}$: Ricci Tensörü
$T^{\mu\nu}$: Enerji-Momentum Tensörü
ρ : Enerji Yoğunluğu
ρ_c : Kritik Yoğunluk
p : Basınç
w : Hal Denklemi Parametresi
w_{eff} : Etkin Hal Denklemi Parametresi
H : Hubble Parametresi
H_0 : Hubble Sabiti
Ω : Yoğunluk Parametresi
q : Yavaşlama Parametresi
Λ : Kozmolojik Sabit
$V(r)$: Çizgisel Hız
S : Eylem
ϕ : Skaler Alan
σ : Kanonik Olmayan Skaler Alan
L : Lagrangian Terimi
Q : Etkileşim Parametresi
R_E : Olay Ufku Yarıçapı
Γ : Enerji Aktarım Hızı
dU : Enerji Değişimi
δQ : Isı Değişimi
δV : Hacim Değişimi
μ : Kimyasal Potansiyel

δN : Parçacık Değişimi

q : Kontrol Parametresi

λ_{max} : Maksimum Lyapunov Üsteli

τ : Gecikme Süresi

m : Gömme Boyutu

$I(\tau)$: Karşılıklı Bilgi

γ : Etkileşim Sabiti

$r_{1,2}$: Etkileşim Oranı Parametreleri

Kısaltmalar **Açıklama**

BP : Büyük Patlama

CMB : Kozmik Mikrodalga Arka Planı

FLRW : Friedman-Lemaître-Robertson-Walker

GCG : Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı

GEK : Güçlü Enerji Koşulu

GG : Genel Görelilik

HKE : Holografik Karanlık Enerji

KE : Karanlık Enerji

KM : Karanlık Madde

KSP : Kozmolojik Sabit Problemi

LLE : En Büyük Lyapunov Üsteli

Λ***CDM*** : Λ Soğuk Karanlık Madde

MCG : Modifiye Chaplygin Gazı

WMAP : Wilkinson Mikrodalga Anizotropi Probu

ÖZET

YÜKSEK LİSANS TEZİ

KARANLIK MADDE VE KARANLIK ENERJİ ETKİLEŞİMLERİNİN İNCELENMESİ

Hatice BAŞER

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem AYDINER

Bu tez çalışmasında, karanlık madde ve karanlık enerji arasındaki etkileşimin dinamiği analiz edilmiştir. Tezin genel kısımlarında, öncelikle kozmolojideki temel kavramlar, karanlık enerji ve karanlık madde hakkında kısaca bilgi verilmiş ve karanlık sektör arasındaki etkileşim modelleri incelenmiştir. Malzeme ve yöntem kısmında, Aydıner tarafından önerilen karanlık madde ve karanlık enerji etkileşim denklemleri modifiye edilerek yeni bir etkileşim denklemi elde edilmiştir. Elde edilen bu modifiye denklemde karanlık madde ve karanlık enerji, etkileşimli termodinamik sistemler olarak ele alınmıştır. Modifiye etkileşim denklemi Matlab uygulamasıyla numerik olarak çözülerek zaman serileri ve faz uzayları elde edilmiş ve denklemin kaos analizleri yapılmıştır. Bulgular kısmında, modifiye denklemin kararlılık analizleri yapılarak sabit noktalar hesaplanmış ve Jacobian matrisi çözümleriyle sabit noktaların kararlılığı incelenmiştir. Modifiye denklemde karanlık bileşenleri temsil eden değişkenlerin zamanla değişen dinamikleri zaman serileriyle gözlemlenmiştir. Zaman serilerinin yeniden yapılandırılan faz uzayı grafikleri çizilmiş ve en büyük Lyapunov üstel değerleri hesaplanmıştır. Elde edilen sonuçlar, karanlık madde ile karanlık enerji arasındaki etkileşimin kaotik olduğunu göstermiştir.

Temmuz 2024, 78 sayfa.

Anahtar kelimeler: Kozmoloji, Karanlık Madde, Karanlık Enerji, Etkileşim, Kaos

SUMMARY

M.Sc. THESIS

INVESTIGATION OF THE DARK MATTER AND DARK ENERGY INTERACTIONS

Hatice BAŞER

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem AYDINER

In this thesis study, the dynamics of the interaction between dark matter and dark energy have been analyzed. In the general sections of the thesis, fundamental concepts in cosmology, as well as brief information about dark energy and dark matter, were provided, and models of interaction between dark sectors were examined. In the Materials and Methods section, the interaction equations proposed by Aydıner for dark matter and dark energy were modified to obtain a new interaction equation. In this modified equation, dark matter and dark energy are considered as interacting thermodynamic systems. The modified interaction equation was numerically solved using Matlab application, resulting in time series and phase space diagrams, and chaos analyses of the equation were performed. In the Results section, stability analyses of the modified equation were conducted, with fixed points being calculated and the stability of these fixed points being examined using Jacobian matrix solutions. The time-dependent dynamics of the variables representing dark components in the modified equation were observed through time series. The reconstructed phase space graphs of the time series were drawn and the largest Lyapunov exponential values were calculated. The results obtained indicate that the interaction between dark matter and dark energy is chaotic.

July 2024, 78 pages.

Keywords: Cosmology, Dark Matter, Dark Energy, Interaction, Chaos

1. GİRİŞ

Evreni anlama çabası, tüm insanlığın en eski ve en önemli problemlerinden birisidir. Bu konuda sayısız teori ileri sürülmüş olmasına rağmen, bu çaba halen sürmektedir. Modern bilimin gelişmesiyle birlikte, bu çaba daha sistematik hale getirilmiş olup, bu serüven teori, gözlem ve deneylerle devam ettirilmektedir. Bu yolda epeyce ilerleme kaydedilmiş olsa da, halen modern bilimi meşgul eden ve henüz yanıtlanamayan birçok fizik ve kozmoloji problemi olduğunu söyleyebiliriz. Yapılan gözlemler ve sunulan teoriler, içinde yaşadığımız evrenin bir başlangıcı olduğunu, evrimleşerek karmaşıklaştığını ve genişleyerek bugünkü halini aldığını söylemektedir.

Genişlemekte olan evrenimizin çeşitli aşamalardan geçerek evrimleştiğini biliyoruz. Bu süreçlerde madde, karanlık madde ve karanlık enerjinin önemli bir rol oynamış olduğu açıktır. Karanlık sektörün doğası bugün tam olarak çözülmüş değildir. Ancak yapılan gözlemler karanlık madde ve karanlık enerjinin varlığı hakkında güçlü kanıtlar sunmaktadır. Evreni oluşturan bu bileşenlerin etkileşimde olduğunu öne süren bir çok teori ve bilimsel çalışma mevcuttur. Evrenin tüm süreçlerini bir tez çalışmasında ele almak tez çalışmasının boyutunu aşacağı kesindir. Bu nedenle, bu tez çalışmasında sınırlı bir şekilde karanlık madde ve karanlık enerjinin etkileşim problemini ele alacağız. Karanlık madde ve karanlık enerji etkileşim modelleri, bu bileşenlerin enerji yoğunluklarının toplamının korunduğu ancak herbirinin enerji yoğunluklarının ayrı ayrı tanımlandığı modellerdir. Bu modellerde karanlık enerji skaler alanlar ya da akışkanlar cinsinden tanımlanır. Seçilen bir etkileşim parametresi ile enerji yoğunlukları, karanlık madde ve karanlık enerji için yeniden yazılır. Bu modeller etkileşim parametresinin aldığı değerlere göre tesadüf sorunu, ince ayar problemi gibi standart modelin açıklayamadığı sorunları hafifletebilmekte hatta çözüm getirebilmektedir.

Bu doğrultuda, bu tez çalışmasında Aydıner tarafından ileri sürülen karanlık madde ve karanlık enerji etkleşimini temsil eden yeni etkileşim şeması ve bu şemaya ait etkileşim denklemleri incelenecektir (Aydiner, 2023). Bu etkileşim denklemlerinin dayandığı varsayımlar ve denklemlerin elde edilme aşamalarına yer verilecektir. Bu denklemler revize edilerek yeni bir modifiye etkileşim denklemi elde edilecektir. Karanlık madde ve karanlık enerji etkileşimini temsil eden modifiye etkileşim denklemi nümerik olarak çözülecek ve

etkileşimin dinamiği incelenecektir.

Tezin genel kısımlar bölümünde ilk olarak standart kozmolojik model, büyük patlama teorisi ve alternatif karanlık enerji modelleri kısaca incelenecektir. Ardından, karanlık madde ve karanlık enerji etkileşim modelleri detaylı olarak ele alınacaktır. Aydıner'in sunduğu etkileşim şeması modifiye edilerek özel şartlar altında karanlık madde ve karanlık enerji etkileşimi incelenecektir. Önerilen yeni denklem sistemi için analitik çözümler ve kararlılık analizleri yapılacak, zaman serileri elde edilecek, bu zaman serilerinden faz uzayı grafikleri çizilecek ve Lyapunov üstelleri elde edilerek denklem sistemi için kaos analizi yapılacaktır.

Tezin organizasyonu şöyledir: Genel kısımlar bölümünde Standart Kozmolojik Model, Büyük Patlama Teorisi, Alternatif Karanlık Enerji Modelleri, Karanlık Madde ve Karanlık Enerji Etkileşimleri ele alınacak ve tanıtılacaktır. Ayrıca Kaos Fiziği hakkında bilgi verilecek ve kaos analizi için temel kavramlar sunulacaktır.

Malzeme ve yöntem kısmında yeni önerilen modifiye etkileşim denklemi verilecek ve kaotik zaman serileri analizi yöntemleri sunulacaktır.

Tezin bulgular kısmında modifiye etkileşim denklemi için kararlılık analizi yapılacaktır. Sabit noktalar hesaplanacak ve sabit noktaların kararlılığı Jacobian matris çözümleriyle incelenecektir. Denklemlerin zaman serileri elde edilecek, zaman serilerinden faz uzayı analizleri yapılarak faz uzayı grafikleri çizilecektir. Çizdirilen faz uzayı grafikleri yeniden yapılandırılacak ve Lyapunov üstelleri elde edilerek kaos analizi yapılacaktır. Son olarak elde edilen sonuçlar ve bu sonuçların kozmoloji ile ilişkisi ve önemi tartışılacaktır.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. KOZMOLOJİNİN TEMELLERİ

Evrenin oluşumu, bilim dünyasının en tartışmalı alanlarından biri olarak kabul edilen Büyük Patlama teorisiyle açıklanır. Bu teoriye göre, evrenimiz yaklaşık olarak 13,8 milyar yıl önce, yoğun ve sıcak bir noktada, sonsuz bir yoğunluk ve sıcaklıkla başladı (Delsemme, 1998). Patlama ile evren genişlemeye başladı ve evren günümüzdeki bilgilere göre halen sürekli olarak genişlemeye devam ediyor (Roos, 2008). Evrenin başlangıcı, henüz fizik yasaları ve kavramları ile tam olarak açıklanamadığı için bu süreci kesin bir zaman çizelgesiyle ifade etmek zor olabilir. Ancak şu ana kadar elde edilen bilimsel bilgilere dayanarak, evrenin başlangıcının 13,8 milyar yıl önce olduğu kabul edilir. Gelecekteki evrenin sonu hakkında kesin bir bilgiye sahip değiliz. Fakat bazı kozmoloji modelleri, evrenin bir noktada ya genişlemesinin duracağını ve tersine çevrileceğini (büyük çöküş), ya da genişlemenin sonsuza kadar devam edeceğini öne sürer. Ancak, henüz kesin bir sonuca ulaşmış değiliz. Evrenin karmaşık yapısını oluşturan ve evrenin dinamik evrimi üzerinde etkili olan bileşenler çeşitlidir. Bunları kabaca 4 başlıkta özetleyebiliriz:

1. *Madde:* Evrenin temel yapı taşıdır. Atomlar, moleküller, gezegenler, yıldızlar ve galaksiler gibi farklı şekillerde bulunabilir.

2. *Radyasyon:* Elektromanyetik radyasyon, ışık, radyo dalgaları, mikrodalgalar ve X-ışınları gibi çeşitli formlarda mevcuttur. Büyük Patlama'nın bir sonucu olarak evrenin erken dönemlerinde yoğun bir radyasyon alanı vardı.

3. *Karanlık Madde:* Görünür maddeyi oluşturan atomlar ve moleküllerden farklı olarak, karanlık madde adı verilen gizemli bir madde evrenin büyük bir kısmını oluşturmaktadır (Zwicky, 1933). Karanlık madde, evrenin kütleçekim etkilerini gözlemlediğimizde fark edilen ancak doğrudan gözlenemeyen bir maddedir.

4. *Karanlık Enerji:* Evrenin genişlemesini hızlandıran gizemli bir enerji formu olarak kabul edilir. Karanlık enerjinin doğası ve etkileri hala tam olarak anlaşılmamıştır, ancak evrenin genişlemesinde kritik bir rol oynadığına inanılmaktadır.

Einstein'ın alan denklemleri, Genel Görelilik Teorisini açıklayan ve bu teoriye temel olan denklemlerdir (Einstein, 1915). Bu denklemler, kütleçekimi alanının yapısını ve hareketini tanımlar. Genel görelilik, kütleçekiminin bir uzay-zaman eğriliği yarattığını ve cisimlerin bu eğrilikte nasıl hareket ettiğini açıklar (Einstein, 1916). Einstein'ın alan denklemleri, uzay-zaman eğriliğinin geometrisini belirleyen diferansiyel denklemlerden oluşur. Temelde, kütle ve enerjinin uzay-zamanın geometrisini nasıl etkilediğini tanımlar. Bir maddenin kütlesi ve enerjisi, uzay-zamanı bükerek başka cisimlerin bu eğrilik üzerinde nasıl hareket edeceğini belirler ve herhangi bir kütlenin veya enerjinin uzay-zaman eğriliğini nasıl etkilediğini hesaplamak için kullanılır. Albert Einstein' ın Genel Görelilik (GG) kuramı modern kozmolojinin ortaya çıkmasını sağlamıştır (Hartle, 2021).

2.1.1. Homojenlik ve İzotropi: FLRW Metriği

Kozmolojik ilkeye göre evren büyük uzaklık ölçeklerinde (yaklaşık $100Mpc$) homojen ve izotropiktir. Bir parsek yaklaşık olarak $3,26$ ışık yılı kadarlık mesafeye yada $30,85$ trilyon kilometreye eşittir. Evrenin homojen olması özelliklerinin her yerde aynı olması demektir. İzotropik olması ise evrende tercih edilen bir yönün olmadığı yani evrenin eş yönlü olması anlamına gelir. Diğer bir deyişle uzayda hangi yöne bakarsak bakalım hep aynı yapıları görürüz. Homojenliği doğrudan tespit etmek zor olmasına rağmen özellikle büyük mesafe ölçeklerinde galaksilerin dağılımı ve Hubble yasasının çıkarımları homojenliğe bazı kanıtlar sağlar. 1964 yılında keşfedilen ve bütün evreni kaplayan kozmik mikrodalga arka plan ışıması (CMB) izotropiye en büyük kanıttır (Penzias ve Wilson, 1965). WMAP ve PLANCK uyduları tarafından hassas olarak ölçülmüştür. $2,725$ K sıcaklığında ölçülen bu ışımanın Büyük Patlamanın (BP) termal kalıntısı olduğu varsayılmaktadır (Ade *ve diğ.*, 2016).

Evreni kozmik bir akışkan olarak düşünürsek, galaksilerin hareketini akışkanın içindeki temel parçacıkların hareketine benzetebiliriz (Saha, 2018). Akışkanı oluşturan her parçacık jeodezik yörüngeleri takip eder. Dolayısıyla uzay-zamanın her noktasından geçen tek bir jeodezik vardır. Böylece galaksiler birbiri ile kesişmeyen yollarda evrenin genişlemesi ile birlikte birbirinden uzaklaşır (Weyl Postülatı). Homojenliği ve izotropiyi içeren uzay-zaman metriği (r,θ,ϕ) küresel koordinatlarında

$$ds^2 = -dt^2 + a^2\left(\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 sin^2\theta d\phi^2\right) \tag{2.1}$$

şeklinde verilir. Yukarıda 4-boyutlu uzay-zamanda tanımlanan bu metriğe Friedman-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) metriği denir (Chimento ve Jakubi, 1996). Burada a uzaysal koordinatlardan bağımsız zamansal koordinat t' ye bağlı olan ölçek faktörüdür ($a = a(t)$). k ise uzay-zaman eğriliğini gösteren bir sabittir ve $1, 0, -1$ değerlerini alabilir. $k = 1$ ise kapalı bir evren, $k = 0$ ise düz bir evren, $k = -1$ ise açık bir evren var demektir. Skaler eğrilik FLRW uzay zamanından

$$R = 6\frac{k + \dot{a}^2 + \ddot{a}a}{a^2} \tag{2.2}$$

olarak elde edilir. a bir sabit ve $k = 0$ olduğunda R kaybolur. Bu durum Minkowski uzay-zamanına karşılık gelir. Eğri uzay-zaman için R sıfır olmayabilir. Standart kozmolojik modelde evren tekillikten başlar. Bu başlangıç zamanı için $a = 0$'a karşılık gelir. Kretschmann eğrilik skaleri evrenin başlangıcında tekillik ima eder. Kretschmann eğrilik skaleri FLRW metriği için aşağıdaki gibi verilir:

$$K = R^{\mu\nu\alpha\beta}R_{\mu\nu\alpha\beta} = 12\frac{k + 2k\dot{a}^2 + \dot{a}^4 + \ddot{a}^2a^2}{a^4}. \tag{2.3}$$

Burada $R^{\mu\nu\alpha\beta}$ Riemann tensörüdür. Yukarıdaki ifade $a = 0$ için ıraksar.

2.1.2. Friedman Denklemleri

Evrendeki madde içeriğini bildiğimizi varsayarsak ($T^{\mu\nu}$) Einstein alan denklemlerinden (Einstein, 1915) ölçek faktörü $a(t)$ ve k 'yı bulabiliriz. Standart kozmolojik modelde madde alanlarını mükemmel bir akışkanın enerji-momomentum tensörü ile tanımlayabiliriz:

$$T^{\mu\nu} = (\rho + p)\,u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu}. \tag{2.4}$$

Denklemde verilen ρ akışkanın enerji yoğunluğunu p ise basıncını belirtmektedir. u^μ akışkanın dörtlü hızıdır ve $g_{\mu\nu}$ metrik tensör bileşenidir. Einstein alan denklemi (EFE)

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{2.5}$$

olarak verilir (Einstein, 1915; Weinberg, 1972). $G_{\mu\nu}$ Einstein tensörüdür. $R_{\mu\nu}$ Ricci tensörü ve R Ricci skaleridir. Kapalı biçimde Einstein alan denklemi,

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \tag{2.6}$$

şeklinde verilir. Akışkanın dörtlü hız vektörünü $u^{\mu} = (1,0,0,0)$ şeklinde verebiliriz. Şimdi (2.1) ve (2.4) denklemleri ile (2.5) alan denkleminden çözümler elde edilebilir. Einsten alan denkleminin tt bileşeni birinci Friedmann denklemini verir :

$$(\frac{\dot{a}}{a})^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho. \tag{2.7}$$

Bu denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$H^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi}{3}\rho \tag{2.8}$$

Burada H Hubble parametresidir ve $H = \dot{a}/a$ ile verilir. Einstein alan denklemlerinin rr, $\theta\theta$ ve $\phi\phi$ bileşenleri ikinci Friedmann denklemini verir (Friedman, 1999):

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) \tag{2.9}$$

Hubble parametresini kullanarak yukarıdaki denklemi aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\dot{H} + H^2 = -\frac{4\pi}{3}(\rho + 3p). \tag{2.10}$$

Elimizde (2.7) ve (2.9) olmak üzere iki adet denklemimiz var. Üç adet bilinmeyen (ρ,p,a) söz konusudur. Bu denklemleri çözebilmek için ρ ve p arasındaki ilişkiyi bilmek gerekir. En basit formda hal denklemi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$p = w\rho. \tag{2.11}$$

Burada w sabittir ve hal denklemi parametresi olarak isimlendirilir. Belirli değerler için w fiziksel durumlara karşılık gelir. Örneğin, $w = -1$ vakum enerjisine karşılık gelirken $w = 0$ madde baskın döneme, $w = 1/3$ radyasyon baskın döneme karşılık gelir.

2.1.3. Evrenin Gözlemlenebilir Parametreleri

Hubble Parametresi H: Edwin Hubble yaptığı gözlemler sonucunda galaksilerin tayfının kırmızıya kaydığını keşfetmiştir (Hubble, 1929). Bu keşif standart kozmolojide evrenin genişlediğine dair en büyük kanıt olarak belirtilmektedir. Evrenin genişleme oranı aşağıdaki gibi tanımlanan Hubble parametresi ile ölçülür:

$$H = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} \tag{2.12}$$

Hubble sabiti, belirli bir epoktaki Hubble parametresinin değerini belirtmektedir. Günümüz için Hubble sabitini (H_0) ile gösterirsek, gözlemler $H_0 = 70 \pm 10(km/s)/Mpc$ olduğunu göstermektedir ($1Mpc = 3,09x10^{19}km$) (Saha, 2018).

Yavaşlama Parametresi q: Evrenimizin gözlemlenebilir parametrelerinden birisi de aşağıdaki gibi tanımlanan yavaşlama parametresi q 'dur. Yavaşlama parametresi hızlanarak ya da yavaşlayarak genişleyen evren dinamiğini tanımlar. Bu parametre aşağıdaki gibi verilir:

$$q = -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2} \tag{2.13}$$

$q > 0$ olması evrenin yavaşlayarak genişlediğini, $q < 0$ olması evrenin hızlanarak genişlediğini ima etmektedir.

Yoğunluk Parametresi Ω: Evrenin gözlemlenebilir önemli parametrelerinden biride yoğunluk parametresi Ω dır. Ω evrendeki ortalama kütle yoğunluğunun, bu yoğunluğun kritik değerine oranı olarak tanımlanır:

$$\Omega = \frac{8\pi}{3H^2}\rho = \frac{\rho}{\rho_c} \tag{2.14}$$

Buradan kritik yoğunluk ρ_c şu şekilde tanımlanır:

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi} \tag{2.15}$$

Friedman denklemi (2.8), yoğunluk parametresi cinsinden şu şekilde ifade edilir:

$$\Omega - 1 = \frac{k}{H^2 a^2} \tag{2.16}$$

Denklem (2.16)'da Ω' ya göre k 'nın işareti belirlenebilir:

$$\begin{aligned} \rho < \rho_c \leftrightarrow \Omega < 1 \leftrightarrow k < 0, \\ \rho = \rho_c \leftrightarrow \Omega = 1 \leftrightarrow k = 0, \\ \rho > \rho_c \leftrightarrow \Omega > 1 \leftrightarrow k > 0 \end{aligned} \tag{2.17}$$

Buna göre yoğunluk parametresi Robertson-Walker geometrisindeki üç durumdan hangisinin evrenimizi tanımladığını belirler.

Tablo 2.1: Evrenin k uzay-zaman eğriliği sabitine göre durumları.

"k" Değeri	Evrenin Şekli
k= -1	Açık Evren
k= 0	Düz Evren
k= 1	Kapalı Evren

2.1.4. Friedman Denklemlerinin Çözümü

Genel görelilikte enerji korunumu enerji-momentum tensörünün kovaryant türevinin sıfır olmasına karşılık gelir:

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \tag{2.18}$$

Enerji-momentum tensörünü mükemmel akışkan olarak alırsak, yukarıdaki ifadeden

$$\dot{\rho} + 3H(\rho + p) = 0 \tag{2.19}$$

elde edilir. Bu denklem süreklilik denklemi olarak adlandırılır. Denk. (2.11)'de verilen hal denklemini yukarıda kullanırsak, yoğunluk parametresi ve ölçek faktörü arasındaki çözüm aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\rho \propto a^{-3(1+w)} \tag{2.20}$$

Hal denklemi parametresi w ' ya bağlı olarak evrendeki farklı dönemler için yoğunluk ifadeleri aşağıdaki gibi verilir:

$$w = 0 \quad \rightarrow \quad \rho \propto \frac{1}{a^3} \quad \text{toz} \tag{2.21}$$

$$w = \frac{1}{3} \quad \rightarrow \quad \rho \propto \frac{1}{a^4} \quad \text{radyasyon} \tag{2.22}$$

$$w = -1 \quad \rightarrow \quad \rho = \Lambda \quad \text{vakum} \tag{2.23}$$

$k = 0$ yani düz bir evren durumunda (2.20) ifadesiyle beraber (2.7) Friedmann denkleminden

$$a(t) \; = \; a_0 \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{3(1+w)}} \tag{2.24}$$

çözümü elde edilir (Saha, 2018). Burada a_0 ve t_0 günümüzdeki ölçek faktörü ve zamanı göstermektedir.

Sıradan madde için $\rho + 3P > 0$ ve dolayısıyla Friedman denklemi (2.9)'da $\ddot{a} < 0$ anlamına gelir; yani Evren statik olamaz. Ancak 20. yüzyılın başlarında evren durağan kabul ediliyordu. Bu belirgin sorun Einstein' nın alan denklemlerini değiştirerek kozmolojik sabit Λ'yı teoriye dahil etmesine yol açtı (Einstein, 1917). Λ'nın varlığında (2.8) ve (2.9) ifadelerinde verilen Friedman denklemleri aşağıdaki gibi verilir:

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho \; + \; \frac{\Lambda}{3} \; - \; \frac{k}{a^2}, \tag{2.25}$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} \; = \; \frac{4\pi}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3}. \tag{2.26}$$

Einstein evreni, madde durumunda ($p = 0$) evreni statik hale getirecek kaybolmayan kozmolojik bir sabit ile tanımlanan kozmolojik modeldir. Eğer $\dot{a} = \ddot{a} = 0$ olarak kabul edersek, yukarıdaki (2.25) ve (2.26) denklemlerinden,

$$\rho \; = \; \frac{\Lambda}{4\pi}, \; a \; = \; \frac{1}{\sqrt{\Lambda}} \quad ve \quad k = 1 \tag{2.27}$$

elde ederiz (Bambi, 2018). Einstein evreni kararsızdır, yani küçük dalgalanmalar onun ya çökmesine ya da genişlemesine neden olur. Hubble' ın evrenin genişlediğini keşfetmesinden sonra kozmolojik sabit geçici olarak Einstein denklemlerinden çıkarıldı.

2.2. KARANLIK MADDE VE KARANLIK ENERJİ

Son yıllarda Riess ve arakadaşlarının kurduğu araştırma ekiplerinin kozmoloji alanında yaptığı çalışmalar Evrenimizin sadece genişlemediğini aynı zamanda ivmelendiğini de göstermiştir (Perlmutter *ve diğ.*, 1999). Evrenin hızlanarak genişlemesine sebep olan bu kozmik ivmenin kaynağının karanlık enerji (KE) olduğu düşünülmektedir. Şaşırtıcı bir şekilde karanlık enerji Evren boyunca eşit dağılmıştır. Evrenin genişlemesi onun etkisini azaltmaz. Karanlık enerjinin Evren üzerinde küresel bir etkisi olduğu sonucuna varılmıştır. Bu etki Evrenin genişlemesini hızlandıracak bir mekanizma görevi gören itici bir kuvvete yol açar. Son yıllarda yapılan kapsamlı çalışmalara rağmen kozmologlar için karanlık enerjinin doğası ve kökeni hala tam olarak açıklanabilmiş değildir. Yapılan gözlemler sonucu elde edilen veriler, Evreni oluşturan bileşenlerin yaklaşık %68'nin karanlık enerji (KE), %27'sinin karanlık madde (KM) ve %5' nin sıradan madde veya baryonlar olduğunu göstermiştir (Collaboration *ve diğ.*, 2020). Bu bölümde Evrenin karanlık bileşenleri KE ve KM gözlemler sonucunda elde edilen veriler ışığında incelenecektir.

Tablo 2.2: Evreni oluşturan bileşenler ve yüzdeleri.

Bileşen	Evrendeki Yaklaşık Yüzdesi
Karanlık Enerji	%68
Karanlık Madde	%27
Madde	%5

2.2.1. Karanlık Madde

Evren hakkında bilinenin aksine yapılan en beklenmedik açıklamalardan biri evrende hakim olan maddenin bilinen sıradan baryonik madde dışında, ışıma yapmayan ve miktarı evrendeki maddenin yaklaşık beş katı kadar olan karanlık madde olduğudur (Peter *ve diğ.*, 2014). Karanlık maddenin varlığı standart kozmolojide mikrodalga arka planındaki anizotropilerin gözlenmesi, galaksi kümesi hız dağılımları, büyük ölçekli yapı dağılımları, yerçekimsel merceklenme çalışmaları ve galaksilerden X ışını ölçümleri nedeniyle günümüzde kabul görmektedir. Yapılan kütle yoğunluğu ölçümlerinde evrenin kütle yoğunluğunun kritik yoğunluğun (ρ_c) %30'u kadar bir değerde olduğu gözlenmiştir. Evren uzaysal olarak neredeyse düz olduğundan evrenin enerji yoğunluğunun yaklaşık %70'nin hesaba katılmadan kaldığı görülmüştür. Geriye kalan hesaba katılmayan bu kısım

KM ve KE'ye atfedilmiştir. Bu bölümde KM ve KE'nin varlığına işaret eden durumlar incelenecektir.

2.2.2. Karanlık Maddeye İlişkin Gözlemsel Kanıtlar

Galaksilerin ve Galaksi Kümelerinin Hız Dağılımları: Karanlık maddenin varlığına dair ilk kanıtlar Zwicky'nin büyük gökada kümelerinin kütlelerini tahmin etmeye yönelik yaptığı çalışmalara dayanmaktadır. Büyük bir galaksi kümesindeki galaksilerin hız dağılımlarından elde edilen galaksi kümesinin dinamik kütlesinin, onların ışıklı kütlelerinin en az yüz katı olduğu bulundu. Bu durum Zwicky'nin, bu tür kümelerdeki maddenin çoğunun bilinenin aksine yıldızlar ve yıldız kümeleri gibi parlak nesnelerden oluşmadığı, ışık yaymayan maddeden oluştuğu sonucuna varmasına yol açtı (Zwicky, 1937). Yıldızlar için merkezdeki çizgisel hız yıldız yarıçapı ile ilişkilidir:

$$V(r) = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{2.28}$$

Denklemde $V(r)$ çizgisel hızı, r yörünge yarıçapını, M ise bu yörüngedeki kütleyi verir. Dolayısıyla dönme hızının $V \propto r^{\frac{-1}{2}}$ kadar düşmesi gerekir. Ancak büyük ölçeklerde dönme eğrisi düzleşir ve büyük yarıçaplarda hız sabit olur. Bu durum r ile orantılı olarak kütlenin büyümeye devam ettiği bilgisini verir.

Gökada Kümelerinin X Işını Gözlemleri: Gökada kümelerindeki X ışını gözlemlerinde genişletilmiş emisyon ölçümleri, gökada kümesinin hacmi boyunca dağılmış sıcak gazın varlığını gösterir. Tahmin edilen bu sıcak gaz kümesini bir arada tutmak için gereken kütle büyük miktarda KM olmasını gerektirir. Gökada kümesinin karanlık maddenin yerçekimi ile bir arada tutulduğu gözlemler sonucu elde edilmiştir (Dietrich *ve diğ.*, 2012; Vikhlinin *ve diğ.*, 2006).

Kütleçekimsel Merceklenme: Galaksi (Gökada) kümelerinin, kendilerinden daha uzakta bulunan galaksilerden yayılan ışığı büyük kütleli yapılarından dolayı oluşan kütleçekimsel alan nedeniyle bükmesi yani saptırmasıdır. Uzaktaki bir galaksiden diğer galaksinin merkezine ulaşan ışık merkezdeki kütle yoğunluğunun çekimsel etkisiyle sapar ve yeniden yönlendirilir. Böylece ışığın ait olduğu galaksinin birçok görüntüsü oluşur. Bu en basit kütleçekimsel merceklenme türüdür. Mükemmel bir merceklenme olayı gerçekleştiğinde

Einstein Halkası adı verilen tam veya tama yakın bir ışık halkası oluşur. Bu halka görünümleri galaksi kümelerinde bulunan madde dağılımlarının nasıl olduğu hakkında bilgi verir. Görüntüler maddenin hem görünen kısmının hem de görünmeyen karanlık kısmının uzaydaki dağılımı hakkında bilgi verir (Schneider *ve diğ.*, 2006).

2.2.3. Karanlık Enerji

(2.9) denkleminden görüleceği gibi $\rho + 3p < 0$ ve $w < \frac{-1}{3}$ olduğunda evrenin hızlanarak genişleyeceği anlaşılır. Böyle bir hızlanmanın gerçekleşebilmesi için negatif bir basıncın olması gerektiği açıkça görülüyor. Bu negatif basıncı sağlayan, evrenin genişlemesine neden olan enerji Karanlık Enerji (KE) olarak adlandırılır. KE' nin varlığına dair gözlemsel kanıtlar; uzak süpernovalardan (SnIa tipi) alınan gözlemler, CMB üzerindeki sıcaklık dalgalanmaları, Baryon Akustik Salınımı ölçümleri, galaksilerin ve galaksi kümelerinin dağılımı olarak verilir (Weinberg, 2005). KE için hal denklemi parametresi $p = w\rho$ olarak yazılabilir. Akışkanların güçlü enerji koşulunu (GEK) sağlaması için $\rho + 3p \geq 0$ ya da $w \geq -\frac{1}{3}$ olmalıdır. Buradan KE 'nin evrenin hızlanmasını sağlamak için GEK' i ihlal etmesi gerektiği sonucuna varılır. Evrenin hızlanarak genişlemesine neden olan bu kozmik ivmeyi açıklamaya yönelik mevcut olan alternatif yaklaşımları bu bölümde inceleyeceğiz.

Kozmolojik Sabit: İlk olarak Einstein (1917) tarafından statik bir evren elde etmek amacıyla GG teorisine ek olarak ortaya atılan kozmolojik sabit, boşluğun enerji yoğunluğu olarak tanımlanır. Hubble' ın galaksilerin birbirinden uzaklaştığını keşfetmesinden sonra Einstein alan denklemlerindeki kozmolojik sabit doğruluğunu yitirmişti. Kozmolojik sabit, evrenin geç zamandaki hızlanmasından sorumlu KE ile ilişkili olduğu düşünülerek tekrar önem kazandı.

Kozmolojik sabit, parçacık varlığı olmasa bile Kuantum Fiziğinde 'sıfır noktası enerjisi' ile ilgilidir. Ancak Kozmolojik Sabit için gözlemlerden elde edilen değer ile parçacık fiziği teorilerinin öngördüğü değer arasında büyük fark bulunmaktadır. Hesaplanan değer gözlemler sonucunda elde edilen değerden 10^{120} kat daha büyüktür. Bu tutarsızlığa 'Kozmolojik Sabit Problemi' (KSP) adı verilir ve çözülmemiş birçok sorundan biridir (Weinberg, 1989).

2.2.4. Alternatif Karanlık Enerji Modelleri

Quintessence: Quintessence modelinde KE kanonik bir skaler alan (ϕ) tarafından tanımlanır. Kozmolojik sabitin aksine hal denklemi parametresi dinamiktir. Quintessence için eylem,

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu\phi} - V(\phi)\partial_{\nu\phi}] + S_{matter} \tag{2.29}$$

şeklinde tanımlanır. Burada R Ricci skaleridir ve ϕ, $V(\phi)$ potansiyeli ile bir skaler alandır. S_{matter} ise madde eylemidir (Zlatev *ve diğ.*, 1999). Quintessence skaler alanının hal denklemi parametresi aşağıdaki gibi ifade edilir

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)} \tag{2.30}$$

ve $-1 < w_\phi < -\frac{1}{3}$ arasında değer alır. Bu alan evrenin hızlanarak genişlemesine yol açar.

Phantom (Hayalet) Alan: Phantom alan, hal denklemi parametresi -1 'den küçük olan evrenin genişlemesi ile artan negatif bir kinetik enerji ile yönetilen skaler alanla temsil edilen KE adayıdır.

Güncel gözlem verileri (Planck Uydusundan alınan veriler) $w < -1$ olabileceğini ortaya koyuyor. Bu KE yoğunluğunun zamanla arttığını gösterir ve bu artış kütleçekimsel olarak bağlı nesneleri parçalayacak ve hatta en sonunda atomlar, çekirdekler vb. yapılar bozulacaktır. Bu durum Büyük Yırtılma (Big Rip) olarak adlandırılır (Yurov *ve diğ.*, 2006).

Kütleçekimine minimum düzeyde bağlı olan hayalet alanın hareketi şu şekilde verilir:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}[\frac{R}{16\pi G} - \frac{1}{2}g^{\mu\nu}\partial_{\mu\phi}\partial_{\mu\phi}\partial_{\nu\phi} - V(\phi)] + S_{matter} \tag{2.31}$$

Karşılık gelen hal denklemi parametresi ise,

$$w_\phi = \frac{p_\phi}{\rho_\phi} = \frac{\dot{\phi}^2 + 2V(\phi)}{\dot{\phi}^2 - 2V(\phi)} \tag{2.32}$$

olarak verilir.

K-Essence: K-Essence kozmolojideki kozmolojik sabit ve tesadüf problemi gibi sorunları

çözme potansiyeli nedeniyle karanlık enerji modellerine alternatif olarak son yıllarda büyük ilgi gören bir model olarak karşımıza çıkıyor. K-Essence kavramı ilk olarak Armendariz tarafından karanlık enerjiye potansiyel bir çözüm olarak önerildi (Armendariz-Picon *ve diğ.*, 2001). K-Essence evrenin hızlandırılmış genişlemesini yönlendirdiği varsayılan kanonik olmayan bir kinetik terimi içeren özel bir skaler alan türüdür. K-essence Lagrangian terimi,

$$L_\phi = f(\phi)\hat{p}(\chi) \tag{2.33}$$

olarak verilir. Denklemde $\chi \equiv (-1/2)(\nabla\phi^2)$ kanonik olmayan kinetik terimdir. Lagrangian terimi daha açık formda aşağıdaki gibi yazılır:

$$L_\phi = p(\phi,\chi) = f(\phi)(-\chi+\chi^2) \tag{2.34}$$

Yoğunluk parametresi ve buna karşılık gelen hal denklemi parametresi,

$$\rho\,(\phi,\chi) \;=\; f\,(\phi)\left(-\chi+3\chi^2\right), \qquad\qquad w_{k\,-\,ess} \;=\; \frac{1-\,\chi}{1-\,3\chi} \tag{2.35}$$

olarak verilir. χ 'in aldığı sabit değerlere göre hal denklemi parametresi için sabit değerler Denk. (2.34)' den elde edilir. Hal denklemi parametresi $w_{k\,-\,ess} < \,-\,\frac{1}{3}$ olduğu durumda Denk. (2.35)' den hızlanarak genişlemeye karşılık gelecektir.

Tachyon: Takyonik modellerde quintesence ve kozmolojik sabit modellerinden farklı olarak maddenin yoğunluk parametresi, önemsiz kabul edilmez ve skaler alan üzerine etkisi önemsenir. Skaler alan Lagrangian ifadesi

$$L_{tach} = -V(\phi)[1-\partial^i\phi\,\partial_i\phi]^{1/2} \tag{2.36}$$

olarak verilir (Padmanabhan ve Choudhury , 2002). Bu modelde madde yoğunluğu sırasıyla göreceli olmayan, göreceli ve Tachyon madde yoğunlukları $\rho = \rho_{NR}+\rho_R+\rho_\phi$ olarak verilir. Böylece Tachyon alanı ϕ için,

$$\rho\phi = \frac{V(\phi)}{\sqrt{1-\dot{\phi}^2}}, \qquad\qquad p_\phi = -V(\phi)\sqrt{1-\dot{\phi}^2} \tag{2.37}$$

yoğunluk ve basınç ifadeleri elde edilir. Tachyon modeli için durum denklemi $w = \dot{\phi}^2 - 1$

olmak üzere $p = w\rho$ 'dur. Hareketin skaler alan denklemi

$$\ddot{\phi} = -(1-\dot{\phi}^2)[3H\dot{\phi} + \frac{1}{V(\phi)}\frac{dV}{d\phi}] \tag{2.38}$$

olarak verilir. Bu denklem 1' e yaklaştıkça açıkça görülüyor ki $\dot{\phi}$ ' nin değişimi 0 değerine doğru gitmektedir. Sonuç olarak Tachyon alanının durum denklemi toz benzeridir. Evrende enerji yoğunluğu bakımından Tachyon' un baskın olduğu bir senaryo, evrenin hızla genişlediği duruma karşılık gelmektedir ve H(t) parametresi madde ve radyasyonun baskın olduğu duruma göre çok daha yavaş değişim gösterecektir (Bagla *ve diğ.*, 2003).

Quintom: Quintom KE modeli, Quintessence ve Phantom modelinin karması olan bir modeldir. Mevcut gözlemsel veriler hayali (phantom) bölünmeyi aşmanın kısmen mümkün olabileceğini göstermektedir. Quintom KE modelinde durum parametresi, $w_q = -1$ hayalet bölünmesini aşıp -1'in altında ya da üstünde değer alabilir. Böylece hal denklemi parametresi standart durumdan hayalet rejime dinamik bir geçiş sağlayabilir (Feng *ve diğ.*, 2006). Bu modelin eylemi şu şekilde açıklanmaktadır:

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\frac{R}{2k^2} + \frac{1}{2}g^{\mu\gamma}\partial_\mu\phi\,\partial\gamma\phi = -\frac{1}{2}g^{\mu\gamma}\partial_\mu\sigma\partial_\gamma\sigma + v(\phi,\sigma) + L_m \tag{2.39}$$

Burada $k^2 = 8\pi G$ kütleçekimi eşleşmesidir ve $\mathscr{L}_m$ madde alanlarının Lagrange yoğunluğunu temsil eder. Homojen ve izotropik düz Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker (FLRW) uzay-zamanının arka planında, çizgi elemanı şu şekilde verilir:

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[dx^2 + dy^2 + dz^2\right]. \tag{2.40}$$

Lagrangian'ın açık şekli,

$$L(a,\dot{a},\phi,\dot{\phi},\sigma,\dot{\sigma}) = -3a\dot{a}^2 + a^3\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{\sigma}^2 + v(\phi,\sigma)\right) \tag{2.41}$$

olarak verilir.

Dolayısıyla $a(t)$ olağan ölçek faktörüdür, $\phi = \phi(t)$, $\sigma = \sigma(t)$ kanonik ve kanonik olmayan skaler alanlardır ve bir üst nokta, kozmik zaman t'ye göre farklılaşmayı temsil eder.

Hal denklemi parametresi aşağıdaki gibi verilir:

$$w_q = \frac{\dot{\phi}^2 - \dot{\sigma}^2 - 2v(\phi,\sigma)}{\dot{\phi}^2 - \dot{\sigma}^2 + 2v(\phi,\sigma)}. \tag{2.42}$$

Chaplygin Gaz Modelleri: Chaplygin Gazı olarak adlandırılan bir akışkan ile çalışan karanlık enerji modelidir. Chaplygin kozmolojik modelleri evrenin yavaşlayan aşamasından, bugünkü hızlanmadan sorumlu kozmik ivme aşamasına yumuşak bir geçiş yapan ve bunu tek bir akışkanla sağlayan avantajlı modellerdir. Modelin hal denklemi parametresi en basit şekilde

$$p = -\frac{A}{\rho} \tag{2.43}$$

olarak verilir. Burada A pozitif bir sabittir. Denk. (2.19) ile bu hal denklemi parametresi entegre edilirse enerji yoğunluğu ρ elde edilir.

$$\rho = \sqrt{A + \frac{D}{a^6}} \tag{2.44}$$

burada D keyfi bir sabittir. a'nın değerine göre evrenin erken zamanlardaki ve geç zamanlardaki davranışı açıklanabilir. a, ρ, p 'nin küçük değerleri için bu gazın erken zamanlarda KM (basınçsız toz) gibi davrandığını; a, ρ, p'nin büyük değerleri için ise geç zamanlarda kozmolojik sabit (Λ) gibi davrandığını gösterir. Bu durum evrenin hızlanarak genişlemesine yol açar. Ancak gözlenen CMB anizotropileri bu model üzerinde büyük bir kısıtlamaya yol açmıştır. Hal denklemi parametresi aşağıdaki gibi tanımlanan Genelleştirilmiş Chaplygin Gazı (GCG) modeli bu soruna çözüm üretebilir (Bento *ve diğ.*, 2002).

$$p = -\frac{A}{\rho^\alpha}, \qquad 0 < \alpha < 1. \tag{2.45}$$

WMAP gözlem verileri $0 < \alpha < 0,2$ olduğunu göstermiştir (Amendola *ve diğ.*, 2003). Bu durum GCG modeli ile uyuşmamaktadır. GCG modeli değiştirilmiş hal denklemi parametresi ile tanımlanarak Modifiye Chaplygin Gazı (MCG) modeli olarak tekrar geliştirildi (Benaoum, 2022).

$$p = \gamma\rho - \frac{B}{\rho^n} \tag{2.46}$$

burada $\gamma \leq 1$, B ve n pozitif sabitlerdir. MCG modeli evrenin radyasyon çağından ($\gamma = \frac{1}{3}$ ve ρ çok büyük) itibaren ΛCDM dönemine kadar olan gelişimini tanımlamada başarılı olmuştur.

2.3. KARANLIK MADDE VE KARANLIK ENERJİ ETKİLEŞİMİ

Evrenin hızlanarak genişlemesinden sorumlu olan KE ve galaksilerin büyük ölçekli yapı dağılımlarından sorumlu olan KM' nin fiziksel özellikleri hakkında kesin bir bilgiye sahip değiliz. Bu bilinmezlik KE ve KM ana bileşenlerinin doğasını anlamaya yönelik büyük bir çabaya yol açmıştır. Günümüzde mevcut gözlemsel veriler, bu bileşenlerin kozmolojik sabit Λ ile temsil edildiği ΛCDM modelini desteklemektedir. Bu model gözlemsel veriler tarafından desteklensede teorik açıdan kozmolojik sabit sorunu ve ayrıca tesadüf problemi (Gonçalves, 2005) olarak bilinen ciddi bir ince ayar probleminden (Quartin *ve diğ.*, 2008) muzdariptir. KE ve basınçsız madde eğer farklı evrimleştiyse, mevcut enerji yoğunlukları şimdiki zamanda neden aynı düzeydedir? Bu tür, kozmik tesadüf problemi ile ilgili sorunları hafifletecek KE ve KM' nin etkileşime girdiği, KE'nin etkileşimli skaler alanlar ve akışkanlar olarak tanımlandığı çeşitli modeller öne sürülmüştür. Karanlık bileşenlerin etkileşimini bütünüyle kanıtlayan modeller olmasa bile bazı gözlemsel veriler bu etkileşimin var olabileceğini göstermektedir. Tezin bu bölümünde bu etkileşimin varlığını kanıtlamaya yönelik yapılan çalışmalar ve önerilen modeller incelenecektir.

2.3.1. Etkileşimli Karanlık Madde ve Karanlık Enerji Modelleri

Karanlık madde ve karanlık enerjinin yalnızca kütleçekimsel olarak etkileşime girdiğini kabul eden kozmolojik modellerde her bir akışkan bileşen için enerji yoğunluğu ayrı ayrı korunur. Her bileşen için süreklilik (enerji korunumu) denklemi,

$$\dot{\rho}_i + 3H(1+w_i)\rho_i = 0 \tag{2.47}$$

burada $i = (r,b,c,d)$ radyasyon, baryonlar, KM ve KE bileşenleridir. KM ve KE' nin bilinmeyen doğası bu bileşenleri açıklamayı zorlaştırmaktadır. Elde edilen gözlemlerden bileşenlerle ilgili birkaç özellik çıkarılabilir: *a)* Karanlık maddenin basıncı küçük, büyük ihtimalle sıfır iken karanlık enerjinin basıncı negatif etki yaratır, *b)* Baryonlarla karanlık enerjinin etkileşimi, yerel kütleçekimi ölçümleri tarafından kısıtlandığından büyük ölçüde

ihmal edilebilir, *c)* Fotonlar evrenin genişlemesiyle birlikte jeodezik bir yol izleyemeyeceği ve yıldız kaynaklarından yayınlanan ışığın sapma durumunun gözlemlerle uyuşmayacağı için radyasyonla etkileşim zorlaşır, *d)* Etkileşime girmeyen ΛCDM modeli, verilerle uyum sağladığı ve karanlık enerjiyi kozmolojik bir sabit olarak tanımladığı için karanlık enerji ile karanlık madde arasındaki etkileşim küçük olmalıdır. Tüm bu olasılıklara ek olarak karanlık enerji ve karanlık madde arasındaki etkileşim olasılıklar arasındadır. Bu etkileşim düşüncesi sabit bir KM/KE oranı ile tesadüf problemi sorununa çözüm olabilir ya da bu oranın ΛCDM modeline göre daha yavaş değişmesi sorunu hafifletebilir. Son yıllarda literatürde, karanlık madde ve karanlık enerji arasındaki etkileşimin standart modellere bir alternatif olduğu düşünülse de, KM ve KE 'nin doğası ve dinamikleri tam olarak çözülemediğinden karanlık sektörler arasındaki etkileşimin doğası da çözülmemiş bir sorundur. Ayrıca bu durum, hangi etkileşim çekirdeğinin en uygun olduğu konusunda da fikir birliği sağlanmasını engellemektedir.

Fenomolojik Akışkan Modelleri: Etkileşim modelleri, karanlık madde ve karanlık enerji bileşenlerinin enerji yoğunluklarının birbirinden ayrı olarak gelişmediğini ancak dark sektörün enerji yoğunluklarının Q etkileşim parametresi ile ayrı ayrı tanımlandığı modellerdir (Farrar ve Peebles, 2004).

$$\dot{\rho}_c + 3H\rho_c = Q, \tag{2.48}$$

$$\dot{\rho}_d + 3H(1+w_d)\rho = -Q, \tag{2.49}$$

burada Q etkileşim parametresi, karanlık sektörün toplam enerji yoğunluğunun korunduğunu belirtir. Temel bir teorinin olmadığı durumda, Evrenin evriminde etkili olan Q miktarı belirlenemez. Etkileşim parametresi $Q > 0$ olduğu durumda KM'den KE' ye enerji aktarımı, $Q < 0$ olduğu durumda ise KE' den KM' ye enerji aktarımı olacaktır. (Tamanini, 2015) Parçacık fiziğinde etkileşimlerin enerji yoğunluklarının çekirdeğinde bir fonksiyonu olması beklenir. ρ_d, ρ_c ve zaman etkileşim terimlerinin, birinci dereceden Taylor açılımı $Q = H(\xi_2\ \rho_d + \xi_1\ \rho_c\ )$ olarak verilir, burada ξ_1 ve ξ_2 katsayıları gözlemsel olarak belirlenecek sabitlerdir. İki yerine tek bir parametrenin kullanılması daha uygundur. Seçilen farklı ξ değerleri, farklı etkileşim parametrelerinin oluşmasına yol açar. $\xi_1 = 0$ için, $Q = H\xi_2\rho_d$; $\xi_2 = 0$ için, $Q = H\xi_1\rho_d$; $\xi_1 = \xi_2$ için $Q = H\xi\,(\rho_d + \rho_c)$ elde edilir. Burada Phantom (Hayalet) ve Quintessence (öz) modellerine karşılık gelen etkileşim parametrelerini ayırarak

fenomolojik modellere karşılık gelen, kararlı yoğunluk bozulmalarına sahip modelleri inceliyoruz.

Etkileşimin tesadüf sorununu hafifletmesi kolaylıkla açıklanabilir. Enerji yoğunluklarının oranı $r = \frac{\rho_c}{\rho_d}$ ile ölçek faktörü $r \propto a^{-\zeta}$ olarak gelişir, burada ζ, $[\,0,3\,]$ aralığında sabit bir parametredir. ζ'nın sıfırdan faklı aldığı değerler tesadüf sorununun ciddiyetini belirler. $\zeta = 3$ değerini aldığında çözüm $w_\Lambda = -1$ ve $Q = 0$ ile ΛCDM modeline karşılık gelir. $\zeta = 0$ olduğu durumda ise r= sabit olur ve tesadüf sorunu çözülür.

Holografik Karanlık Enerji Modelleri: Genel olarak parçacık fiziği buluşsal çıkarımlarına dayanan bu model, sınırlı bir fiziksel sistemin serbestlik derecesi sayısının, sistemin sınırının alanıyla orantılı olduğunu belirten holografik prensipten yola çıkarak hareket etmektedir. Buna göre, sistemin maksimum entropisinin hacmiyle değil alanıyla orantılı olması gereklidir (Bekenstein, 1981). Cohen ve ark. (1999) kuantum alan teorisinde, kara deliklerin oluşumunun belirlediği sınıra ulaşarak kısa mesafeli (ultraviyole) kesinti ile uzun mesafeli (kızılötesi) kesinti arasında bir bağıntı kurdu. Bu durum sıfır noktası enerji yoğunluğunun bir üst sınırında bir enerji yoğunluğuna karşılık gelir. Bu enerji yoğunluğu aşağıdaki gibi verilir ve HKE enerji yoğunluğuna karşılık gelir.

$$\rho_d = \frac{3c^2}{L^2} \tag{2.50}$$

Burada c belirlenen boyutsuz bir parametredir, L ise Mp^2= 1 birimindeki kızılötesi kesmeye karşılık gelir (Mp Planck kütlesidir.) L' yi gelecekteki olay ufkunun yarıçapı olarak kabul edersek HKE modeli için, evrenin geç zamandaki hızlanmasını açıklayabilir ve KE için hal denklemi parametresini elde edebiliriz (Li, 2004). Amendola ve ark. (2006) etkileşimli HKE modelinin, gözlemsel olarak ölçülen Hayalet (Fantom) Eos ile tutarlı olduğunu gösterdi. KM' nin toz halinde olduğu kabul edilirse toplam basıç $p = p_d$ olur ve IR kesme noktası gelecekteki olay ufkunun yarıçapı olarak seçilirse $R_E = a\int_a^\infty \frac{dx}{Hx^2}$ olur ve dolayısıyla KE enerji yoğunluğu $\rho_d = 3c^2 {R_E}^{-2}$ olarak elde edilir. Enerji yoğunluklarının oranını $r = \frac{\rho_m}{\rho_d}$ alırsak Denk.(2.47)' den şunu elde ederiz:

$$\dot{r} = 3b^2H(1+r)^2 + 3Hrw_d \tag{2.51}$$

Düz bir evren seçildiğinde ($k = 0$) ve $8\pi G = 1$ olarak kabul edildiğinde Friedmann denklemi

(2.7) $\Omega_m + \Omega_d = 1$ olarak yazılabilir, burada $\Omega_m = \frac{\rho_m}{3H^2}$ ve $\Omega_d = \frac{\rho_d}{3H^2}$' dir. Böylece $r = \frac{1-\Omega_d}{\Omega_d}$ ve $\dot{r} = \frac{-\dot{\Omega}_d}{\Omega_d^2}$ olur. Denk. (2.51) yeniden düzenlendiğinde KE' nin hal denklemi parametresi şu şekilde elde edilir:

$$w_d = -\frac{\dot{\Omega}_d}{3\Omega_d(1-\Omega_d)} - \frac{b^2}{\Omega_d(1-\Omega_d)} \tag{2.52}$$

burada nokta, zaman t' ye göre türevi belirtir ve asal sayı lna' ya göre türevi belirtir. KE' nin hal denklemi parametresi şuna indirgenir :

$$w_d = -\frac{1}{3} - \frac{2}{3c}\sqrt{\Omega_d} - \frac{b^2}{\Omega_d} \tag{2.53}$$

HKE' nin etkin hal denklemi parametresi ise

$$w_{eff} = \frac{p}{\rho} = \frac{p_d}{\rho_m + \rho_d} = w_d\Omega_d \tag{2.54}$$

şeklinde verilir. Sonuç olarak etkileşim geç zamandaki evrenin genişlemesini açıklayabildiği gibi tesadüf problemini de hafifletebilir.

2.4. KARANLIK SEKTÖR ETKİLEŞİMİNE YENİ YAKLAŞIM

Son yıllarda evrenin dinamiklerini açıklamaya yönelik, karanlık madde ve karanlık enerjinin etkileşime girdiği, KM ve KE etkileşim modellerine ek olarak önerilen yeni yaklaşım modelleri dikkat çekmektedir. Bu yaklaşım modellerinden en dikkat çekici olanları bu tez kapsamında incelenecek olan *Kaotik Evren Modeli* (Aydıner, 2018) ile *Karanlık Madde ve Karanlık Enerji Arasındaki Kaotik Etkileşimler* (Aydiner, 2023) modelleridir. Bu bölümde bu yaklaşımlar hakkında kısaca bilgi verilecek ve Kaos Fiziği kuramları ışığında incelenecektir.

2.4.1. Kaotik Evren Modeli

Bu yeni kozmolojik model KM ve KE arasındaki etkileşimi açıklamak için Lotka - Volterra tipi denklemlere dayalı yeni bir çözüm önermektedir. Lotka - Volterra tipi denklemler bazı şartlar altında kaotik davranışlara neden olabilmektedir. Bu yaklaşım evrenin karanlık bileşenleri arasındaki etkileşimin kaotik olduğunu ve aynı şekilde evrenin kozmik zaman içerisindeki evriminin de kaotik olabileceğini göstermektedir. Bu modelin çıkış noktası

Friedman-Robertson-Walker (FRW) uzay-zaman metriğine dayanmaktadır ve KM ile KE arasında yeni bir etkileşim yaklaşımı sunmaktadır. Öncelikle KM ve KE arasındaki etkileşim Lotka - Volterra tipi denklemlerle tanımlanır. Daha sonra evrende iki bileşenden daha fazla bileşenin olduğunu ve bunların etkileşimlerini de göz önüne alarak elde edilen Lotka - Volterra tipi denklemler daha genel bir etkileşim denklemi olarak yazılır.

Basit olarak KM ve KE arasındaki etkileşim denklemleri

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_{de} + p_{de}) = -Q, \tag{2.55}$$

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H(\rho_{dm} + p_{dm}) = Q, \tag{2.56}$$

olarak verilir. Bu modelde diğer etkileşim modellerinden farklı olarak karanlık maddenin de bir basıncı olduğu varsayılmaktadır. Karanlık maddenin yoğunluğunun zamanla değiştiğini kabul edersek KM'nin basıncının sıfır olması gerektiği varsayımı doğruluğunu yitirmektedir. KM' nin basınca olan katkısının Van der Walls gazı benzeri hacim dışlanmasından kaynaklanabileceği belirtilmektedir (Aydıner, 2018). KM' nin küçükte olsa bir basınca sahip olması hal parametresinin sıfırdan farklı olmasını gerektirir. Diğer bir ifade ile $p_{dm} > 0$ için hal parametresi $W_{dm} > 0$ olarak verilebilir. Bu durumda FRW denklemi KM' nin basıncı eklenerek yeniden yazılabilir. Bu modelde etkileşim terimi basit olarak $Q = \pm\gamma\rho_{dm}\rho_{de}$ seçilmiştir. Burada γ etkileşim sabiti olarak verilir. Sonuç olarak denklemler

$$\dot{\rho}_{de} + 3H(\rho_{de} + p_{de}) = -\gamma\rho_{dm}\rho_{de}, \tag{2.57}$$

$$\dot{\rho}_{dm} + 3H(\rho_{dm} + p_{dm}) = +\gamma\rho_{dm}\rho_{de}, \tag{2.58}$$

şeklinde yazılır. $\gamma > 0$ ise, etkileşim karanlık maddenin karanlık enerjiye dönüştüğü durumu, $\gamma < 0$ ise karanlık enerjinin karanlık maddeye dönüştüğü durumu önerir. KM ve KE için basınç değerleri $p_{dm} = \rho_{dm}w_{dm}$ ve $p_{de} = \rho_{de}w_{de}$ olarak denklemlerde yeniden yazılırsa

$$\frac{d\rho_{de}}{dt} = -3H(1 + w_{de})\rho_{de} - \gamma\rho_{dm}\rho_{de} \tag{2.59}$$

$$\frac{d\rho_{dm}}{dt} = \gamma\rho_{dm}\rho_{de} - 3H(1 + w_{dm})\rho_{dm} \tag{2.60}$$

olarak verilir. KM ile KE için seçilen hal parametreleri $w_{de} < -1$ için $r_1 = -3H(1 + w_{de})$ ve

$w_{dm} \geq 0$ için $r_2 = 3H(1+w_{dm})$ yazılabilir. r_1 ve r_2 etkileşim oranı parametreleridir. Böylece

$$\frac{d\rho_{de}}{dt} = r_1\rho_{de} - \gamma\rho_{dm}\rho_{de} \tag{2.61}$$

$$\frac{d\rho_{dm}}{dt} = \gamma\rho_{dm}\rho_{de} - r_2\rho_{dm} \tag{2.62}$$

elde edilir. Bu bağlamda γ, ρ_{dm}, ρ_{de}, r_1 ve r_2 arasındaki ilişkiye göre $x_1 = \frac{\gamma}{r_2}\rho_{de}$ ile $x_2 = \frac{\gamma}{r_1}\rho_{dm}$ olarak tanımlanabilir. Denklemler (2.59), (2.60), (2.61) ve (2.62); x_1 ve x_2 terimleri yardımıyla sabit ya da çok yavaş değişen bir Hubble parametresi için çözüldüğünde aşağıdaki denklemlere dönüşür.

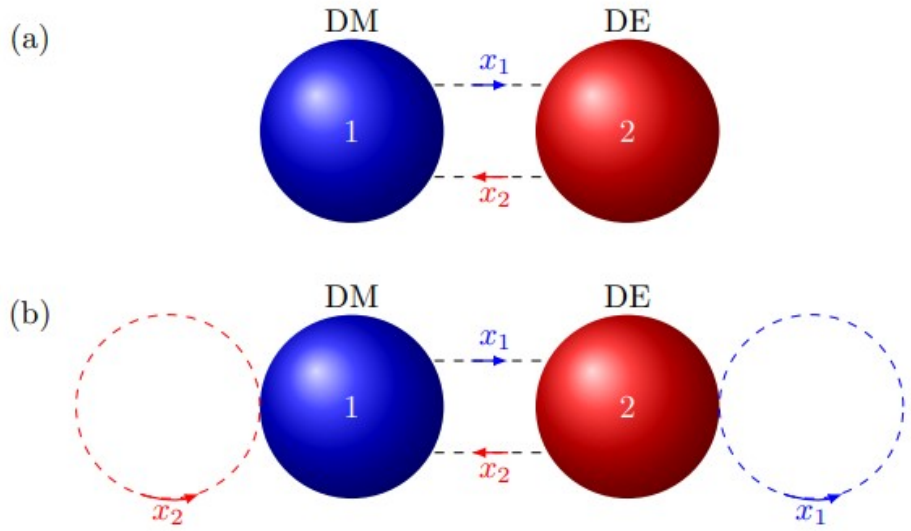
$$\frac{dx_1}{dt} = r_1x_1(1-x_2) \tag{2.63}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = r_2x_2(x_1-1) \tag{2.64}$$

Görüldüğü gibi seçilen etkileşim terimi ile Friedman denklemlerinden yola çıkarak KM ve KE arasındaki etkileşim denklemleri Lotka -Volterra tipi denklemler cinsinden yazılabilmiştir. Bilindiği gibi Lotka - Volterra tipi denklemler Biyoloji, Kimya gibi Fen Bilimleri alanlarında yaygın olarak kullanılan iki farklı tür arasındaki (av -avcı) ilişkiyi gösteren denklemlerdir (Lotka, 1925; Volterra *ve diğ.*, 1927). Burada KE ve KM için sırasıyla hal durum parametreleri $w_{de} < -1$ için $r_1 > 0$, $w_{dm} \geq 0$ için $r_2 > 0$ olur. Elde edilen denklem farklı hal durum parametrelerine bağlı olarak farklı çözümler verir. Denklemdeki türevlerin her ikiside sıfır olduğunda dengeye ulaşılır. Bu durum denklemin sabit noktalarına karşılık gelir. Sabit noktaların kararlılığı KM ile KE arasındaki etkileşimin nasıl olduğunu belirler. Denklem evrenin birden fazla bileşenden oluştuğu düşünüldüğünde üç ve daha fazla etkileşime giren bileşen için genelleştirilebilir. Daha genel bir etkileşim denklemi, öz-etkileşimi (self-interaction) temsil eden ikinci dereceden terimler eklenerek

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i\sum_{j}^{N} r_{ij}(1-x_j) \qquad\qquad i = 1,...,N \tag{2.65}$$

şeklinde yazılır(Aydıner, 2018). Kaotik yaklaşımda KM ve KE arasındaki etkileşim av-avcı arasındaki rekabete karşılık gelmektedir. Bu denklem numerik olarak çözüldüğünde ve analiz edildiğinde etkileşen $N = 3$ bileşen ve daha fazla bileşen için evrenin karanlık enerji, karanlık madde ve madde arasındaki etkileşimlerinden dolayı kaotik davranışın ortaya



Şekil 2.1: Karanlık madde ve karanlık enerji arasındaki öz etkileşimi içeren yeni etkileşim şeması

çıkabileceğini göstermiştir. Bu yaklaşımın temel felsefesi farklı bileşenler veya türlerin birbirini tüketmesine dayanmaktadır. Ancak bu durum korunum yasalarını ihlal edebilir. İstatiksel termodinamik kuramlarına göre değerlendirildiğinde bu etkileşim yönteminin eksik noktaları olduğu söylenebilir. Aydıner *Karanlık Madde ve Karanlık Enerji Arasındaki Kaotik Etkileşimler* çalışmasında etkileşim için daha geniş kapsamlı termodinamik davranışları içeren yeni bir yöntem sunmaktadır (Aydiner, 2023).

2.4.2. Karanlık Madde ve Karanlık Enerji Arasındaki Kaotik Etkileşimler

Karanlık madde ve karanlık enerjiyi yeni bir etkileşim şemasında açık ve etkileşimli bir termodinamik sistem olarak ele alan bu teorik yaklaşım, etkileşim denklemlerinin termodinamiğin birinci yasasından türetilebileceğini göstererek yeni bir bakış açısı sunmaktadır. Bu modelde karanlık madde ve karanlık enerji, karşılıklı etkileşen büyük kanonik termodinamik sistemler olarak kabul edilerek KM ve KE sırasıyla, Sistem-1 ve Sistem-2 olarak referans verilir.

Sistem-2 ile etkileşime giren Sistem-1 için süreklilik denklemi şu şekilde verilir:

$$\frac{d\rho_1}{dt} + 3H(\rho_1 + p_1) = \frac{dX}{dt} \tag{2.66}$$

Burada X Prigogine yaklaşımına (Prigogine *ve diğ.*, 1988) dayanan Sistem-2' nin kaynak terimidir. X' in değişimi $X = \Gamma_1 x_2$ olarak tanımlanır ; x_2 Sistem-1' den Sistem-2' ye enerji akışı, Γ_1 Sistem-1' den aktarılan enerji miktarını belirleyen enerji aktarım hızı olarak verilir. Bu yaklaşım iki teorem şeklinde ele alınmıştır.

Teorem 1: Dengede olmayan eşleşen iki sistem arasındaki etkileşim denklemi, termodinamiğin enerji korunumu yasasından elde edilebilir.

$$\frac{dx_1}{dt} = \Gamma_1 x_2 - x_1 \tag{2.67}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \Gamma_2 x_1 - x_2 \tag{2.68}$$

Termodinamik yasalarına göre açık ve etkileşimli iki sistem arasında etkileşim, sistemlerin aralarındaki enerji ve parçacık alışverişi ile tanımlanır. Herhangi bir açık termodinamik sistem için Termodinamiğin Enerji Korunumu Yasası şu şekilde verilir:

$$dU = \delta Q - p\delta V + \mu \delta N \tag{2.69}$$

burada dU sistemin enerji değişimini, δQ ısı değişimini, p basıncı, δV hacim değişimini belirtir. μ kimyasal potansiyeli ve δN sistemdeki parçaçacık değişimini temsil etmektedir. İki açık termodinamik sistem için sabit hacimde ($\delta V = 0$) enerji korunumu denklemleri şu şekilde verilir:

$$dU_1 = \delta Q_1 + \mu_1 \delta N_1 \tag{2.70}$$

$$dU_2 = \delta Q_2 + \mu_2 \delta N_2 \tag{2.71}$$

Termodinamiğin Enerji Korunumu Yasasına göre de her iki sistem için ayrı ayrı enerji korunumu, zamana bağlı formda aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\frac{dU_1}{dt} = \frac{dQ_1}{dt} + \mu_1 \frac{dN_1}{dt} \tag{2.72}$$

$$\frac{dU_2}{dt} = \frac{dQ_2}{dt} + \mu_2 \frac{dN_2}{dt} \tag{2.73}$$

Bu denklemlerin, sistemler arasındaki etkileşimi temsil etmediği iki açık termodinamik sistem için bağımsız enerji değişimini ifade ettiği görülür. Bu yeni yaklaşım, sistemler

arasındaki etkileşimin onları birbirine bağladığını ve sistemler arasında enerji akışı olacağını kabul ederek enerji akışını x_1 ve x_2 enerji akıları olarak veriyor. Bu akılar iki sistem arasındaki enerji ve parçacık değişimlerini temsil etmektedir. Enerji akışının çift yönlü olmasının yanında, kaynağa bağlı olarak yazılması gerektiğini savunan bu teoride kaynakta meydana gelen değişim *öz-etkileşim* (self-interaction) olarak temsil edilir. Ancak Denk. (2.67) ve Denk. (2.68) etkileşen sistemlerin, döngüsel etkileşim dinamiklerini tanımlamakta yeterli değildir. Etkileşimi tam olarak tanımlamak için holonomik olmayan vektörel değişkenler Γ_1, Γ_2 ile öz-etkileşim döngülerinin katkısı tanımlanmalıdır. Sistemde bu değişkenlerin varlığı başka itici vektörel kuvvetlerinde olması gerektiğini gösterir. Bu sebeple bu yaklaşım, etkileşim şemasını tamamlamak için öz-etkileşim döngülerinin katkısını da ele alıyor.

Teorem 2: Holonomik olmayan zamana bağlı enerji aktarımı hızı parametreleri Γ_1 ve Γ_2 gizli vektörel alanlardan elde edilebilir.

$$\frac{d\Gamma_1}{dt} = 1 - x_1 x_2 \tag{2.74}$$

$$\frac{d\Gamma_2}{dt} = 1 - x_1 x_2 \tag{2.75}$$

Burada x_1, Sistem-1' den Sistem-2' ye enerji akışını temsil eder ve Sistem-2'ye etki eder. x_2 ise Sistem-2' den Sistem-1' e enerji akışını temsil eder ve Sistem-1' i etkiler. Sistem-1' deki enerji akışı x_2, Sistem-1' deki Γ_1 terimini değiştirir, aynı zamanda Γ_1 enerji akışı x_2' yi değiştirir. Benzer durum Sistem-2' deki dinamikler içinde geçerlidir. x_1 ve x_2 enerji akışları sistemler üzerinde döngüsel bir dinamik yaratır. Enerji akışının sistemler üzerindeki bu döngüsel dinamiği Γ_1 ve Γ_2 ile temsil edilen holonomik olmayan vektörel değişkenleri üretir. Ayrıca x_1 ve x_2 ' nin sistemler üzerindeki dönme akışı her iki sistemde de atalet momentumuna ve F_1, F_2 vektörel kuvvetlerine neden olur. Bu döngüsel dinamikler, vektörel çekici torklara ve vektörel çekici alanlar olarak adlandırılan vektörlere yol açar.

2.4.3. Tip-I etkileşim denklemi:

Sonuç olarak Teorem-1 ve Teorem-2 ışığında KM ve KE arasındaki tam etkileşim denklemleri şu şekilde verilebilir:

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= x_2x_3 - x_1 \\ \frac{dx_2}{dt} &= (x_3 - q)x_1 - x_2 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 1 - x_1x_2\end{aligned} \tag{2.76}$$

burada q kontrol parametresidir ve $q = \Gamma_1 - \Gamma_2$ olarak tanımlanır. Bu denklemler KM ve KE etkileşimlerinin dinamiklerini yöneten doğrusal olmayan (nonlineer) birleşik denklemlerdir. Aydıner önerdiği bu yeni etkileşim şemasını (Aydiner, 2023) kapalı ve açık termodinamik sistemlere uygulamıştır. Bu denklemlerin sayısal çözümleri ve farklı faz düzlemlerindeki faz uzayı çözümleri çalışmada ayrıntılı olarak verilmiştir. Kontrol parametresi q için hesaplanan Lyapunov üstellerinin pozitif değerleri kaotik durumları işaret etmektedir. Bu çalışmada verilen teoremler ve elde edilen doğrusal olmayan eşleşme denklemleri, ilk kez KM ile KE arasındaki etkileşimin kaotik olabileceğini gösteriyor. Ayrıca birbiriyle temas halinde olan termodinamik sistemlerin etkileşimine farklı bir bakış açısı getirdiği söylenebilir. Fizikte birbiriyle temas halinde olan termodinamik sistemlerdeki değişimler etkileşim olarak yorumlanır. Ancak bu değişimler karşılıklı etkileşimi temsil etmemektedir. Bu çalışma farklı bir bakış açısıyla, etkileşimlerin kaynağa bağlı olarak yazıldığında karşılıklı etkileşimin ortaya çıkacağını savunur. Birbirleriyle temas halinde olan termodinamik sistemler için ilk kez karşılıklı etkileşim kavramı önerilmiştir.

Denk. (2.76) $\delta Q \neq 0$, $\delta N \neq 0$ ve $dV = 0$ koşulları altında etkileşime giren iki açık termodinamik sistem için verilen etkileşim denklemleridir. Bu çalışma, elde edilen sonuçlara göre fizikte yeni bir önerme ortaya koymaktadır: *'Etkileşimli tüm parçacıkların ve termodinamik sistemlerin dinamikleri kaotiktir.' (Aydiner, 2023)* Bu yeni önerilen kanunun doğruluğunu ve evrenselliğini kanıtlamak için farklı koşullar altında etkileşen termodinamik sistemlerin dinamiklerini temsil eden yeni etkileşim denklemleri Aydıner tarafından önerilmiştir.

2.4.4. Tip-II etkileşim denklemi:

Etkileşen iki bağlı termodinamik sistemin öz-etkileşimleri Denk. (2.74) ve Denk. (2.75)' de verilmişti. Temas halinde dönmeyen katı sistemler için bu denklemler aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{d\Gamma_1}{dt} = -x_1 x_2 \tag{2.77}$$

$$\frac{d\Gamma_2}{dt} = -x_1 x_2 \tag{2.78}$$

$\delta Q \neq 0$, $\delta N = 0$ ve $dV = 0$ koşulları altında etkileşen iki kanonik termodinamik sistem için karşılıklı etkileşim denklemi

$$\frac{dx_1}{dt} = \Gamma_1 x_2 \tag{2.79}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \Gamma_2 x_1 \tag{2.80}$$

şeklinde yazılır. Denklemlerin birlikte çözümünden bağlı ve etkileşimli iki kanonik termodinamik sistem için tam etkileşim denklemi

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= (x_3 - q)x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 1 - x_1 x_2 \end{aligned} \tag{2.81}$$

olarak elde edilir. Denk. (2.81) doğrusal olmayan bir denklemdir ve etkileşimli termodinamik sistemlerin dinamiklerini ısı transferi yoluyla açıklar. Bu denklemlere ait faz uzayı çözümleri ve Lyapunov üstelleri, keyfi olarak seçilen q kontrol parametresi değerleri ile x_1 ve x_2 için elde edilen çözümler, sistemler arasındaki etkileşimin kaotik olduğunu gösterir (Aydiner, 2023).

2.4.5. Tip-III etkileşim denklemi:

Bu kısımda $\delta Q \neq 0$, $\delta N \neq 0$ ve $dV \neq 0$ koşulları altında etkileşim denklemleri elde edilmiştir. Etkileşim sırasında termodinamik sistemlerin hacminde değişiklik olabilir ve bu durum sistemlerin dinamiği üzerinde çalışmayı zorlaştırır. Hacimdeki değişiklik hesaba katıldığında sistem üzerinde yapılan iş $\delta W = -Pdv$ olarak tanımlanır. Bu koşullar altında Denk. (2.81) aşağıdaki gibi verilir:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 x_3 - x_1 \int_0^\tau x_1(t)dt \\ \frac{dx_2}{dt} &= (x_3 - q)x_1 - x_2 - \int_0^\tau x_2(t)dt \\ \frac{dx_3}{dt} &= 1 - x_1 x_2 \end{aligned} \tag{2.82}$$

Bu denklemde yer alan integral terimleri, termodinamik sistemlerin enerji depolama kapasitesini göstermektedir. İntegral terimler doğrusal olmayan ifadeler içermedikleri için Denk. (2.82)' nin çözümüne sabit değerde katkı sağlar. Sabit bir q değeri için sistemin enerji depolama kapasitesini temsil eden integral terimlere verilen değerlere göre yapılan numerik çözümler sistemin davranışlarını analiz etmemizi sağlar. Sistemdeki kaotik dinamikler enerji depolama kapasitesine bağlı olarak gözlenebilir(Aydiner, 2023).

2.5. KAOS FİZİĞİ

Klasik fizikte Newton'nun hareket yasaları cisimlerin ve sistemlerin basit hareketlerini doğrusal diferansiyel denklemlerle tanımlamakta başarılıdır. Bu denklemlerin genel çözümü analitik fonksiyonlardan oluşan bir uzayı temsil eder. Fiziksel bir sistemi temsil eden diferansiyel denklemin belirlenen başlangıç koşullarındaki çözümü, bu uzayın içinden bir fonksiyona karşılık gelir. Başlangıç koşulları, ele aldığımız fiziksel sistemin konumunun, yönünün, hızının vb. durumlarının bilinen sayısal değerleridir. Bu sonuç bizi *Determinizm* kavramına götürür. Eğer sistem için başlangıç koşullarında analitik çözümler mevcutsa sistemin şu andaki durumu bir önceki durumunun sonucudur. Bu durum bizi her olay ve hareketin önceden kestirilebileceği anlayışına götürür. Aynı şekilde sistemin sonraki durumu da kestirilebilir. Ancak birçok gerçek sistem için bu kestirilebilirlik pekte mümkün

değildir. Fiziksel sistem için değişkenlerin sayısı arttıkça sistemi temsil eden diferansiyel denklemin içerdiği terim sayısı artar, denklemdeki terimlerin dereceleri yükselir yani sistem nonlineer olur. Doğrusal olmayan (nonlineer) denklemlerin analitik çözümleri belli olmadığı gibi başlangıç koşullarını da belirleyemeyiz. Bu belirsizlik bizi *kaos* kavramına götürür. Davranışı önceden öngörülemeyen dinamik sistemleri ya da onların davranışlarını kaos olarak nitelendirebiliriz. Kaos kelimesi, Türk Dil Kurumu sözlüğüne göre "Evrenin düzene girmeden önceki uyumsuz, karışık, biçimi olmayan durumu" olarak tanımlanmış olsa bile dünya genelinde kabul gören bir tanımı yoktur. Kaos düzensizliğin içindeki düzeni ifade eder ve genellikle özellikleri sayılarak tanımlanır. Kaos ilk defa Aydıner tarafından 'Etkileşen eşleşmiş, senkronize olmuş sistemlerin minimum eylemidir.' şeklinde tanımlanmıştır. (Aydiner, 2023; Yılmaz ve Aydıner, 2024).

2.5.1. Kaos Fiziğinin Felsefesi ve Tarihçesi

MS 1500' lü yıllarda nedensellik (sebep-sonuç) düşüncesi modern bilimin gelişimine yön vermeye başladı. Isaac Newton (1642–1727)'un cisimlerin ve sistemlerin durumu üzerine açıkladığı hareketin üç temel yasası, modern bilimde tamamiyle deterministik bir gelişmeye yol açtı. Bu yasalar, herhangi bir anda gerçekleşen olay veya hareket için şöyle bir durum tanımlaması yapar: şu andaki olay ve hareket önceki olay ve hareketin sonucu olduğu gibi, bundan sonra olacak olay veya hareket de şu andaki olay veya hareketin sonucu olacaktır. Ancak 20. yüzyılın başlarında determinizme karşı farklı görüşler ortaya çıkmıştır. Fransız matematikçi Jacques Hadamard, 1898 yılında başlangıç koşulunda yapılan küçük bir hatanın sistemin çıktısını tamamen değiştireceğini ve sistemin davranışlarının uzun dönem için tahmin edilemeyeceğini belirtti. Daha sonra ünlü Fransız matematikçisi ve düşünürü Henri Poincaré 1900 yılında Güneş sisteminin kararlı olup olmadığının kanıtlanamayacağını gösterdi (Crownover, 1995).

Newton yasaları iki gök cisminin hareketini açıklayabiliyorken birden fazla gök cismi ile daha karmaşık sistemlerin hareketlerini açıklamakta başarılı olamamıştır. Bu olgu *Üç Cisim Problemi* olarak adlandırılır. Poincare bu problemin çözümü için Güneş sistemini ele aldı. Güneş sisteminin hareketlerini temsil eden denklemin çözümünün başlangıç koşullarına hassas bağımlı olduğunu ve evrenin başlangıç koşulları bilinmediğinden güneş sisteminin de kararlı olup olmadığının asla öngörülemeyeceğini ispatladı. Böylece bu durumu 'kaos' olarak nitelendirdi (Hilborn, 2000).

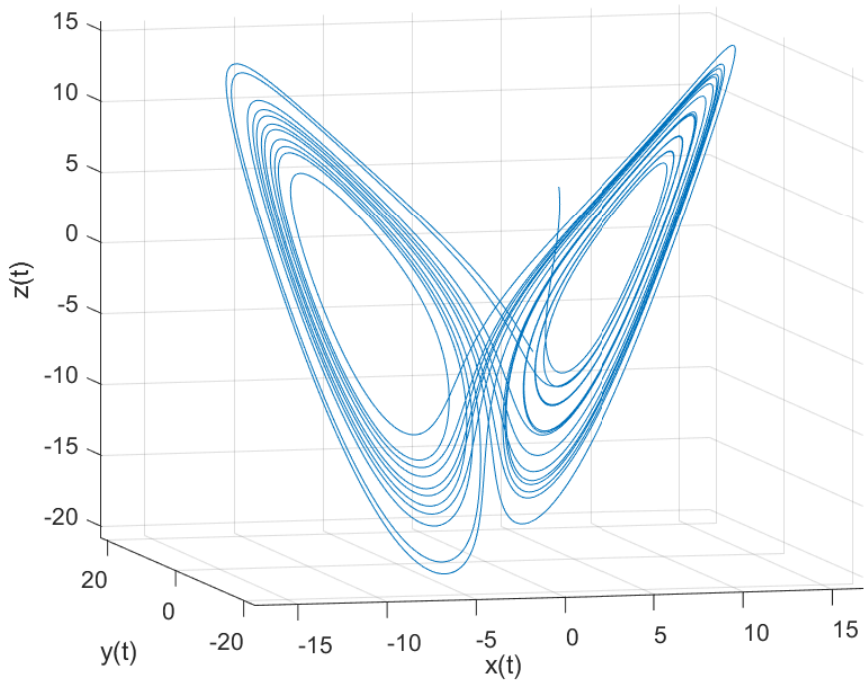
2.5.2. Kaosun Temel Kavramları

Bir meteorolog olan Edward Lorenz, 1963 yılında hava durumu tahminleri üzerine çalışırken hesaplamaları sırasında sisteme girdiği başlangıç koşullarında yaptığı çok küçük bir değişimin, hesaplamanın sonucunda çok büyük değişime neden olduğunu fark etti. Matematiksel olarak analitik çözümü olan bir dinamik sistem için süreklilik şartına göre birbirine yakın başlangıç değerleri için çözümde, birbirine yakın fonksiyon değerleri elde etmemiz gerekir. Ancak Lorenz, elde ettiği sonuçların hava durumu tahminleri için çok farklı olduğunu gördü. Lorenz' in bu gözlemi kaos fiziğinde *başlangıç koşullarına hassas bağımlılık* olarak tanımlanır. Lorenz' in *kelebek etkisi* olarak tanımladığı bu durum 'Amazon Ormanları'nda bir kelebeğin kanat çırpması, ABD'de fırtına kopmasına neden olabilir.' sözüyle ünlenmiştir.

Lorenz, akışkan bir gaz olan havanın ısı değişimine bağlı olarak hareketini tanımlamak için akışkanlar mekaniğinden faydalandı. Navier-Stokes denklemlerine benzer üç değişkenli, tek boyutta, sistemin zamanla değişimini temsil eden diferansiyel denklemleri

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \rho(y-x) \\ \frac{dy}{dt} &= -y - xz + rx \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz \end{aligned} \tag{2.83}$$

şeklinde tanımladı. Burada X değişkeni akışkanın zamana göre yerdeğiştirmesi ile ısıl aktarım, Y değişkeni yükselen ve alçalan akışkanın sıcaklık farkını veren oransal değişken, Z değişkeni ise akışkanın dikey konumu için sıcaklıkta meydana gelen değişimi ifade eden bir oransal değişkendir. ρ parametresi Prandtl sayısı (akışkanın vizkozite katsayısı), r Rayleigh sayısı (ısıtılan yüzeyin sıcaklık değişimi parametresi), b geometrik çarpan (akışkanın yatay hareketi ile dikey yükseklik arasındaki oran) olarak tanımlanır (Lorenz, 1963). Bu denklem fiziksel olarak sınırlı bir alan içerisindeki akışkanın alttan ısıtılan moleküllerinin yoğunluklarının azalması ile yukarı çıkması ve üstten soğuyan moleküllerin yoğunluklarının daha büyük olması ile aşağı inmesi durumunda oluşan hava akımının hareketini, ısınma şiddeti ve sıcaklık farklarına göre tanımlar. Lorenz farklı parametreler için bu denklem sisteminin çözümlerini inceledi. Bazı parametre değerleri için sistemin kaotik davranışlar

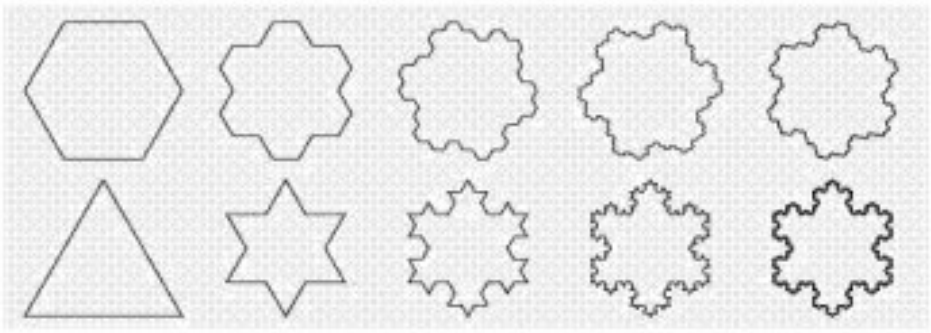


Şekil 2.2: Lorenz çekicisi

gösterdiğini gözlemledi. Bu parametre değerleri ise, $\rho = 10$, $r = 28$ ve $b = 8/3$ olarak verilir. Lorenz bu parametre değerleri için x, y, z noktalarının, üç boyutlu uzayda çizdiği yörüngeyi bilgisayarda çizdirdi ve ortaya çıkan grafikte yörünge çizgilerinin birbirini hiç kesmediğini ve iki nokta üzerinde yığıldığını belirledi. Literatürde bu yığılma nokatalarına *garip çekiciler* ya da *Lorenz çekerleri* adı verilir (Eckmann *ve diğ.*, 1985).

Kaos üzerine yapılan birçok çalışmada, farklı sistemler ve farklı başlangıç koşulları için hesaplamalar yapılmış, bu hesaplamalar sonucunda faz uzayı grafikleri ile garip çekerler elde edilmiştir. Çizidirilen bu grafiklerle elde edilen çekerler matematik diliyle tekrarlama (iteration) yoluyla elde edilmiştir. Ayrıca fonksiyonların sürekli olarak tekrarlanması yoluyla elde edilen şekillere *Fraktallar* denir. Fraktal şekiller, basit geometrik kuralların sürekli tekrarları sonucu oluşan şekillerdir.

Fraktal, 'kırılmış' anlamını taşıyan Latince 'fractus' kelimesinden türemiştir. Kendi kendini tekrar eden ama sonsuza kadar küçülen şekiller büyütüldüğünde cismin bütününe benzer. Tam tersini düşünürsek her bir parça, cismin bütününün küçültülmüş boyutlardaki, parçalara bölünebilen ve yine kendisine benzeyen bir kopyasıdır (Lefler, 2006). Doğa bize fraktal şekiller konusunda birçok örnek sunar. Ağaçlar, bulutlar, kıyı şeritleri, deniz kabukları,



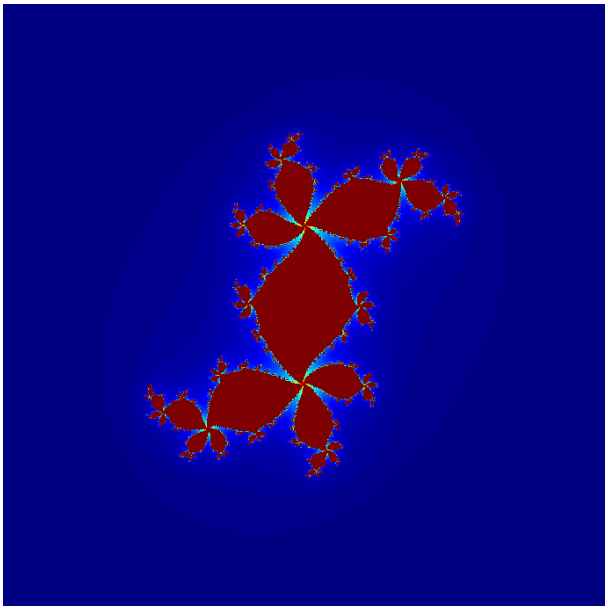
Şekil 2.3: Fraktal şekiller

eğrelti otu gibi bazı bitkiler fraktallara örnek olarak verilebilir.

Fraktal geometri başlangıç koşullarına hassas bağlılık gibi kaos teorisinin temelleri üzerine kurulmuştur. Bildiğimiz üzere Öklid geometrisinde cisimler tam sayı boyutunda ifade edilir. Şekiller boyutsuz nokta, tek boyutlu çizgiler ve eğriler, iki boyutlu ya da üç boyutlu katı cisimler olarak tanımlanır. Ancak doğada cisimler çoğu zaman tam sayı boyutlarında değildir. Tabiattaki şekiller çok daha karmaşıktır ve tam sayı değil kesirli boyutlara sahiptirler. Fraktalların bir başka özelliği de *kendine benzeme* olarak adlandırılır. Fraktal şekiller son derece karmaşık görünselerde farklı ölçek boyutlarında incelendiğinde süreklilik gösteren ve kendini tekrar eden daha küçük şekillerden oluşmuştur.

Fransız matematikçi Gaston Julia rasyonel hesaplamaların ve polinomların tekrarı üzerine çalışırken bugünkü fraktal şekillere dair ilk çalışmaları yapan kişidir (Johnson, 2024). Kendi adıyla anılan Julia kümesi $z = x + yi$ gibi bir karmaşık sayı için -2 ve 2 aralığında $z = z^2 + c$ fonksiyonunun tekrarlı çözümleri ile elde edilir. Burada c belirli bir karmaşık sayıdır. Değişen z değerleri için yinelemeler sonucu z' nin ikiden küçük değerleri için Julia kümesi tanımlıdır (Hossain *ve diğ.*, 2014).

Daha sonra 1960'lı yıllarda Benoit Mandelbrot, yaptığı çalışmalar sonucunda fraktal biçimlerin en önemlisi olarak kabul edilen, kendi adıyla anılan Mandelbrot Kümesini keşfetti (Mandelbrot, 1989). Benoit Mandelbrot 'İngiltere' nin kıyı uzunluğu gerçekte ne kadardır?' gibi basit bir sorudan yola çıkarak bu keşfini gerçekleştirdi. Bu sorunun cevabı çok kolay gibi görünebilir ama küçük boyutlarda baktığımızda kıyı uzunluğunun sürekli arttığı ve tam gerçek bir ölçüm değerinin elde edilemediği görülür. Basit bir düşünceyle, ölçek aracı olarak milimetrik bir cetvel kullanarak kıyı uzunluğunu ölçtüğümüzü varsayalım. Cetvelin ölçmedeki hassaslığı arttıkça, hatta atom boyutlarına kadar hassas ölçüm yaparsak, kıyı



Şekil 2.4: Julia kümesi

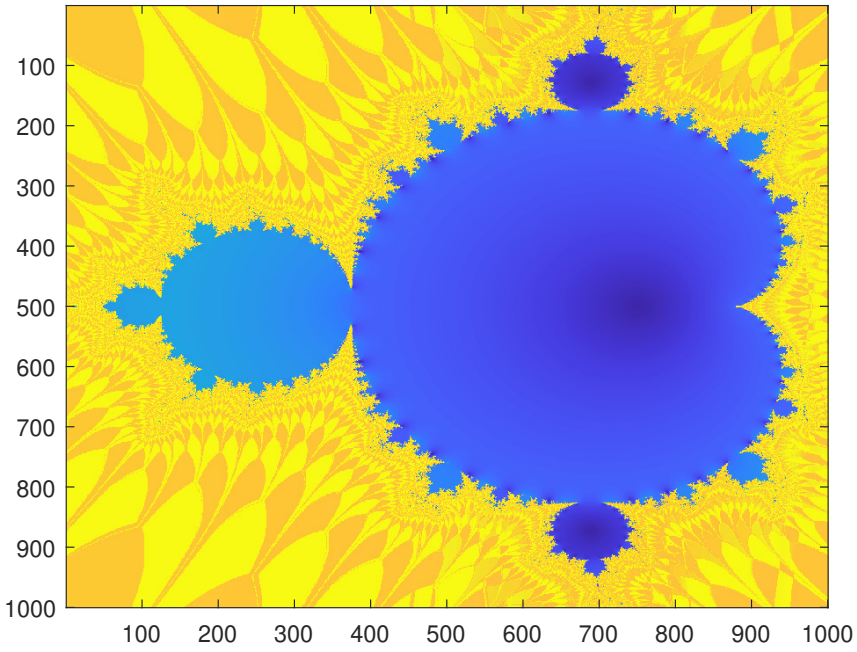
uzunluğu sürekli artar ve bu artış sonsuza kadar sürer. Bu beklenmedik sonuç matematikte fraktal geometri çalışmalarını başlattı. Fraktal geometri kaotik sistemlerle birçok ortak özelliğe sahiptir. Fraktalları üreten denklem ve fonksiyonların tekrarlı hesaplamaları sonucunda elde edilen veriler kaotiktir.

Mandelbort kümesi, küçük ölçeklerde sonsuz karmaşıklığa sahip geometrik bir şekil olarak tanımlanabilir. Mandelbrot kümesi, karmaşık sayılar kümesinde tanımlanan $f(z)$ fonksiyonunda z teriminin karesine bir sabit c karmaşık sayısının eklenmesiyle oluşturulur. Matematiksel olarak

$$z_{n+1} = z_n^2 + c \qquad\qquad n = 0,1,2,3,... \tag{2.84}$$

dönüşümü ile ifade edilir. Burada $z(0) = 0$ alınırsa c noktasının yörüngesine karşılık gelir. Herhangi bir karmaşık sayı seçip bu fonksiyonu tekrar tekrar çözdüğümüzde bazı c değerleri sonlu değerlere giderken, bazı c değerleri ise sonlu değerler vermez. Böylece yörüngesi sonlu olan c noktalarının oluşturduğu küme Mandelbrot kümesine karşılık gelir (Falconer, 2007).

Mandelbrot kümeleri ile ilgili bazı çıkarımları aşağıdaki gibi sıralayabiliriz:



Şekil 2.5: Mandelbrot kümesi

- Mandelbrot kümesi bir fraktaldır fakat her noktada kendine benzer değildir.
- Mandelbrot kümesi ikinci derece polinomların çözümü olan c düzlemi ya da parametre uzayı olarak tanımlanır.
- Mandelbrot kümesi yarıçapı 2 olan dairenin alanı ile sınırlıdır. Çünkü yarıçapı 2'den büyük olan daire için ikinci derece fonksiyonun çözümü sonsuza gider.
- Kümenin topolojik sınırında bulunan Misiurewicz noktaları kendisini tekrarlayan benzer şekiller oluşturur ve bu şekiller sonsuza ıraksar. Bu yüzden Mandelbrot kümesinin kenar uzunluğu sonsuzdur.

3. MALZEME VE YÖNTEM

3.1. MODİFİYE ETKİLEŞİM DENKLEMİ

Bu bölümde, karanlık madde ve karanlık enerji etkileşiminin özel bir halini inceleyeceğiz. KM ve KE etkileşimlerine klasik yaklaşımların dışında farklı bir bakış açısı getiren karanlık madde ve karanlık enerji arasındaki kaotik etkileşimler yaklaşımında, Aydıner' in önerdiği (Aydiner, 2023) etkileşim şemasını (**Şekil 2.1:**) kullanarak etkileşim denklemi (2.81)' i aşağıdaki gibi modifiye ederek elde ettiğimiz

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= (x_3 - q)x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= (1 - \sin x_1)\sin x_2 \end{aligned} \tag{3.1}$$

denklemlerinin kaotik davranışlarını analiz edeceğiz. Aydıner'in sunduğu etkileşim denklemleri termodinamik sistemlerin etkileşimlerinin kaotik olabileceğini gösterdi (Aydiner, 2023). Bizde bu bölümde ele aldığımız modifiye etkileşim denklemi (3.1) için zaman serilerini elde edip denklemin temsil ettiği sistemlerin davranışlarının kaotik analizini yapacağız.

3.2. KAOTİK ZAMAN SERİLERİ ANALİZİ

Düzenli davranışlar gösteren dinamik sistemlerde, başlangıç koşullarında meydana gelen çok küçük parametre değişiklikleri bile sistemin davranışlarında kaos yaratabilmektedir. Kaos, deterministik bir sistemin düzensiz yani hiç beklenmedik bir şekilde davranabilmesidir. Kaos genellikle kararsız, karmaşık ve doğrusal olmayan sistemlerde ortaya çıkmaktadır. Karmaşık sistemler, çok sayıda elemanın birbiriyle etkileştiği, pek çok serbestlik derecesi olan yani çeşitli davranış şekilleri gösterebilen, genellikle de dışarıyla madde ve enerji alışverişi yapan, incelenmesi zor sistemlerdir. Doğrusal olmayan bir sistemde, değişimlerin belirli bir sırası ya da kuralı yoktur. Dışarıdan gelebilecek etkilere karşı sistemden beklenmeyen davranış

biçimleri görülebilir.

Kaos konusunda bilimsel anlamda ilk araştırma, bir meteorolog olan Lorenz'in 1963 yılında sıvılardaki türbülans hareketi ile ilgili bir çalışma yapması ile başlamıştır (Lorenz, 1963). Lorenz'in çalışmasındaki denklem sisteminin sayısal çözümü, düzenli olmayan hareketler içermekteydi. Kaotik analizde 1970'li yıllardan sonra yeni yöntemler ortaya konmuştur. Ruelle ve Takens 1971 yılında sıvılardaki türbülans durumunu açıklarken tuhaf çekici (strange attractor) kavramını ortaya atmışlardır (Ruelle ve Takens, 1971). Tuhaf kaotik çekiciler pozitif Lyapunov üsteli çekicisi olarak adlandırılır (Kostelich ve Schreiber, 1993). Başlangıç koşullarına aşırı duyarlılık gösterir ve zaman içindeki gelişimi tahmin edilemez.

Zaman Serileri : Zamana bağlı olarak değişen bir değişkenin, belli zaman aralıkları ile düzenli olarak kaydedilmesine *zaman serisi* denir. Bir zaman serisindeki veri kendinden önceki verinin sonucu olduğu gibi kendinden bir sonraki veriye de kaynaklık eder. Günümüzde kayıt altına alınan bir çok zaman serisi vardır. Bunlara örnek olarak borsa kayıtları, döviz kuru kayıtları, pandemi kayıtları verilebilir. Bu kayıtlar gün geçtikçe daha detaylı ve doğru olarak tutulmaya başlanmıştır. Zaman serileri analiz edilerek birçok veriye ulaşılabilir, yakın zamanda bu tür çalışmalara örnek olarak (Nutku, 2024; Tian, 2023; Yılmaz *ve diğ.*, 2023) verilebilir. Zaman serileri elde etmenin bir diğer yolu birbirine bağlı olan denklemlerin numerik olarak çözülmesi ve çözümlerin her bir adımındaki değerlerinin kayıt altına alınması ile olabilir.

Lyapunov Üstelleri : Lyapunov üstelleri λ ile temsil edilen kaotik sistemler için başlangıç koşullarına olan duyarlılığın bir ölçüsüdür. Faz uzayında başlangıçta birbirine yakın yörüngelerin üstel olarak farklılaşmasını temsil eder. Eğer λ negatif ise farklı başlangıç şartları aynı çıkış değerlerini vermeye meyillidir ve dolayısıyla gelişme kaotik değildir. Eğer λ pozitif ise farklı başlangıç değerleri farklı çıkış değerleri verir yani hareket kaotiktir (Yılmaz *ve diğ.*, 2006). m boyutlu bir sistemde azalan sırayla verilen m adet Lyapunov üsteli $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ bulunur. Sürekli sistemler diferansiyel denklem olarak,

$$\frac{dx(t)}{dt} = F(x(t)) \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Denk. (3.2) ile tanımlanan bir sistemi düşünelim. Denklemin her iki tarafının varyasyonu alındığında, x(t) teğet uzayda sonsuz küçük vektör değişimi δx evrimini

veren denklem elde edilir:

$$\frac{d\delta x}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\delta x. \tag{3.3}$$

Denk. (3.3) çözümünden,

$$\delta x(t) = A^t \delta x(0) \tag{3.4}$$

elde edilir. Burada $A^t = exp(\int(\partial F/\partial x)dt)$ olarak verilir ve 0 ' dan t zamanına kadar sonsuz küçük vektör oluşturan doğrusal bir operatördür. Teğet vektörün ortalama üstel sapma oranı,

$$\lambda[x(0), \delta x(0)] = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \ln |\frac{\delta x(t)}{\delta x(0)}| \tag{3.5}$$

şeklinde ifade edilir (Liu, 2010). Lyapunov üstelleri şu şekilde verilmiştir:

$$\lambda_i \equiv \lambda[x(0), e_i] \tag{3.6}$$

burada e_i, m boyutlu temel bir vektördür. Açıkça görülüyor ki her Lyapunov üsteli çekici üzerindeki yerel sapma oranlarının tamamının ortalamasıdır.

Bir zaman serisinin kaotik olup olmadığını kontrol etmenin en kolay yolu λ_1' i yani maksimum Lyapunov üstelini (λ_{max}) hesaplamaktır. Bunun nedeni, kaotik bir yörüngenin maksimum harcama yönüne gitme eğilimidir. Sayısal olarak λ_{max} aşağıdaki gibi hesaplanabilir. Birbirine çok yakın iki başlangıç noktası seçelim ve aralarındaki mesafe $d_0 << 1$ olsun. Daha sonra küçük bir zaman aralığı τ için dinamik sistem entegre edilirse noktalar arasındaki mesafe d_i olacaktır. Yörünge çekicinin sınırına ulaştığında d mesafesi katlanarak büyümeyecektir. Yeniden normalleştirme yapıldığında bu sorunun üstesinden gelinir ve entegrasyonu tekrar yaparak başka bir d mesafesi elde ederiz. Bu şekilde,

$$\lambda_{max} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^{n} \ln \frac{d_i}{d_0} \tag{3.7}$$

elde edilir.

Faz Uzayı : Faz uzayı, bir sistemin tüm dinamik değişkenlerini kapsayan soyut matematiksel uzaydır. Dinamik sistemin olası her durumu faz uzayında bir nokta ile temsil edilebilir.

Sürekli bir dinamik sistemde değişkenlerin değerleri zaman içinde değiştikçe sistemin durumunu tanımlayan nokta kesintisiz bir eğri çizer. Ayrık sistemlerde her durumu temsil eden bu noktalar sıralı bir nokta dizisi oluşturur. Mekanik sistemler için genellikle konum ve momentum değişkenlerinin tüm olası durumları faz uzayını oluşturur. N adet dinamik değişkene sahip bir sistemin belirlenen bir zamandaki durumu, N boyutlu Öklid uzayında (R^n) bir nokta ile örneklendirilir. İdealleştirilmiş basit bir sarkaç için faz uzayı temsilini inceleyelim. Sarkaç sistemi için açısal konum θ ve hız $\dot{\theta}$ olmak üzere iki fiziksel dinamik değişken vardır, dolayısıyla faz uzayı iki değişken ile R^2 olarak tanımlanabilir. Sistemde enerji korunuyorsa ve açısal salınımlar küçükse, $E = \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}\theta^2$ olur ve faz uzayı değişkenleri bir daire üzerinde temsil edilir. Sistemin enerjisi ne kadar büyükse değişkenlerin faz uzayında temsil ettiği dairenin yarıçapı o kadar büyük olur. Gerçek fiziksel bir sarkaç için hava direnci ve sürtünmeler sarkacın dinamiğinde ve hareketinde söz sahibidir. Yani sarkacın enerjisi bir süre sonra bu etkenlerden dolayı azalacaktır. Bu durumda faz uzayı yolu, sabit nokta çekicisi adı verilen son dinlenme noktasına doğru giden bir sarmaldır. Bir çok fiziksel sistemin uzun süreli dinamik davranışları, faz uzayındaki bir çekici tarafından tanımlanabilir (Henry *ve diğ.*, 2000).

Faz Uzayının Yeniden Oluşturulması : Bir dinamik sistem için ölçülen zaman serisi, sistemin davranışlarını temsil eden çekicinin bir ya da birkaç değişkeninden alınan skaler bir ölçümdür, fakat bir yörüngeyi temsil etmez. Bu nedenle öncelikle verilen zaman serisinden yörüngeyi bulmamız ve Lyapunov üstel hesaplamarını yörüngeye bağlı olarak yapmamız gerekir. Bu problem Takens (Takens, 1981) tarafından ortaya konulan gecikme-koordinat gömme tekniği ile matematiksel olarak çözülebilir. Takens' ın gecikme-koordinat gömme tekniği basit olarak şu şekildedir: Örnekleme aralığının Δt olduğu ölçülen bir zaman serisi $s(k) = s(t_0 + k\Delta t)$ 'den m bileşenlerinin aşağıdaki vektör miktarı oluşturulur:

$$u(t) = s(t), s(t+\tau), ..., s(t+(m-1)\tau), \tag{3.8}$$

burada $t = t_0 + k\Delta t$, τ Δt' nin tam sayı katı olan gecikme süresidir ve m gömme boyutudur. Burada hangi zaman gecikmesi τ değerinin ve hangi m boyutunun kullanılacağı belirlenir (Packard *ve diğ.*, 1980). Yeniden oluşturulan $u(t)$ vektörünün τ ve m' nin hangi koşulu altında bilinmeyen çekicinin gerçek yörüngesini temsil edeceği belirlenir.

Zaman Gecikmesi : Gömme teoremi, faz uzayının yeniden oluşturulmasında kullanılacak

zaman gecikmesinin seçimi konusunda bilgi vermez. Gecikme süresi τ Denk. (3.8)' deki değişkenlerin herbirinden bağımsız olmalıdır. Bu nedenle gecikme süresinin seçimi önemlidir. τ gecikme zamanı τ_s örnekleme zamanının bir katı olmalıdır. Eğer τ çok kısa seçilirse $s(t)$ ve $s(t+\tau)$ koordinatları birbirine çok yakın olacağından ayırt edilemezler ve o zaman içinde herhangi bir dinamiğin ortaya çıktığı gözlemlenemez. Eğer τ çok büyük seçilirse $s(t)$ ve $s(t+\tau)$ istatistiksel anlamda tamamen birbirinden bağımsız olacağından çeker üzerindeki bir yörüngenin izdüşümü birbirinden tamamen bağımsız iki yön üzerinde oluşur. Bu nedenle gecikme süresi, $s(t)$ ve $s(t+\tau)$ 'nin ayırt edilmesini sağlayacak kadar büyük olmalı, ancak istatiksel olarak birbirinden tamamen bağımsız olacak kadar da büyük olmamalıdır. Bu şartı sağlaması için zaman gecikmesi τ, karşılıklı bilgi $I(\tau)$ 'nın ilk minimum olduğu yer olarak seçilmelidir.

Karşılıklı Bilgi (Mutual Information) : Ölçülen bir veri sinyali $s(t)$ için olasılık dağılımını gösteren bir histogram oluşturabiliriz. Veri sinyalinin histogramın i. bölmesi içinde bir değer alma olasılığı p_i ile belirtilsin ve $p_{ij}(\tau)$, $s(t)$ ' nin i bölmesinde ve $s(t+\tau)$ ' nin j bölmesinde bulunma olasılığı olsun. Böylece zaman gecikmesi için karşılıklı bilgi,

$$I(\tau) = \sum_{i,j} p_{ij}(\tau) ln p_{ij}(\tau) - 2\sum_{i} p_i ln p_i \tag{3.9}$$

ile verilir. $\tau = 0$ durumunda yukarıdaki denklem ve ortak olasılıklar $p_{ij} = p_i \delta_{ij}$, veri dağılımının Shannon entropisini verir (Shannon, 1948). Karşılıklı bilginin değeri, iyi bir değer verildiğinde belirli histogram seçiminden bağımsızdır. Büyük τ değerinde $s(t)$ ve $s(t+\tau)$ ' nin birbirleriyle ve p_{ij} ile bağlantısı yoktur ve böylece $p_i p_j$ çarpanlarına ayrılır ve karşılıklı bilgi sıfır olur. Karşılıklı bilgi $I(\tau)$ doğrudan zaman serisi $s(t)$ 'den elde edilip yorumlanabilir. Ortalama karşılıklı bilginin diğer bir özelliği, koordinat sistemindeki düzgün değişiklikler altında değişmez olmasıdır.

Gömme Boyutu : Gerçek bir dinamik sistemi aslına uygun olarak oluşturmak için yerleştirme boyutunun yeterince büyük olması gerekir. Takens teoreminde bu m boyutlu uzay için bir alt sınır elde edilebilir. m boyutlu bir uzayda, d_1 boyutlu bir alt uzayın ve d_2 boyutlu başka bir alt uzayın genel olarak $d_I = d_1 + d_2 - m$ boyutlu alt uzaylarla kesiştiğini not ediyoruz. Eğer d_I negatifse, o zaman iki alt uzayın kesişimi yoktur.

Aynı d_A boyutuna sahip iki alt uzay yani yörünge için kendisiyle kesişip kesişmeme şartı

$2d_A - m < 0$ ya da $m > 2A$ olur. Bu şartlar sağlandığında kesişimler meydana gelmez. Bir d_A boyut dizisini yansımalardan daha düşük boyutlara açma sorunu, yansımalar yapılırken boyut dizisinin kendi kendisiyle kesişmesiyle ilgilidir. Tek bir nesneyi daha düşük boyutlara açmak için $m > 2d_A$ şartı sağlanmalıdır. Bu koşulu sağlayan en küçük m değeri, tam sayı olmak şartıyla gömme boyutuna m karşılık gelir (Liu, 2010).

4. BULGULAR

4.1. MODİFİYE ETKİLEŞİM DENKLEMİNİN ANALİZİ

Karanlık madde ve karanlık enerji etkileşimi için Aydıner tarafından önerilen ve denklem (2.81) de verilen Tip-II denklemini

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= x_2 x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= (x_3 - q)x_1 \\ \frac{dx_3}{dt} &= (1 - \sin x_1)\sin x_2 \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu Tip-II denkleminin modifiye halidir. Bu model için motivasyonumuz şu şekildedir: Sistem-2 deki öz-etkileşimin $(1-\sin x_1)$ ve Sistem-1 deki öz etkileşimin ise $\sin x_2$ şeklinde değiştiği kabulüne dayanmaktadır. Denklemlerdeki x_3 değişkeni, sistemler arasındaki x_1 ve x_2 enerji akışlarının sistemlerin üzerinde yarattığı döngüsel dinamiğin değişimini temsil etmektedir. Bu modifiye denklemler, KM ve KE arasındaki etkileşimi temsil etmektedir ve karanlık sektör arasındaki etkileşimini ısı transferi yoluyla açıklar. Bu bölümde denklem (4.1)'i analiz edeceğiz ve bulguları paylaşacağız.

4.2. SABİT NOKTALARIN HESAPLANMASI

Öncelikle denklemler için sabit noktaları hesaplayalım. Bu hesaplamayı yapmak için $f_1 = \frac{dx_1}{dt}$, $f_2 = \frac{dx_2}{dt}$ ve $f_3 = \frac{dx_3}{dt}$ olarak alalım. Fonksiyonların çözümünden sabit noktalar elde edilir. $f_1 = 0$, $f_2 = 0$ ve $f_3 = 0$ eşitliğinden

$$\begin{aligned} f_1 &= x_2 x_3 = 0 \\ f_2 &= (x_3 - q)x_1 = 0 \\ f_3 &= (1 - sinx_1)sinx_2 = 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

olarak yazılır. İlk denklemden $x_2 = 0$ ve $x_3 = 0$, ikinci denklemden $x_1 = 0$ ve $x_3 = q$ ve üçüncü denklemden $sinx_2 = 0$ ve $sinx_1 = 1$ olarak elde edilir. Başlangıç koşulları $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0,1$ ve kontrol parametresi $q = 15,2$ seçildiğinde denklemlerin MATLAB uygulaması ile numerik çözümlerinden sabit noktalar $(x_1, x_2, x_3) = (0,0,0)$ ve $(x_1, x_2, x_3) = (0.95, 11.2, 0.33)$ olarak elde edildi. Elde edilen sabit noktalar Brouwer sabit nokta teoremi (1911)'ne göre, tanımladığımız f_1, f_2 ve f_3 fonksiyonlarının çözümünün kapalı bir yörünge tanımlaması gerektiğini gösterir (Park, 1999).

Sabit noktalar $(x_1, x_2, x_3) = (0.95, 11.2, 0.33)$' in kararlılık analizini yapmak için Jacobian matris, 3-boyutlu nonlineer denklemimiz için çözülürse,

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & x_2 \\ x_3 - q & 0 & x_1 \\ -cosx_1.sinx_2 & cosx_1.cosx_2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0,33 & 11,2 \\ -14,8 & 0 & 0,95 \\ 0,55 & 0,15 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

çözümlerini elde ederiz. Sabit noktaların kararlı olup olmadığını belirlemek için Jacobian matris determinant çözümlerinden özdeğerleri elde etmemiz gerekir. Jacobian matris determinantı

$$det(J(P_i) - \lambda I) = 0 \quad (4.4)$$

şeklinde verilir. Burada P_i değişkenler, λ özdeğerler, I birim matrisdir. Sabit noktalar $(x_1, x_2, x_3) = (0.95, 11.2, 0.33)$ için determinant çözümü

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{vmatrix} -\lambda & 0,33 & 11,2 \\ -14,8 & -\lambda & 0,95 \\ 0,55 & 0,15 & -\lambda \end{vmatrix} \quad (4.5)$$

şeklinde yazılır. MATLAB programıyla yapılan çözümlerden $\lambda_1 = -3,13$, $\lambda_2 = 1,56 + 2,42i$, $\lambda_3 = 1,56 - 2,42i$ özdeğerleri elde edildi. Sonuçlardan görüldüğü gibi bir reel iki adet ise kompleks eşlenik özdeğerleri elde ettik. $\lambda_1 < 0$ olduğundan negatif bir özdeğer, λ_2 ve λ_3 ise reel kısımları sıfır olmayan kompleks eşlenik özdeğerlerdir. λ_2 ve λ_3 kompleks eşlenik özdeğerlerinin reel kısımları pozitiftir. J 'nin özdeğerlerinden en az birinin reel kısmının pozitif değer alması sabit noktaların kararsız olduğunu gösterir. Kompleks eşlenikler λ_2 ve λ_3 sabit noktaların kararsız olduğu spiral noktalara karşılık gelir.

4.3. ETKİLEŞİM DENKLEMLERİNİN KAOS ANALİZİ

4.3.1. Denklemlerden Zaman Serilerinin Elde Edilmesi

Denklemlerin temsil ettiği dinamik sistemlerin zaman içindeki davranışlarını tespit edebilmek için, belirlediğimiz başlangıç koşulları altında x_1, x_2 ve x_3 değerleri için zaman serisi grafiklerini çizdirmeliyiz. Başlangıç koşullarını $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0,1$ ve kontrol parametresi değerini $q = 15,2$ seçiyoruz. Denk. (4.1)' i nümerik olarak MATLAB programında çözdürdük. Elde ettimiz çözümlerden zaman serileri; x_1 zaman serisini **Şekil 4.1:**, x_2 zaman serisini **Şekil 4.2:** ve x_3 zaman serisini **Şekil 4.3:**'de grafik olarak çizdirdik.

4.3.2. Zaman Serilerinin Faz Uzayında Gösterilmesi

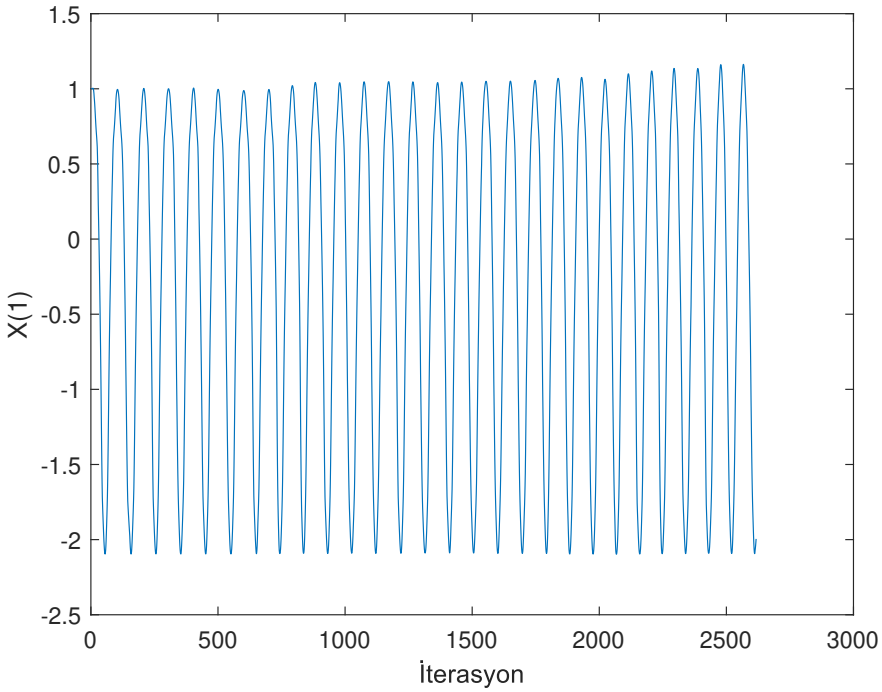
Modifiye denklemimiz (4.1) ' in $x_1(0) = 1, x_2(0) = 1, x_3(0) = 0,1$ ve $q = 15,2$ başlangıç koşulları ile zaman serilerini çizdirmiştik. Bu kısımda elde ettiğimiz zaman serilerinin faz uzayı görüntülerini çizdireceğiz.

Zaman serilerimizden x_1 zaman serisini x eksenine, x_2 zaman serisini z eksenine ve x_3 zaman serisini y eksenine alarak **Şekil 4.4:**'de üç boyutlu faz uzayı grafiğini çizdirdik. Bu grafikten açıkça görüldüğü gibi zaman serileri bir çeker etrafına yerleşmiştir. Burada çekerin görülmesi kaos analizi açısından önemlidir.

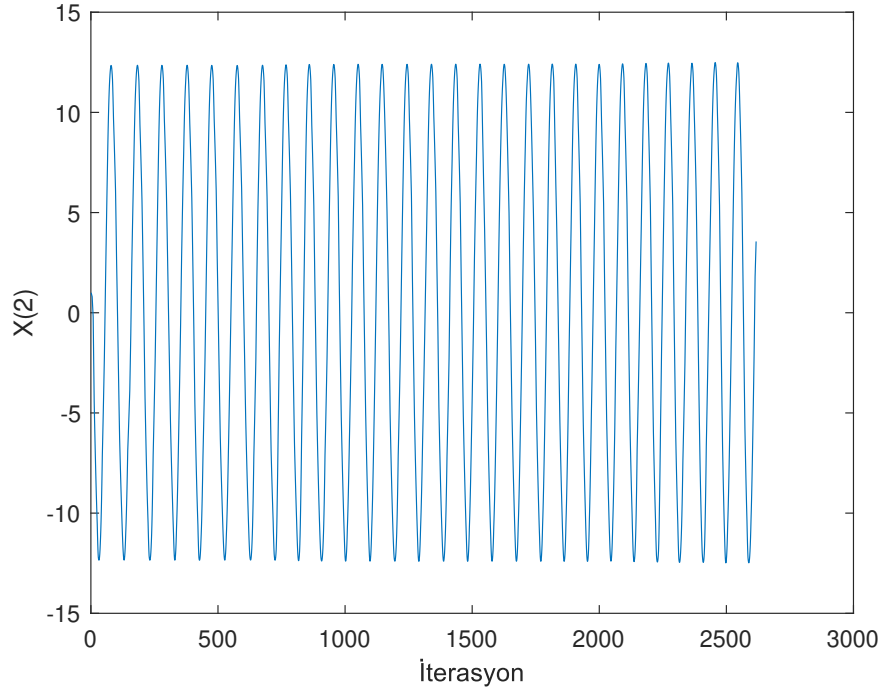
Zaman serilerinin üçünü birbirlerine karşı çizdirdiğimiz üç boyutlu faz uzayı grafiğinde bir çeker gözlemlemiştik. Şimdi bu zaman serilerini ayrı ayrı birbirlerine karşı çizdirerek faz uzayı görüntülerini elde edelim. Öncelikle x_1 zaman serisi ile x_2 zaman serisinin birbirlerine göre grafiklerinden oluşan faz uzayı görüntüsü **Şekil 4.5:**'de verilmiştir. Burada çok açık bir şekilde çeker görülmektedir. Bir nokta etrafında zaman serileri konumlanmıştır.

x_1 ve x_3 zaman serilerini birbirlerine karşı çizdirerek oluşturulan faz uzayı görüntüsü **Şekil 4.6:**'da verilmiştir. Burada belli bir bölgede kesikli olarak çizgiler oluşmuştur. Açık bir çeker görülmemektedir ancak zaman serileri rastgele dağılmamış ve bir bölgede kesikli çizgiler halinde kalmıştır. Bu zaman serilerinin gecikmeli koordinat ekseninde çizilen faz uzayı görüntülerinde çeker görülebilir. İlerleyen kısımlarda bu analizi de yapacağız.

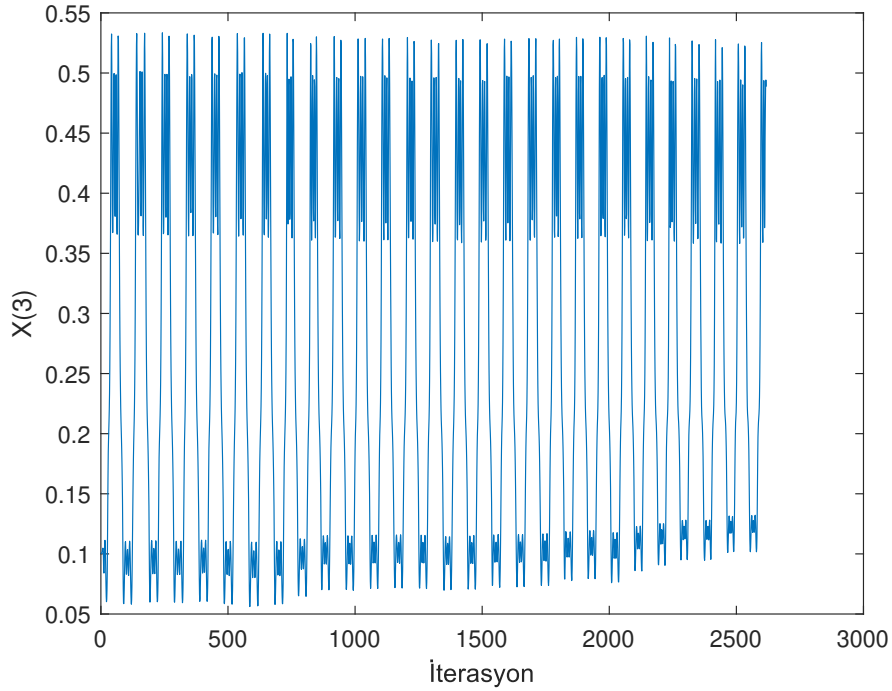
Zaman serilerinden x_2 ve x_3'ün birbirlerine karşı çizdirilmesi ile elde ettiğimiz faz uzayı



Şekil 4.1: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen x_1 zaman serisi grafiği.



Şekil 4.2: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen x_2 zaman serisi grafiği.



Şekil 4.3: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen x_3 zaman serisi grafiği.

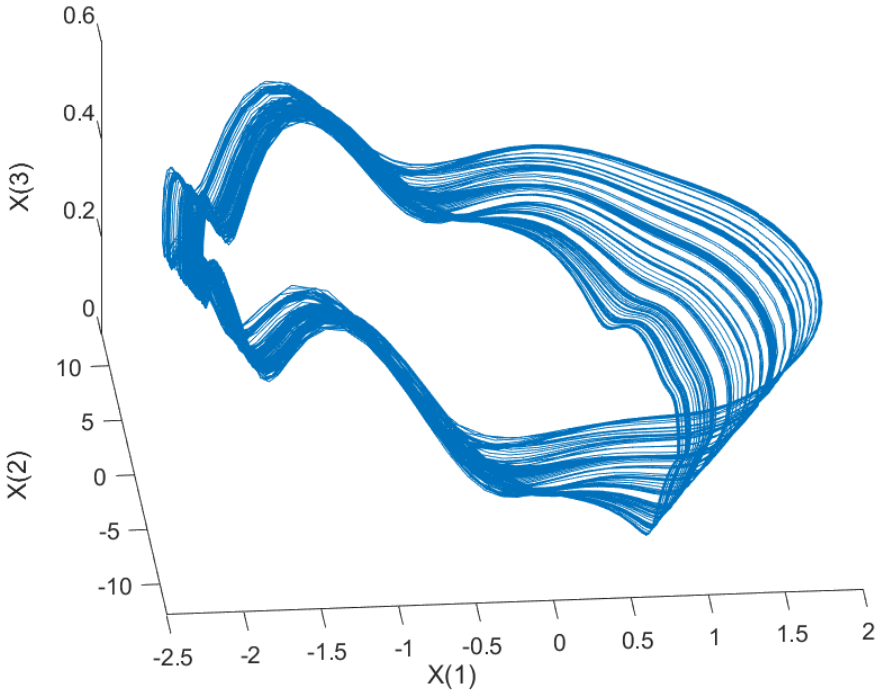
görüntüsü **Şekil 4.7:**'de verilmiştir. Bu faz uzayı grafiği incelendiğinde açıkça bir çeker görülmektedir.

4.3.3. Zaman Gecikmeli Koordinat Sisteminde Faz Uzayının Yeniden İnşası

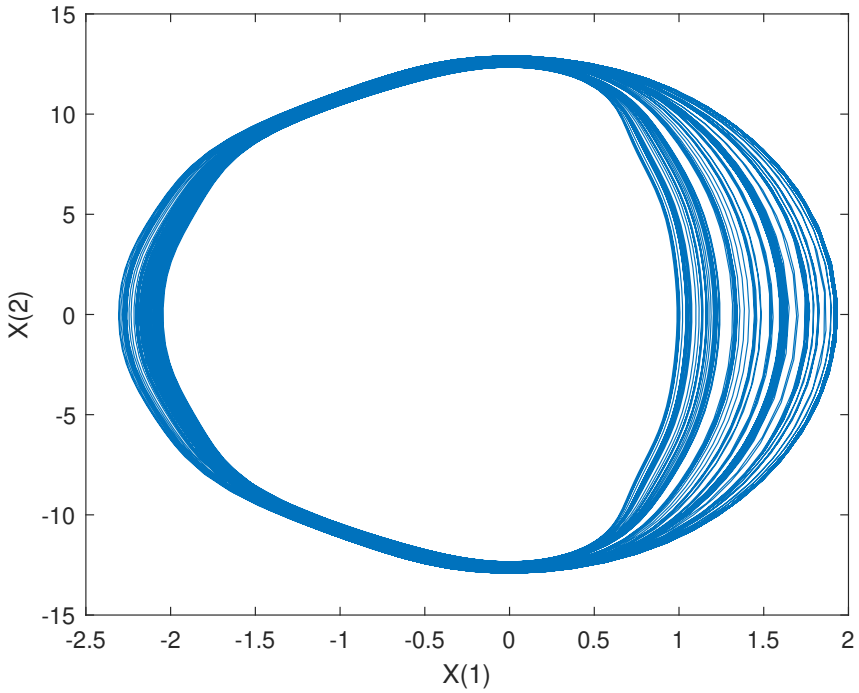
Zaman serilerinin, zaman gecikmeli koordinat sisteminde faz uzayı görüntülerini çizmek için öncelikle gecikme zamanının (τ) hesaplanması gerekmektedir. Denklem (4.1) için numerik çözümler yapmış ve x_1, x_2 ve x_3 zaman serilerini elde edilmiştik. Öncelikle x_1 zaman serisini ele alacağız. Bu zaman serisini $x_1 = x_1, x_2, ...x_N$ şeklinde ifade edebiliriz. Zaman serisini τ kadar öteleyerek $x_{1+\tau}$ zaman serisini elde ederiz. Bu iki zaman serisi arasındaki karşılıklı bilgiyi,

$$I(\tau) = \sum_{i=1}^{N} p(x_i, x_{i+\tau}) \log_2 \left(\frac{p(x_i, x_{i+\tau})}{p(x_i) p(x_{i+\tau})} \right) \tag{4.6}$$

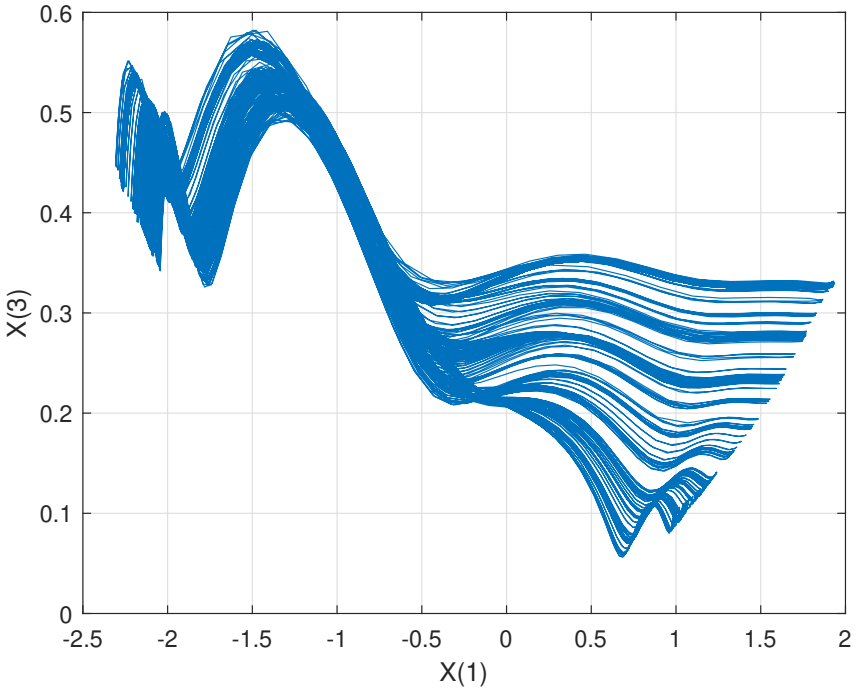
denkleminden hesaplayabiriz. Bu işlemi $\tau = 1$ için yaptıktan sonra $\tau = 2$, $\tau = 3$.... içinde yaparız. En düşük değere ulaştığımız zaman gecikme zamanını hesaplamış oluruz. Burada ideal olan $I = 0$ olmasıdır fakat bu değere ulaşılmasa bile I değerinin azalmasının durup artmaya başladığı noktayı gecikme zamanı olarak kabul edebiliriz.



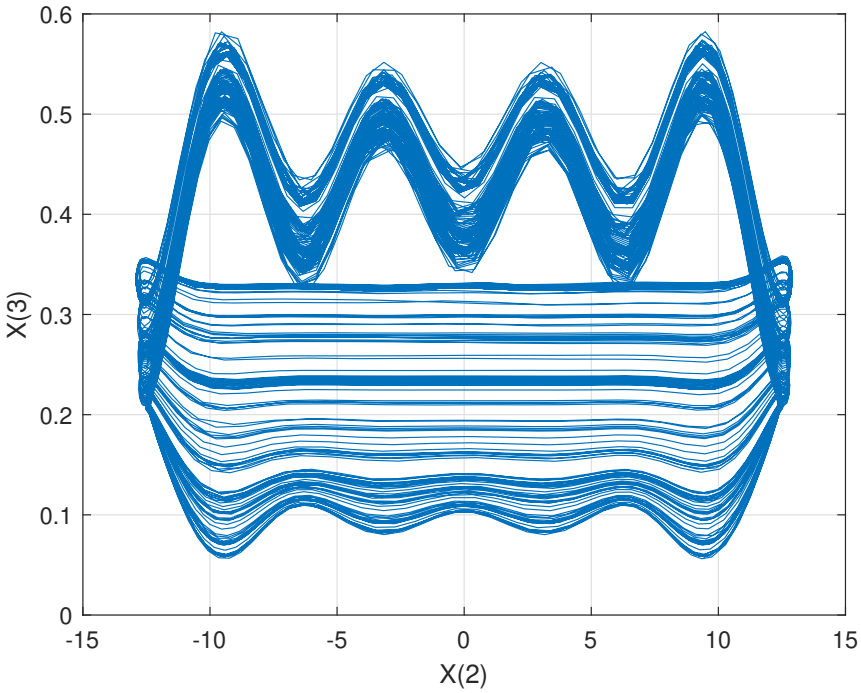
Şekil 4.4: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen zaman serileri x_1, x_2 ve x_3' ün faz uzayı grafiği.(q=15,2)



Şekil 4.5: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen zaman serileri x_1 ve x_2'nin birbirlerine karşı faz uzayı grafiği. (q=15,2)



Şekil 4.6: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen zaman serileri x_1 ve x_3'ün birbirlerine karşı faz uzayı grafiği. (q=15,2)



Şekil 4.7: (4.1) denkleminin numerik çözümü ile elde edilen zaman serileri x_2 ve x_3' ün birbirlerine karşı faz uzayı grafiği. (q=15,2)

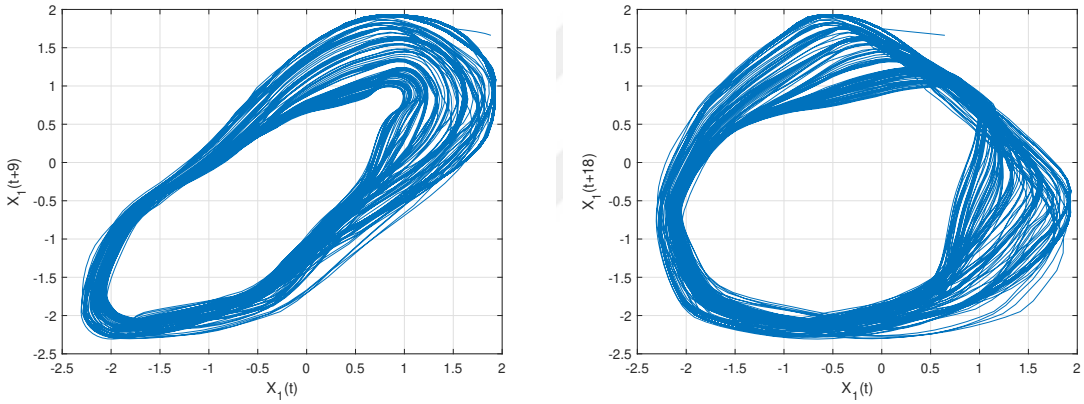
Faz uzayında çizgilerin birbirini kesmemesi gerekmektedir. Ayrıca zaman serilerinin kaotik analizinde zaman serilerindeki hatalı hesaplamaları durdurmak için en yakın hatalı komşuluğun başka bir ifade ile gömme boyutunun hesaplanması gerekmektedir. Gömme boyutu,

$$\sqrt{\frac{R_i^2(d+1)-R_i^2(d)}{R_i^2(d)}} > \text{Eşik mesafesi} \tag{4.7}$$

şeklinde hesaplanır. Bu denklemde geçen R ifadesi,

$$R_i^2(d) = \| X_i^r - X_i^{r*} \|^2 \tag{4.8}$$

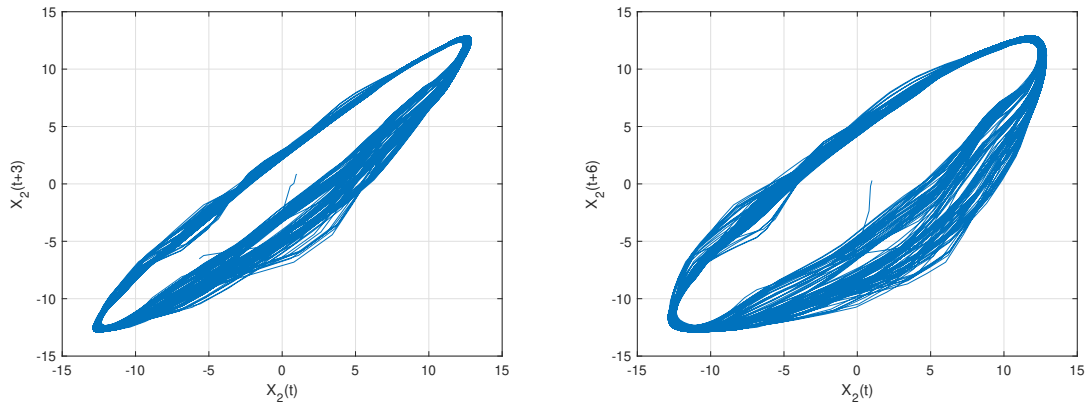
şeklinde verilir.



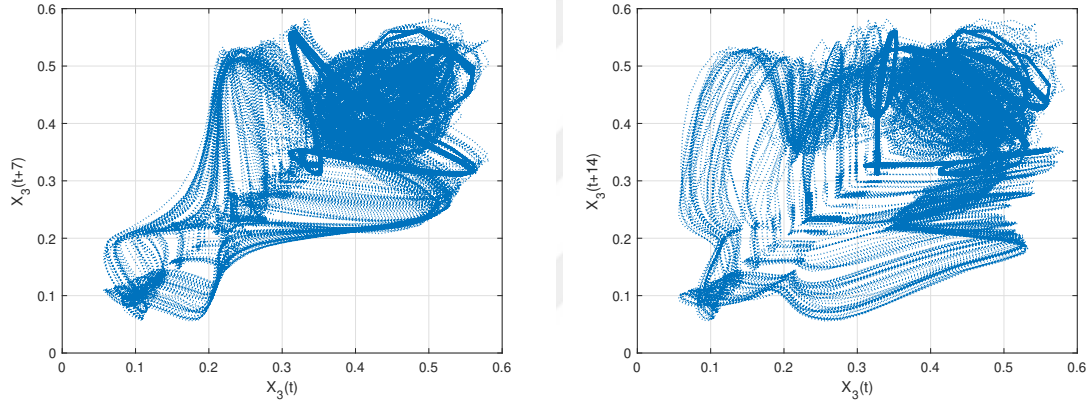
Şekil 4.8: x_1 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için yeniden yapılandırılan faz uzayı grafikleri. *Sol:* $x_1(t) - x_1(t+9)$ *grafiği, Sağ:* $x_1(t) - x_1(t+18)$ *grafiği.*

x_1 zaman serisi için yaptığımız hesaplamada $\tau = 9$ hesaplanmıştır. Bu zaman serisi için gömme boyutu $m = 3$ olarak hesaplanmıştır. Gömme boyutu sayısı, hesaplanacak Lyapunov üsteli sayısının ne olması gerektiğini de söylemiş olur. $m-1$ tane zaman gecikmeli koordinat sisteminde faz uzayı görüntüsü çizeriz ve Lyapunov üsteli hesaplarız. x_1 zaman serisinde $m = 3$ ve gecikme zamanı $\tau = 9$ alınarak **Şekil 4.8:**'de sol tarafta verilen faz uzayı grafiği, gecikme zamanı $2x\tau = 18$ alınarak gecikmeli zaman koordinat sisteminde **Şekil 4.8:**'de sağ tarafta verilen grafik elde edilmiştir. Bu faz uzayı grafiklerinde çok açık bir şekilde çekerler görülmektedir.

x_2 zaman serisi için $\tau = 3$ ve $m = 3$ olarak hesaplanmıştır. Bu durumda $m-1$ tane yani 2 tane gecikmeli koordinat faz uzayı görüntüsü çizilmesi ve iki tane Lyapunov üsteli hesaplanması



Şekil 4.9: x_2 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için yeniden yapılandırılan faz uzayı grafikleri. *Sol:* $x_2(t) - x_2(t+3)$ *grafiği, Sağ:* $x_2(t) - x_2(t+6)$ *grafiği.*



Şekil 4.10: x_3 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için yeniden yapılandırılan faz uzayı grafikleri. *Sol:* $x_3(t) - x_3(t+7)$ *grafiği, Sağ:* $x_3(t) - x_3(t+14)$ *grafiği.*

gerekmektedir. Gecikmeli zaman koordinat sisteminde $\tau = 3$ alınarak **Şekil 4.9:**'da sol tarafta verilen faz uzayı görüntüsü elde edilmiştir. Yine gecikme zamanı $2x\tau = 6$ alınarak **Şekil 4.9:**'sağ da verilen faz uzayı görüntüsü elde edilmiştir. x_2 zaman serisinin gecikmeli koordinat faz uzayı grafiklerinde de çok açık bir şekilde çekerler görülmektedir. x_1 zaman serisinde, çeker daha noktasal bir görüntü vermiştir. Burada ise çekerimiz doğrusal bir görüntü vermektedir. Sistem bir nokta yerine ya birden çok nokta tarafından ya da bir doğru tarafından çekilmektedir.

x_3 zaman serisi için kaos parametrelerini hesapladığımızda gecikme zamanı $\tau = 7$ ve gömme boyutu $m = 3$ hesaplanmıştır. Bu durumda $m - 1 = 2$ tane zaman gecikmeli koordinat sisteminde faz uzayı grafiği çizilmesi gerekmektedir. Gecikme süresi $\tau = 7$ alınarak **Şekil 4.10:**'da sol tarafta verilen faz uzayı grafiği elde edilmiştir. Gecikme zamanı $2x\tau = 14$ alınarak **Şekil 4.10:**'da sağ tarafta verilen faz uzayı grafiği elde edilmiştir. Burada önceki

iki zaman serisindeki gibi belirgin bir çeker gözlenmemiştir, ancak grafikler incelendiğinde zaman serisinin bir çeker etrafında konumlandığı görülmektedir.

4.3.4. Lyapunov Üstelinin Hesaplanması

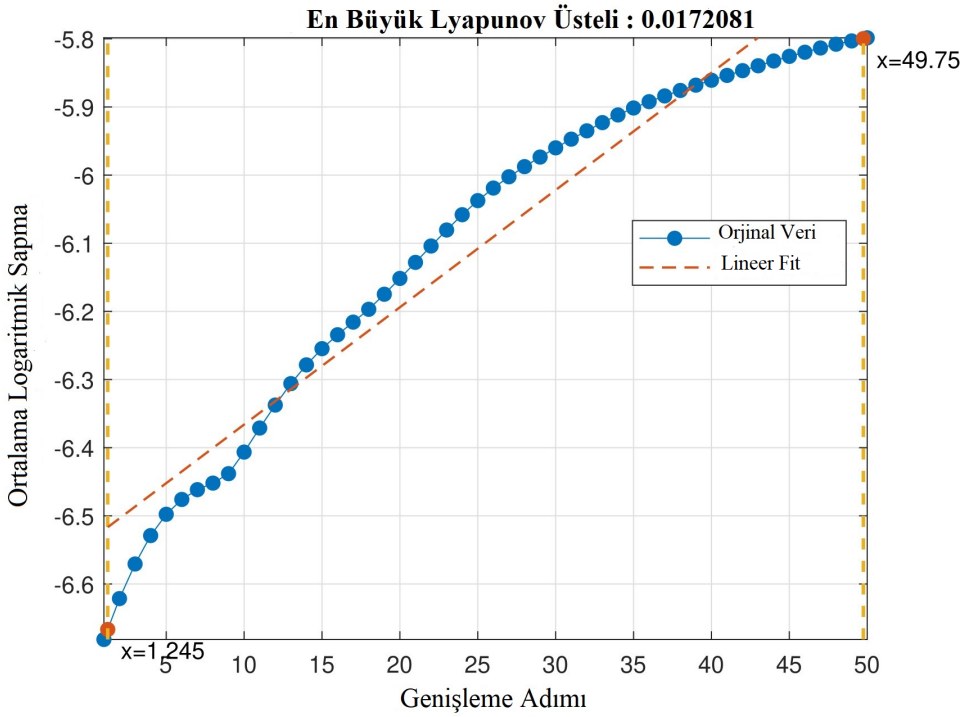
Zaman serileri için oluşturuduğumuz zaman gecikmeli koordinat sisteminde faz uzayı görüntülerini elde etmiştik. Faz uzayında zaman serilerinin bir çeker etrafında hareket ettiğini tespit etmiştik. Bu harekette zaman serilerinin birbirine yaklaşması veya uzaklaşmasını ifade etmek gerekir. Yeniden inşa ettiğimiz faz uzayında bu yaklaşmanın veya uzaklaşmanın üstel olarak ölçüsünü Lyapunov üstelleri ile hesaplayabiliriz. Lyapunov üsteli,

$$\lambda_i = \frac{1}{(K_{mak} - K_{min} + 1)dt} \sum_{K=K_{min}}^{K_{mak}} \frac{1}{K} \ln \frac{\| Y_{i+K} - Y_{i^*+K} \|}{\| Y_i - Y_i^* \|} \tag{4.9}$$

denklemi ile hesaplanabilir. K_{min} ve K_{mak} Lyapunov üstelini hesaplamak isteğimiz aralığı ifade eder. y_i, Lyapunov üstelini hesaplayacağımız zaman serisidir. Bu zaman serisi τ, $2x\tau$, $3x\tau$ $...(m-1)x\tau$ kadar ötelenerek ikinci bir zaman serisi elde edilir. Bu iki zaman serisi kullanılarak Denk. (4.9) yardımı ile Lyapunov üsteli hesaplanır. Gömme boyutu $m = 4$ ise toplam 3 tane Lyapunov üsteli hesaplanacaktır. Bu üstellerin en büyüğüne en büyük Lyapunov üsteli denir ve *LLE* olarak ifade edilir. Elde edilen pozitif bir Lyapunov üsteli kaosun en büyük işaretidir. Biz MATLAB programında Denk. (4.9) kullanarak en büyük Lyapunov üstellerini hesaplayacağız (MATLAB, 2023).

Nümerik çözümle elde ettiğimiz x_1 zaman serisi için gecikme zamanını $\tau = 9$ ve gömme boyutunu $m = 3$ olarak hesaplamıştık. Bu veriler kullanılarak elde edilen faz uzayında, zaman serilerinin birbirlerine yaklaşma veya uzaklaşmalarının üstel ölçütü olan Lyapunov üstellerini hesapladık. **Şekil 4.11:**'de x_1 zaman serisi için yatay eksen $0-50$ arasında genişleme aralığı olarak alınmış ve düşey eksen iki zaman serisi arasındaki mesafenin farklılaşmasının üstel olarak ortalaması olarak ifade edilmiştir. Düşey eksen logaritmik koordinatlarda çizilmiştir. x_1 için en büyük Lyapunov üsteli $LLE = 0.0172$ olarak elde edildi. Bu sonuç maksimum Lyapunov üstelinin pozitif değer aldığını ve x_1 değişkeninin davranışının kaotik olduğunu gösterir.

Şekil 4.12: incelendiğinde aynı durum x_2 değişkeni için de geçerlidir. Grafikten de görüldüğü gibi 0-50 genişleme aralığında x_2 için maksimum Lyapunov üsteli $\lambda_{max} = 0.0234$



Şekil 4.11: x_1 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için en büyük Lyapunov üsteli grafiği.(q=15,2)

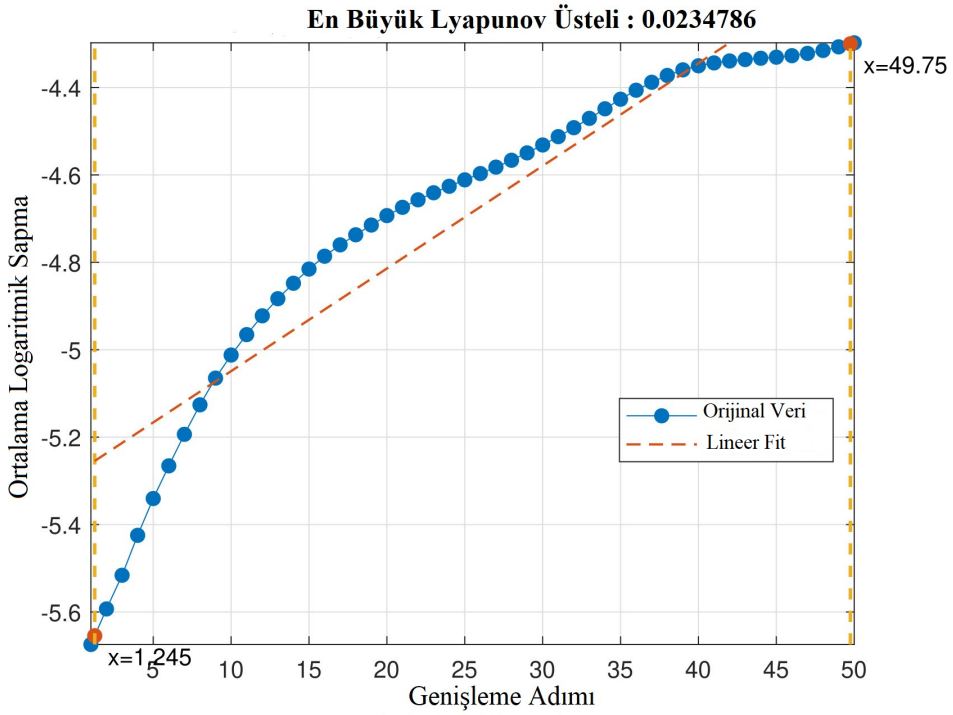
olarak elde edildi. Pozitif Lyapunov üsteli x_2 değişkeninin davranışının kaotik olduğunu gösterir.

Şekil 4.13: incelendiğinde x_3 değişkeni için 0-40 genişleme aralığında Lyapunov üstelleri eğrisi görülmektedir. x_3 değişkeni için maksimum Lyapunov üsteli $\lambda_{max} = 0.0281$ olarak elde edildi. Sonuç olarak elde edilen pozitif Lyapunov üstel değeri değişkenin davranışının kaotik olduğunu gösterir.

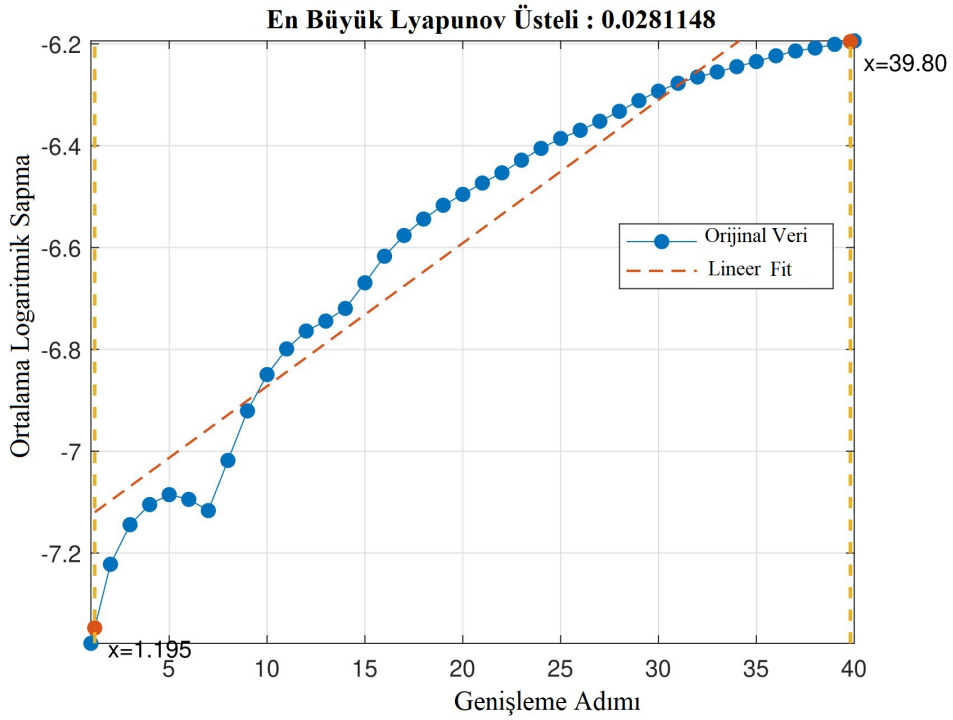
4.3.5. Farklı Başlangıç Durumu İçin Çözümler

Şimdi farklı başlangıç koşulları ve farklı bir q parametresi değeri için aynı çözümleri tekrarlayalım. x_1, x_2 ve x_3 için başlangıç koşullarını $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 2$ ve kontrol parametresini $q = 5$ olarak kabul edersek Denk. (4.1)' in numerik çözümünden x_1 için **Şekil 4.14:** sol' daki gibi, x_2 için **Şekil 4.14:** sağ' daki gibi, x_3 için ise **Şekil 4.15:** sol'daki gibi elde ederiz.

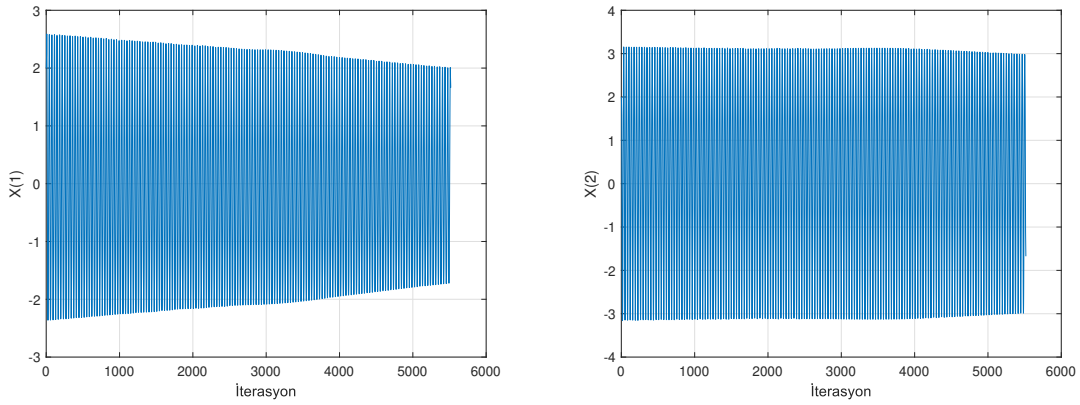
x_1, x_2 ve x_3 için elde edilen zaman serilerinden kaotik davranışları gösteren çekerlerin yapısını daha iyi yorumlayabilmek için birbirlerine karşı faz uzayı grafiklerini **Şekil 4.15:** sağ ve **Şekil 4.16:**'da çizdirdik. **Şekil 4.15:**' de x_1 ve x_2 için elde edilen grafik incelendiğinde



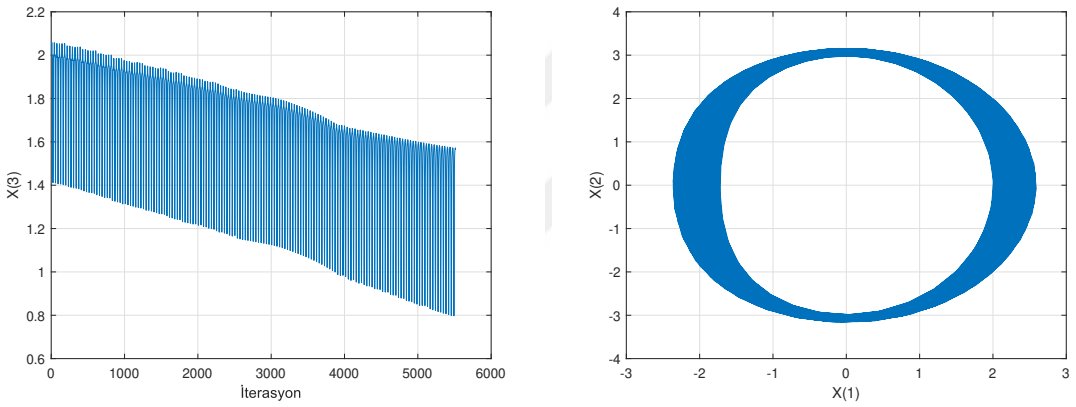
Şekil 4.12: x_2 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için en büyük Lyapunov üsteli grafiği.(q=15,2)



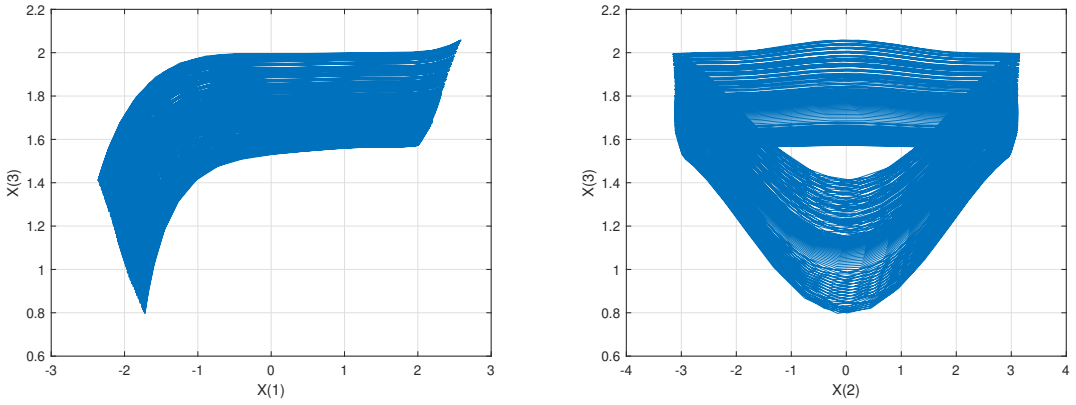
Şekil 4.13: x_3 zaman serisinin $\tau = 9$ ve $m = 3$ için en büyük Lyapunov üsteli grafiği.(q=15,2)



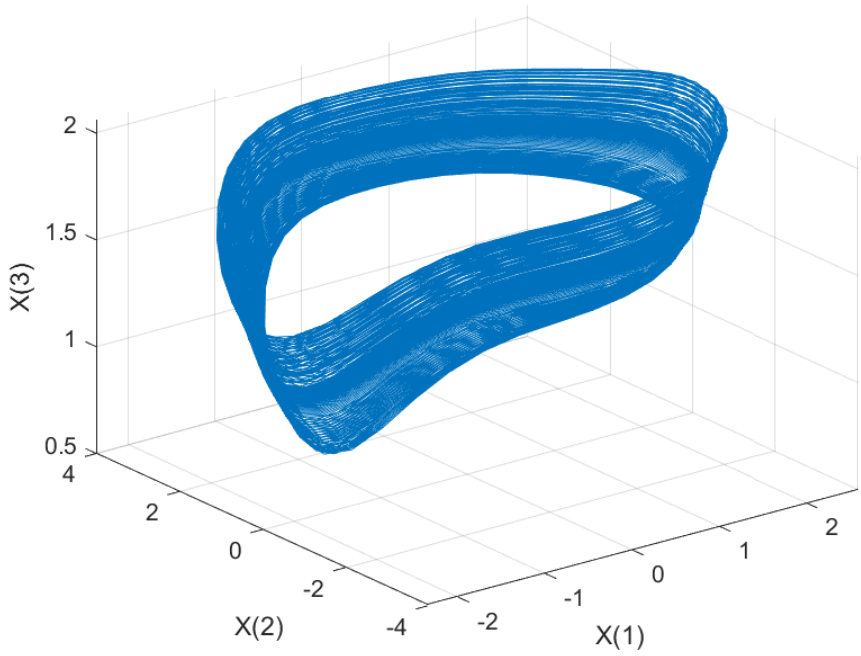
Şekil 4.14: Sol: (4.1) denkleminin farklı başlangıç koşullarında numerik çözümü ile elde edilen x_1 zaman serisi. Sağ: (4.1) denkleminin farklı başlangıç koşullarında numerik çözümü ile elde edilen x_2 zaman serisi (q=5).



Şekil 4.15: Sol: (4.1) denkleminin farklı başlangıç koşullarında nümerik çözümü ile elde edilen x_3 zaman serisi. Sağ: x_1 ve x_2 zaman serilerinin birbirlerine karşı faz uzayı grafiği (q=5).



Şekil 4.16: Sol: x_1 ve x_3 zaman serilerinin birbirlerine karşı faz uzayı grafiği (q=5). Sağ: x_2 ve x_3 zaman serilerinin birbirlerine karşı faz uzayı grafiği (q=5).



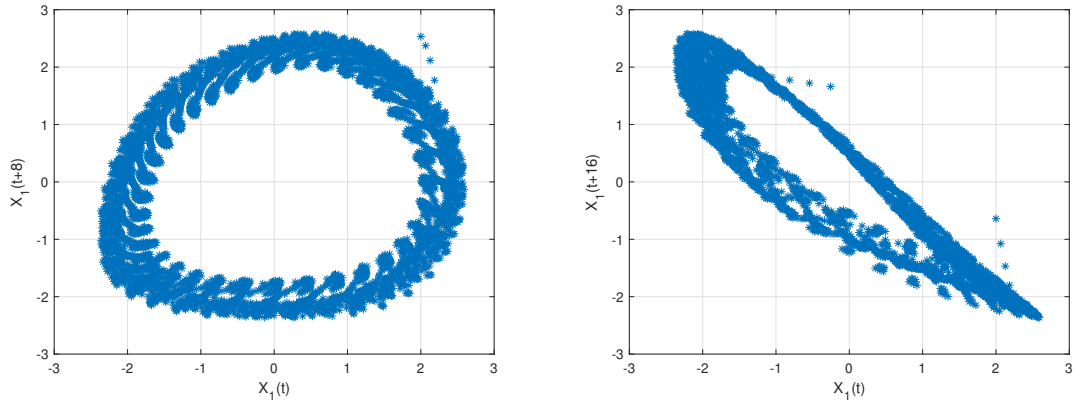
Şekil 4.17: Farklı başlangıç koşulları için x_1, x_2 ve x_3 zaman serilerinin üç boyutlu faz uzayı grafiği. (q=5)

limit döngüye yakın bir simit yani kapalı bir eğri görülmektedir. **Şekil 4.16:**'da ise tam olarak bir çeker gözlenmemiştir. x_1, x_2 ve x_3 zaman serilerinin üçünün birbirine karşı faz uzayı grafiği **Şekil 4.17:**'de verilmiştir. Bu grafik incelendiğinde bariz bir şekilde bir çeker görülmektedir.

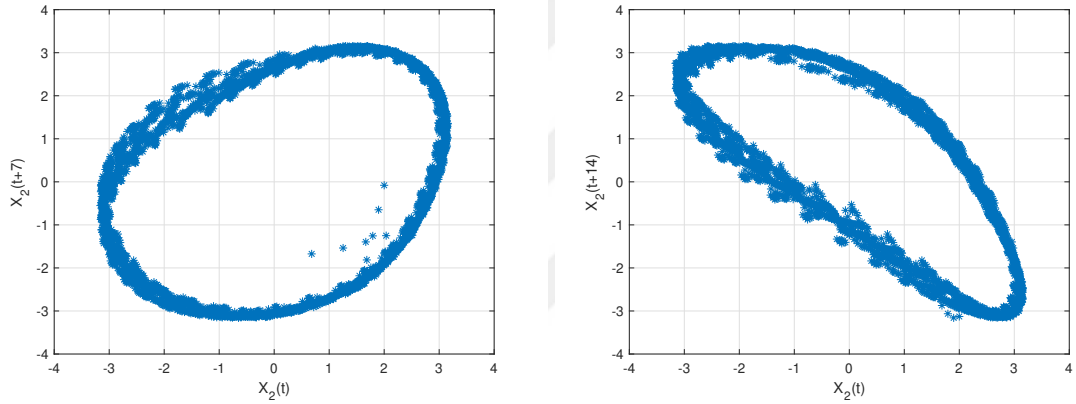
Elde ettiğimiz zaman serilerinin, kaotik davranış gösterip göstermediğini belirlemek için zaman gecikmeli koordinat sisteminde yeniden yapılandırılan faz uzayı görüntülerini çizdirmeli ve Lyapunov üstellerini hesaplayıp maksimum Lyapunov üstelini belirlemeliyiz. Yine aynı şekilde, öncelikle gecikme-koordinat gömme tekniği ile gecikme zamanı τ ve gömme boyutu m değerlerini hesapladık. Maksimum Lyapunov üsteli pozitif değer alıyorsa x_1, x_2 ve x_3 için zaman serilerinin kaotik olduğu yorumunu yapabiliriz.

Denklem (4.1)' de $q = 5$ alınarak nümerik çözüm yapılmıştır. x_1 zaman serisi için yapılan kaos analizinde gecikme zamanı $\tau = 8$ ve gömme boyutu $m = 3$ olarak hesaplanmıştır. Elde edilen bu veriler ile **Şekil 4.18:** grafikleri çizilmiştir. Grafikler incelendiğinde $x_1 = 2$ noktası civarında dönüş noktaları mevcuttur.

Denklem (4.1)' de $q = 5$ alınarak nümerik çözüm yapılmıştır. x_2 zaman serisi için yapılan



Şekil 4.18: x_1 zaman serisinin faz uzayında yeniden yapılandırma grafikleri. ($\tau = 8$ ve $m = 3$) *Sol:* $x_1(t) - x_1(t+8)$,*Sağ:* $x_1(t) - x_1(t+16)$ *grafiği.*



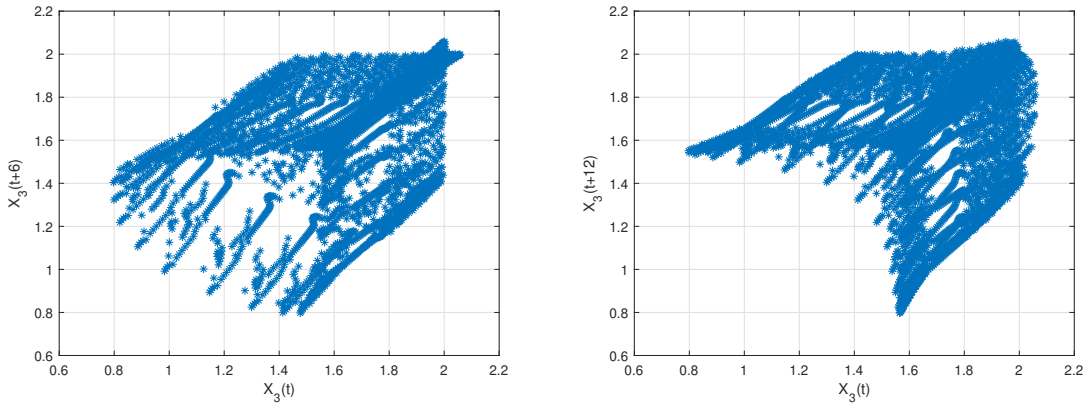
Şekil 4.19: x_2 zaman serisinin faz uzayında yeniden yapılandırma grafikleri. ($\tau = 7$ ve $m = 3$) *Sol:* $x_2(t) - x_2(t+7)$,*Sağ:* $x_2(t) - x_2(t+14)$ *grafiği.*

kaos analizinde gecikme zamanı $\tau = 7$ ve gömme boyutu $m = 3$ olarak hesaplanmıştır. Elde edilen bu veriler ile **Şekil 4.19:** grafikleri çizilmiştir. Grafikler incelendiğinde $x_2 = 3$ civarında dönüş noktaları mevcuttur.

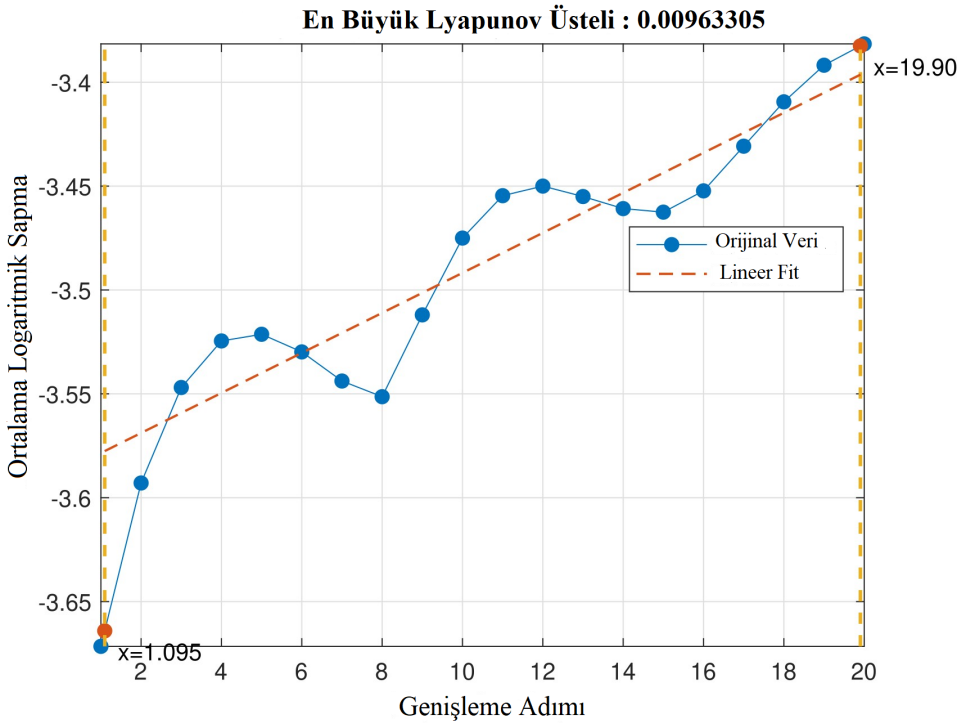
Denklem (4.1)' de $q = 5$ alınarak numerik çözüm yapılmıştır. x_3 zaman serisi için yapılan kaos analizinde gecikme zamanı $\tau = 6$ ve gömme boyutu $m = 3$ olarak hesaplanmıştır. Elde edilen bu veriler ile **Şekil 4.20:** grafikleri çizilmiştir. Grafikler incelendiğinde tam olarak bir çeker görülmese bile zaman serilerinin belirli bölgelerde yığıldığı görülmektedir.

Şekil 4.21: ve **Şekil 4.22:**' de görüldüğü gibi maksimum Lyapunov üstel değerleri hesaplandığında pozitif değerler elde edilmiştir. Grafiklerde x_1 için $\lambda_{max} = 0,0096$, x_2 için $\lambda_{max} = 0,0263$ olarak elde edildi.

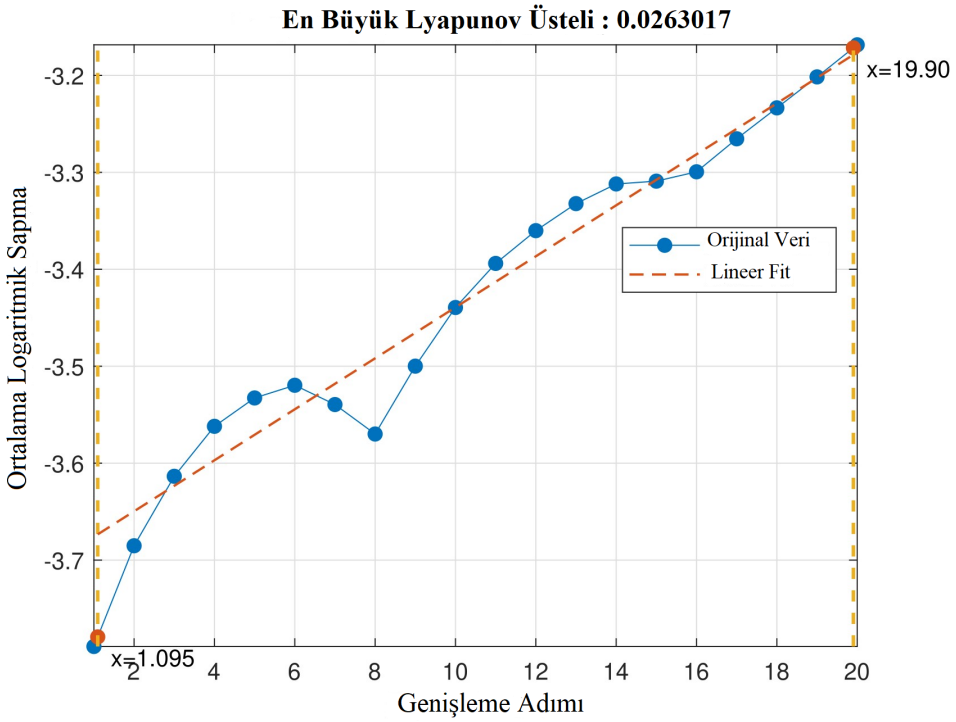
Bu sonuçlar tekrarlı olarak farklı koşullar altında test edildiğinde yine aynı sonuçların elde



Şekil 4.20: x_3 zaman serisinin faz uzayında yeniden yapılandırma grafikleri. ($\tau = 6$ ve $m = 3$) *Sol:* $x_3(t) - x_3(t+6)$,*Sağ:* $x_3(t) - x_3(t+12)$ *grafiği.*



Şekil 4.21: x_1 zaman serisinin farklı başlangıç koşulları ve $\tau = 8$, $m = 3$ için en büyük Lyapunov üsteli grafiği (q=5).



Şekil 4.22: x_2 zaman serisinin farklı başlangıç koşulları ve $\tau = 7$, $m = 3$ için en büyük Lyapunov üstelleri grafiği (q=5).

edildiği görüldü. Pozitif maksimum Lyapunov üstel değerleri x_1, x_2 ve x_3 zaman serilerinin dinamiklerinin kaotik olduğunu gösterdi.

Deterministik sistemlerde başlangıç koşulları biliniyorsa sistemin sonraki davranışları belirlenebilir. Ancak sistemin davranışlarının her zaman bu şekilde belirlenebileceği anlamına gelmez. Deterministik sistemler bile bazı koşullarda öngörülemeyen davranışlar gösterebilir. Bu öngörülemeyen davranışlar sistem için kaos olarak nitelendirilir. Özellikle ikiden fazla değişkene sahip karmaşık sistemlerde bu öngörülmezlik belirginleşir ve sistemden beklenmeyen davranışlar görülebilir.

Karmaşık sistemler birden fazla serbestlik derecesine sahip ve etrafıyla madde ya da enerji alışverişinde bulunan sistemlerdir. Karmaşık sistemlerde sistemin sonraki davranışlarını tahmin edebilmek için başlangıç değerlerinin sonsuz hassaslıkta ölçülmesi gerekir. Tabiki bu, karmaşık bir sistem için mümkün değildir. Bu tanıma göre evreni bir karmaşık sistem olarak tanımlayabiliriz. Evreni ve onu oluşturan bileşenleri düşündüğümüzde evren birbiriyle etkileşimde olan çok fazla değişkene sahip bir sistemdir ve evrenin başlangıç koşulları bilinmediğinden gelecekte nasıl bir davranış göstereceği de tam olarak bilinmemektir. Bu yüzden evrenin evrimi sürecinde herhangi bir zamanda kaotik davranışlar göstermesi

kaçınılmazdır.

Denk. (4.1) karanlık bileşenler arasındaki etkileşimi temsil eden doğrusal olmayan üç değişkenli bir denklemdir. Doğrusal olmayan değişken içeren bu denklemde önceden belirlenemeyen kaotik davranışların varlığı öngörülmektedir. Bu sebeple doğrusal analiz yöntemleri sistemin davranışlarını incelemek için uygun yöntemler değildir. Bu tür dinamik sistemlerin analizini yapmak için kaos fiziği analiz metotları kullanılmaktadır.

Karanlık bileşenler arasındaki etkileşimi temsil eden bu denklem sisteminin, kaotik analizini yaparak sistemin davranışlarındaki kaotik durumu tespit ettik. Farklı başlangıç koşulları ve parametre değeri için sistemin zaman içerisindeki durumunu temsil eden zaman serileri **Şekil 4.1:**, **Şekil 4.2:**, **Şekil 4.3:** ve **Şekil 4.14:**' de çizdirilmiştir. Zaman serilerinden x_1, x_2 ve x_3 için faz uzayı grafiklerini çizdirdik.**Şekil 4.4:** ve **Şekil 4.17:**' de x_1, x_2 ve x_3 zaman serileri için üç boyutlu faz uzayı grafikleri incelendiğinde düzgün bir limit döngüden farklı birbirini kesmeyen yörüngelerin oluşturduğu tuhaf çekerler elde ettik. Çekerlerin durumu kararlı durumdan ve limit döngülerden çok farklıdır. Elde ettiğimiz düzgün olmayan şekiller sistemin kaotik düzensiz davranışlarının resmidir. Lyapunov üstellerini hesaplayarak elde ettiğimiz verilerin kaotik olup olmadığını belirledik. Kaosun olmadığı durumda yani kararlı durumlarda faz uzayındaki eğriler kapalı bir şekil çizer ve eğriler birbirinden ıraksamaz ve yakınsamaz. Böylece ortalama üstel sapma oranı (Lyapunov üstel değeri) sıfır olur. **Şekil 4.11:**, **Şekil 4.12:** ve **Şekil 4.13:**' te x_1, x_2, x_3 zaman serileri için hesaplanan gecikme zamanı ve gömme boyutu değerleri ile maksimum Lyapunov üstel grafikleri çizdirilmiştir. Maksimum Lyapunov üstellerinin sıfırdan farklı ve pozitif değerler aldığı görülür. Bu değerler doğrusal olmayan kaotik bir duruma işaret eder.

Numerik çözümler ve elde ettiğimiz grafikler ışığında Denk. (4.1)'in temsil ettiği karanlık madde ve karanlık enerji arasındaki etkileşimin kaotik olduğu gösterildi. Buna ek olarak elde ettiğimiz sonuçlar sadece karanlık bileşenlerin etkileşimini tanımlamakla kalmayıp etkileşim halindeki tüm parçacık ve termodinamik sistemlerde, farklı başlangıç koşullarında, tahmin edilemeyen kaotik davranışların görüleceğini ispatlamıştır.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Evrenin dinamik yapısı ve evreni oluşturan bileşenler kozmolojinin temelini oluşturur. Standart Kozmolojik Model (ΛCDM model), Büyük Patlama Teorisi, Alternatif Kozmolojik Modeller, Etkileşimli Kozmoloji Modelleri gibi birçok teori evrenin oluşumunu ve dinamiğini anlamaya yönelik öne sürülen bilimsel teorilerdir. Evrenin bu karmaşık ve bilinmeyen yapısı üzerine birçok farklı görüş literatürde yer almaktadır. Son dönemlerde standart modelin kozmolojik sabit sorunu ve tesadüf problemi gibi çözülemeyen sorunlarla kısıtlanmasından dolayı evreni oluşturan karanlık bileşenlerin etkileşime girdiği ve bu bahsedilen sorunları hafifleten etkileşim modelleri dikkat çekmektedir.

Evreni birden fazla bileşenden oluşan karmaşık fiziksel bir sistem olarak ele alırsak evreni oluşturan karanlık madde ve karanlık enerji gibi bileşenlerin etkileşime girmediği durum pekte gerçekçi sayılmaz. Karmaşık fiziksel sistemlerin dinamiğinde doğrusal sistemlere göre öngörülemeyen davranışlar görülmektedir. Bu savı Evren dinamiğine uygularsak karanlık sektör arasındaki etkileşimin öngörülemeyen ve kaotik olduğu durum göz ardı edilemez. Literatürde Kaotik Evren Modeli, Karanlık Madde ve Karanlık Enerji Arasındaki Kaotik Etkileşimler gibi evrenin dinamiğini kaos fiziği çıkarımları ile açıklayan çalışmalar mevcuttur (Aydıner, 2018; Aydiner, 2023).

Bu bilgiler ışığında, bu tez çalışmasında karanlık madde ve karanlık enerjinin etkileşimlerinin kaotik olabileceği durumlar incelenmiştir. KM ve KE bağlı etkileşen termodinamik sistemler olarak ele alınmış, Aydıner' in etkileşen termodinamik sistemler için yeniden tanımladığı öz-etkileşim ve karşılıklı etkileşim yaklaşımları ile modifiye etkileşim denklemi elde edilmiş ve bu modifiye etkileşim denklemlerinin kaos fiziği analiz yöntemleri ile kaotik analizi yapılmıştır. Elde edilen bu denklemler Termodinamiğin birinci yasasından yeni bir etkileşim şeması yaklaşımı *öz-etkileşim şeması* ile ikinci dereceden terimler içeren modifiye denklemler olarak ele alındı (Denk. 4.1). Bu denklemler için sabit noktalar hesaplandı. Kararlılık analizi için seçilen başlangıç koşullarında Jacobian matris özdeğerleri hesaplandı. Elde edilen pozitif özdeğerler sabit noktaların kararsız olduğunu gösterdi. Hesaplamalar doğrultusunda seçilen başlangıç koşullarına göre Denk.(4.1)' deki x_1, x_2 ve x_3 değişkenleri için zaman serisi grafikleri çizildi. Zaman serilerinden faz uzayı grafiklerini

tekrar yapılandırmak için Takens zaman geciktirme-gömme boyutu teoremi ile zaman geciktirme τ ve gömme boyutu m değerleri hesaplandı. Kontrol parametresi q değeri için seçtiğimiz keyfi değer ile τ ve m değerlerine karşılık faz uzayı grafikleri çizildi. **Şekil 4.8:**, **Şekil 4.9:**, **Şekil 4.10:** grafiklerinde sistemin davranışlarını tanımlayan garip çekiciler elde edildi. Elde ettiğimiz faz uzayı grafiklerinden kaotik olup olmadığını belirlemek için maksimum Lyapunov üstellerini hesapladık ve **Şekil 4.11:**, **Şekil 4.12:** ve **Şekil 4.13:** grafiklerini bu değerlere göre elde ettik. Sonuç olarak üç değişken içinde elde edilen pozitif maksimum Lyapunov üstelleri modifiye denklemimiz (4.1)' deki karanlık sektörü temsil eden bileşenlerin etkileşimin kaotik olduğunu gösterdi. Faz uzayı analizlerinden elde ettiğimiz bu çekerler kararlı durumdan çok farklıdır ve karanlık bileşenlerin oluşturduğu modifiye denklem sistemimizin dinamiğinin kaotik olduğunu ispatlamıştır. Elde ettiğimiz sonuçların doğruluğunu test etmek için farklı başlangıç koşulları ve q parametresi ile Denk. (4.1) için tekrar çözümler yapıldı.

Bu tez çalışmasında, evrenin karanlık bileşenleri arasındaki etkileşime kaotik bakış açısıyla yaklaşarak bilimsel anlamda açıklamalar yapıldı. Elde ettiğimiz sonuçlar mikro yapıdan makro yapıya kadar deterministik yaklaşımın tersine fraktal yapıların ve kaotik davranışların, evreni oluşturan karanlık madde ve karanlık enerji gibi bileşenler arasındaki etkileşimde de gözlenebileceğine dair bir kanıttır. Ayrıca daha genel bir düşünceyle bu yeni yaklaşım yöntemi etkileşimli tüm parçacık ve tüm termodinamik sistemler için genelleştirilebilir. Bu çalışma evrenin yapısını ve evrimini açıklamaya yönelik yapılacak diğer çalışmalar için bir kaynak oluşturacak niteliktedir ve kaotik analiz yöntemleriyle desteklenmektedir.

KAYNAKLAR

Ade, P. A., Aghanim, N., Arnaud, M., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., and Matarrese, S., 2016, Planck 2015 results-xiii. cosmological parameters. *Astronomy and Astrophysics,* 594, A13.

Amendola, L., Finelli, F., Burigana, C., and Carturan, D., 2003 WMAP and the generalized Chaplygin gas, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics,* Number: 07, Pages:005, IOP Publishing.

Armendariz-Picon, C., Mukhanov, V., and Steinhardt, P., J., 2001, Essentials of k-essence.*Physical Review D,* 63(10), 103510.

Aydiner, E., 2018, Chaotic universe model. *Scientific Reports,* 8(1), 721.

Aydiner, E., 2023, Chaotic interactions between dark matter and dark energy. *arXiv preprint* arXiv:2304.06614.

Bagla, J. S., Jassal, H. K., and Padmanabhan, T., 2003, Cosmology with tachyon field as dark energy.*Physical Review D,* 67(6), 063504.

Bambi, C., 2018, Introduction to general relativity: a course for undergraduate students of physics. *Springer.*

Bekenstein, J. D., 1981, Universal upper bound on the entropy-to-energy ratio for bounded systems. *Physical Review D,* 23(2), 287.

Benaoum, H. (2022). Accelerated universe from modified Chaplygin gas and tachyonic fluid. *Universe,* 8(7), 340.

Bento, M. C., Bertolami, O., and Sen, A. A., 2002, Generalized Chaplygin gas, accelerated expansion, and dark-energy-matter unification. *Physical Review D,* 66(4), 043507.

Chimento, L. P., and Jakubi, A. S., 1996, Scalar field cosmologies with perfect fluid in Robertson-Walker metric. *International Journal of Modern Physics D,* 5(01), 71-84.

Collaboration, P., Aghanim, N., Akrami, Y., Alves, M. I. R., Ashdown, M., Aumont, J., Bielewicz, P., 2020, Planck 2018 results. *A&a, 641, A12.*

Crownover, R. M., 1995, Introduction to fractals and chaos. *Boston : Jones and Bartlett.*

Delsemme, A. H., 1998, Our cosmic origins: from the Big Bang to the emergence of life and intelligence. *Cambridge University Press.*

Dietrich, J. P., Werner, N., Clowe, D., Finoguenov, A., Kitching, T., Miller, L., Simionescu, A., 2012, A filament of dark matter between two clusters of galaxies. *Nature,* 487(7406), 202-204.

Eckmann, J. P., Ruelle, D., 1985, Ergodic theory of chaos and strange attractors. *Reviews of modern physics,* 57(3), 617.

Einstein, A., 1915, The field equations of gravitation. *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.),* 1915, 844-847.

Einstein, A., 1916, The foundation of the general theory of relativity. *Annalen Phys, 49(7),* 769-822.

Einstein, A., 1917,On the special and general theory of relativity. *CPAE (English translation),* 6, 247-420.

Falconer, K., 2007, Fractal geometry: mathematical foundations and applications. *John Wiley and Sons.*

Farrar, G. R., and Peebles, P. J. E., 2004, Interacting dark matter and dark energy. *The Astrophysical Journal,* 604(1), 1.

Feng, B., Li, M., Piao, Y. S., Zhang, X., 2006, Oscillating quintom and the recurrent universe.*Physics Letters B,* 634(2-3), 101-105.

Friedman, A., 1999, On the curvature of space. *General Relativity and Gravitation,* 31(12), 1991-2000.

Gonçalves, D. L., 2005, Coincidence theory. *Handbook of topological fixed point theory,* 3-42.

Hartle, J. B., 2021, Gravity: an introduction to Einstein's general relativity. *Cambridge University Press.*

Henry, B., Lovell, N., Camacho, F., 2000, Nonlinear dynamics time series analysis. *Nonlinear biomedical signal processing: Dynamic analysis and modeling,* 2, 1-39.

Hilborn, R., C., 2000, Chaos and nonlinear dynamics: an introduction for scientists and engineers. *Oxford university press.*

Ahammad, H.,, N., Akter, R., Ahmed, P., Fractals Generating Techniques. 2014, Fractals Generating Techniques, *Sonargaon University Journal.*

Hubble, E., 1929, The red shift of stars and the expansion of our universe. *PNAS,* 15(3), 168-173.

Johnson, M. 2024, History of Fractals. http:
nnart.org.johnson [Ziyaret tarihi : 30.05.2024].

Kostelich, E. J., Schreiber, T., 1993, Noise reduction in chaotic time-series data: A survey of common methods. *Physical Review E,* 48(3), 1752.

Lefler, S., 2006, Fractals and the chaos game, *MAT Exam Expository Papers,* p24.

Li, M., 2004, A model of holographic dark energy. *Physics Letters B,* 603(1-2), 1-5.

Liu, Z., 2010, Chaotic time series analysis. *Mathematical Problems in Engineering,* 2010.

Lorenz, E. N., 1963, Deterministic nonperiodic flow. *Journal of atmospheric sciences,* 20(2), 130-141.

Lotka, A. J., 1925, *Elements of physical biology.* Williams and Wilkins.

Mandelbrot, B. B., 1989, Fractal geometry: what is it, and what does it do?. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences,* 423(1864), 3-16.

MathWorks, I., 2023, MATLAB version: R2023b, Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc. https://www.mathworks.com

Nutku, F., 2024, Assessment of COVID-19 Numbers by Using Fisher Transform Indicator. *Research square* https://doi.org/10.21203/rs.3.rs-2617847/v3

Packard, N. H., Crutchfield, J. P., Farmer, J. D., Shaw, R. S., 1980, *Geometry from a time series.* Physical review letters, 45(9), 712.

Padmanabhan, T., Choudhury, T. R., 2002, Can the clustered dark matter and the smooth dark energy arise from the same scalar field?. *Physical Review D,* 66(8), 081301.

Park, S., 1999, Ninety years of the Brouwer fixed point theorem. *Vietnam J. Math,* 27(3), 187-222.

Penzias, A. A., Wilson, R. W., 1965, Measurement of the Flux Density of CAS a at 4080 Mc/s. *Astrophysical Journal,* vol. 142, p. 1149, 142, 1149.

Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R., et all, 1999, Measurements of ohm and alpha from high redshift supernovae. *The Astrophysical Journal, Supernova Cosmology Project,* 517(2), 565.

Peter, A., R., Aghanim, M., Nabila, M., and others, 2014, Planck 2013 results. I. Overview of products and scientific results, *Astronomy and Astrophysics* , A1 , EDP Sciences

Prigogine, I., Géhéniau, J., Gunzig, E., Nardone, P., 1988, Thermodynamics of cosmological matter creation. *Proceedings Of The National Academy Of Sciences,* 85(20), 7428-7432.

Quartin, M., Calvao, M. O., Joras, S. E., Reis, R. R., Waga, I., 2008, Dark interactions and cosmological fine-tuning. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics,* 2008(05), 007.

Roos, M., 2008, Expansion of the universe Standard Big Bang Model, *arXiv: 0802.2005.*

Ruelle, D., Takens, F., 1971, On the nature of turbulence. *Les rencontres physiciens-mathématiciens de Strasbourg-RCP25,* 12, 1-44.

Saha, S., 2018, Elements of Cosmological Thermodynamics. *Springer International Publishing.*

Schneider, P., Kochanek, C. S., Wambsganss, J., 2006, Introduction to gravitational lensing and cosmology. *Gravitational Lensing: Strong, Weak and Micro,* 1-89.

Shannon, C. E., 2001, A mathematical theory of communication. *Acm sigmobile mobile computing and communications review,* 5(1), 3-55

Takens, F., 1981, Dynamical systems and turbulence. *Warwick*, 1980, 366-381.

Tamanini, N., 2015, Phenomenological models of dark energy interacting with dark matter. *Physical Review D,* 92(4), 043524.

Tian, Z., 2023, Analysis and research on chaotic dynamics behaviour of wind power time series at different time scales.*J Ambient Intell Human Comput* 14, 897–921 . https://doi.org/10.1007/s12652-021-03343-1

Vikhlinin, A., Kravtsov, A., Forman, W., Jones, C., Markevitch, M., Murray, S. S., and Van Speybroeck, L., 2006, Chandra sample of nearby relaxed galaxy clusters: Mass, gas fraction, and mass-temperature relation. *The Astrophysical Journal,* 640(2), 691.

Volterra, V., 1927, Variazioni e fluttuazioni del numero d'individui in specie animali conviventi(Vol. 2). *Societá anonima tipografica" Leonardo da Vinci".*

Wang, B., Abdalla, E., Atrio-Barandela, F., Pavon, D., 2016, Dark matter and dark energy interactions: theoretical challenges, cosmological implications and observational signatures. *Reports on Progress in Physics,* 79(9), 096901.

Weinberg, S., 1972, Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity.

Weinberg, S., 1989, The cosmological constant problem. *Reviews of modern physics,* 61(1), 1.

Weinberg, D. H., 2005, Dark energy: The observational challenge. *New Astronomy Reviews,* 49(7-9), 337-345.

Yılmaz, D., Güler, N., 2006, Kaotik zaman serisinin analizi üzerini bir araştırma. *Gazi üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık fakultesi dergisi,* 21(4).

Yılmaz, E., and Aydıner, E., 2024, Chaotic and Quasi-periodic Regimes in the Covid-19 Mortality Data. *Chaos Theory and Applications,* 6(1), 41-50. https://doi.org/10.51537/chaos.1420724

Yılmaz,E., Aydıner, E., Okcu, Ö., 2023, COVID− 19 Mortality Prediction: A Case Study for Istanbul. *American Scientific Research Journal for Engineering, Technology, and Sciences,* 92(1), 26–45.

Yurov, A. V., Martín-Moruno, P., and González-Díaz, P. F., 2006. New "Bigs" in cosmology. Nuclear *Physics B,* 759(1-2), 320-341.

Zlatev, I., Wang, L., Steinhardt, P. J., 1999, Quintessence, cosmic coincidence, and the cosmological constant. *Physical Review Letters,* 82(5), 896.

Zwicky, F., 1933, Die Rotverschiebung von extragalaktischen Nebeln. *Helvetica Physica Acta,* 6, 110

Zwicky, F., 1937, Nebulae as gravitational lenses. *Physical Review,* 51(4), 290.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Hatice BAŞER
Doğum Yeri	
Doğum Tarihi	
Uyruğu	[X] T.C. [ ] Diğer:
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi
Fakülte	Fen Edebiyat Fakültesi
Bölümü	Fizik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2011

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri
Anabilim Dalı	Fizik Anabilim Dalı
Programı	Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı
Mezuniyet Tarihi	2024