CEBİR III KONULARI İLE İLGİLİ SORULAR ve CEVAPLARI

Aşağıdaki iddialar doğru mudur? Neden?

(a) F bir cisim ise $F[x]$ polinomlar halkası da bir cisimdir.

Cevap: İddia yanlıştır. $x \in F[x]-\{0_F\}$ polinomunu göz önüne alalım. $F[x]$ bir cisim olsa $x.g(x)=1_F$ olacak biçimde bir $g(x) \in F[x]$ var olur. Bu durumda, $0=\deg(1_F)=\deg(x.g(x))=\deg(x)+\deg(g(x))=1+\deg(g(x)) \geq 1$ çelişkisi elde edilir. O halde $F[x]$ bir cisim olamaz.

(b) T ve S cisim olmayan iki tamlık bölgesi ve $A(T) \cong A(S)$ olsun. Bu durumda $T \cong S$ olur.

Cevap: İddia yanlıştır. $T=\mathbb{Z}$ ve $S=\mathbb{Z}[x]$ olsun. $\mathbb{Z}$ ve $Z[x]$ cisim olmayan tamlık bölgeleridir. $A(\mathbb{Z})=\{1,-1\}$ ve $A(\mathbb{Z}[x])=A(\mathbb{Z})=\{1,-1\}$ olduğundan $A(\mathbb{Z}) \cong A(Z[x])$ olur. Ancak $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}[x]$ tir. Çünkü aksi halde bir $\varphi:\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[x]$ halka izomorfisi var olur. Bu izomorfide, 1 tam sayısının görüntüsü,

$\varphi(1)=\varphi(1.1)=\varphi(1).\varphi(1)=\varphi(1)^2 \Rightarrow \varphi(1)^2-\varphi(1)=0 \Rightarrow \varphi(1)(\varphi(1)-1)=0$ olduğu ve $Z[x]$ in sıfır bölensiz olduğu göz önüne alındığında ya 1 yada 0 olur. Fakat $\varphi(0)=0$ ve φ bire-bir olduğundan $\varphi(1)=0$ olamaz. Dolayısıyla, $\varphi(1)=1$ olur. Ayrıca,

$\varphi(2)=\varphi(1+1)=\varphi(1)+\varphi(1)=1+1=2$,

her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $\varphi(n)=\varphi(1+...+1)=\varphi(1)+...+\varphi(1)=1+...+1=n$ ve $\varphi(-n)=-\varphi(n)=-n$ olur. O halde, her $m \in \mathbb{Z}$ için $\varphi(m)=m$ olmalıdır. Öte yandan, φ bir izomorfi olduğundan üzerinedir ve dolayısıyla $x \in \mathbb{Z}[x]$ için $\varphi(a)=x$ olacak biçimde bir $a \in \mathbb{Z}$ vardır. Bu durumda, $a=\varphi(a)=x$ çelişkisi elde edilir. O halde $\mathbb{Z} \ncong \mathbb{Z}[x]$ dir.

(c) T bir tamlık bölgesi olsun. $KarT$ bir asal sayı ise, T bir sonlu tamlık bölgesidir.

Cevap: İddia yanlıştır. $p \in IP$ olmak üzere $\mathbb{Z}_p[x]$ polinomlar halkasını göz önüne alalım. $\mathbb{Z}_p$ bir cisim olduğundan $\mathbb{Z}_p[x]$ bir tamlık bölgesidir. $1_{\mathbb{Z}_p[x]}=\overline{1}$ olduğundan $Kar\mathbb{Z}_p[x]=Kar\mathbb{Z}_p=p$ dir. Ancak $\mathbb{Z}_p[x]$ tamlık bölgesi sonlu elemanlı değildir:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{N} &\to \mathbb{Z}_p[x] \\ n &\mapsto x^n \end{aligned}$$

fonksiyonunun bire-bir olduğu kolayca görülebilir ve dolayısıyla

$|\mathbb{N}| \leq |\mathbb{Z}_p[x]|$ dir. Bu durumda, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin (sayılabilir) sonsuz elemanlı olduğu göz önüne alınırsa $\mathbb{Z}_p[x]$ in sonsuz elemanlı olduğu görülmüş olur.

(d)) T bir cisim olsun. $KarT$ bir asal sayı ise, T bir sonlu cisimdir. **(ÖDEV)**

(e) F bir cisim ve $f(x) \in F[x]$ olsun. Eğer $\deg(f(x)) = 1$ ise, $f(x)$ polinomu $F[x]$ de asaldır.

Cevap: İddia doğrudur. $f(x) = a(x).b(x)$; $a(x), b(x) \in F[x] - \{0\}$ ayrılışını göz önüne alalım.

$1 = \deg(f(x)) = \deg(a(x)) + \deg(b(x))$ olduğundan $a(x)$ ve $b(x)$ polinomlarından tam bir tanesinin derecesi sıfır olmalıdır. Bu durumda, $f(x) = a(x).b(x)$ ayrılışında dercesi sıfır olan çarpan $F[x]$ nin aritmetik birimi olacağından, bu ayrılış bir triviyal ayrılış olur. Böylece, $f(x)$ polinomunun $F[x]$ de triviyal ayrılışlarından başka ayrılışı yoktur. O halde $f(x)$ polinomu $F[x]$ de asaldır.

(f) T bir tamlık bölgesi ve $f(x) \in T[x] - T$ olsun. Bu durumda,

$f(x) \in T[x]$ asal değildir $\Leftrightarrow$ $f(x) = a(x).b(x)$; $0 < \deg(a(x)), \deg(b(x)) < \deg(f(x))$ olacak biçimde $a(x), b(x) \in T[x]$ vardır.

Cevap: İddia yanlıştır. $f(x) = 2x \in \mathbb{Z}[x] - \mathbb{Z}$ polinomu $2, x \notin A(\mathbb{Z}[x])$ olduğundan $\mathbb{Z}[x]$ de asal değildir. Öte yandan, $\deg(2x) = 1$ olduğundan, $2x = a(x).b(x)$;
$0 < \deg(a(x)), \deg(b(x)) < \deg(2x)$ olacak biçimde $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}[x]$ yoktur.

(g) F bir cisim ve $f(x) \in F[x] - F$ olsun. Eğer $f(x)$ polinomumun F de bir kökü varsa, $F[x]$ de asal değildir.

Cevap: İddia yanlıştır. $f(x) = x - 1 \in \mathbb{Q}[x] - \mathbb{Q}$ polinomunu göz önüne alalım. $f(1) = 0$ olduğundan 1, $f(x)$ polinomumun $\mathbb{Q}$ da bir köküdür. Ayrıca, $\deg(f(x)) = 1$ olduğundan (e) şıkkına göre $f(x) = x - 1$ polinomu $\mathbb{Q}[x]$ te asaldır.

(h) F bir cisim, $f(x) \in F[x]$ ve $\deg(f(x)) > 1$ olsun. Eğer $f(x)$ polinomumun F de bir kökü varsa, $F[x]$ de asal değildir. **(ÖDEV)**

(ı) F bir cisim ve $f(x) \in F[x] - F$ olsun. Eğer $f(x)$ polinomumun F de hiç kökü yoksa $F[x]$ de bir asal polinomdur.

Cevap: İddia yanlıştır. $f(x) = (x^2 + 1)^2 \in \mathbb{Q}[x] - \mathbb{Q}$ polinomunu göz önüne alalım. Bu durumda, $f(x)$ polinomunun tüm kökleri i ve $-i$ olduğundan, bu polinomun $\mathbb{Q}$ da hiç kökü yoktur. Ancak, $f(x) = (x^2 + 1)(x^2 + 1)$ ayrılışı $\mathbb{Q}[x]$ te triviyal olmayan bir ayrılış olduğundan, $f(x)$ polinomu $\mathbb{Q}[x]$ te bir asal polinom değildir.

(j) F bir cisim, $f(x) \in F[x]$ ve $\deg(f(x)) \in \{2, 3\}$ olsun. Eğer $f(x)$ polinomumun F de hiç kökü yoksa $F[x]$ de bir asal polinomdur.

Cevap: İddia doğrudur. $f(x) \in F[x]$ asal olmasa,

$$f(x) = a(x).b(x)\,; \quad 0 < \deg(a(x)),\ \deg(b(x)) < \deg(f(x))$$

olacak biçimde $a(x),\ b(x) \in F[x]$ var olur. $\deg(a(x)) + \deg(b(x)) = \deg(f(x)) \in \{2,\ 3\}$ olduğundan $a(x)$ ve $b(x)$ polinomlarından en az birinin derecesi 1 olmalıdır. Varsayalım ki $\deg(a(x)) = 1$ olsun. Bu durumda $a(x) = ux + v$ olacak biçimde $u, v \in F$; $u \neq 0_F$ vardır. Böylece, $-v.u^{-1} \in F$ için $f(-v.u^{-1}) = a(-v.u^{-1}).b(-v.u^{-1}) = 0_F$ olduğundan $f(x)$ polinomumun F de bir kökü bulunur. Bu ise bir çelişki olduğundan kabulümüz yanlıştır. O halde, $f(x)$ polinomu $F[x]$ de bir asal polinomdur.

(k) T bir tamlık bölgesi olsun. Bu durumda $T[x]$ de $\langle x \rangle$ bir asal idealdir. **(ÖDEV)**

(l) $\mathbb{Z}_5[x]/\left\langle x^3 + x^2 + \overline{2} \right\rangle$ bir cisimdir.

Cevap: İddia doğrudur. $\mathbb{Z}_5[x]$ bir komütatif ve birimli halka olduğundan, $\mathbb{Z}_5[x]/\left\langle x^3 + x^2 + \overline{2} \right\rangle$ bölüm halkasının bir cisim olması için gyk $\left\langle x^3 + x^2 + \overline{2} \right\rangle$ idealinin bir maksimal ideal olmasıdır. $\mathbb{Z}_5$ bir cisim olduğundan, $\mathbb{Z}_5[x]$ bir Öklid bölgesi ve dolayısıyla bir E.İ.B. dir. Bu durumda $\mathbb{Z}_5[x]$ in $\left\langle x^3 + x^2 + \overline{2} \right\rangle$ idealinin bir maksimal ideal olabilmesi için g.y.k $f(x) := x^3 + x^2 + \overline{2}$ polinomunun $\mathbb{Z}_5[x]$ te bir asal polinom olmasıdır. $f(\overline{0}) = \overline{2} \neq \overline{0}$, $f(\overline{1}) = \overline{4} \neq \overline{0}$, $f(\overline{2}) = \overline{4} \neq \overline{0}$, $f(\overline{3}) = \overline{3} \neq \overline{0}$, $f(\overline{4}) = \overline{2} \neq \overline{0}$ olduğundan $f(x) := x^3 + x^2 + \overline{2}$ polinomunun $\mathbb{Z}_5$ te hiç kökü yoktur. Bu durumda (j) şıkkına göre, $f(x)$ polinomu $\mathbb{Z}_5[x]$ te bir asal polinomdur. Dolayısıyla, $\mathbb{Z}_5[x]/\left\langle x^3 + x^2 + \overline{2} \right\rangle$ bir cisimdir.

(m) $\mathbb{Q}[x]/\left\langle x^5 + 4x^3 + 6x^2 + 2 \right\rangle$ bir cisimdir. **(ÖDEV)**

(n) $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomu $\mathbb{Q}[x]$ te asaldır.

Cevap: İddia doğrudur.
$f(x+1) = (x+1)^4 + (x+1)^3 + (x+1)^2 + (x+1) + 1 = x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 10x + 5$ polinomu $5 \in IP$ için Eisenstein Kriterinin koşullarını sağlar. O halde, $f(x+1)$ polinomu $\mathbb{Q}[x]$ te bir asal polinomdur. Dolayısıyla $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ polinomu da $\mathbb{Q}[x]$ te asaldır.

(o) $p \in IP - \{2\}$ olmak üzere, $f(x) = x^{p+1} + \overline{2}x^p + x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomunun $\mathbb{Z}_p$ deki tüm kökleri $-\overline{1}$ ve $-\overline{2}$ dir.

Cevap: İddia doğrudur. $\mathbb{Z}_p$ bir cisim olduğundan $f(x) = x^{p+1} + \overline{2}x^p + x + \overline{2} \in \mathbb{Z}_p[x]$ polinomunun $\mathbb{Z}_p[x]$ te (çok katlılıklarıyla sayıldığında) en fazla $p+1$ tane kökü vardır.
$f(x) = x^{p+1} + \overline{2}x^p + x + \overline{2} = x^p(x + \overline{2}) + (x + \overline{2}) = (x^p + \overline{1})(x + \overline{2})$ olduğu kolayca görülür.

$Kar\mathbb{Z}_p[x] = Kar\mathbb{Z}_p = p$ olduğundan $\mathbb{Z}_p[x]$ te $x^p + \overline{1} = (x+\overline{1})^p$ olur (halkalarda binom formülü konusunu hatırlayınız). Bu durumda, $f(x) = (x+\overline{1})^p(x+\overline{2})$ olduğundan, $-\overline{1}$ $f(x)$ polinomunun $p-$katlı kökü; $-\overline{2}$ ise basit köküdür. Dolayısıyla $f(x)$ polinomunun $\mathbb{Z}_p$ deki tüm kökleri $-\overline{1}$ ve $-\overline{2}$ dir.

(p) $f(x) = x^5 + 4x^3 + 2x^2 - 2$ polinomunun $\mathbb{Z}$ de hiç kökü yoktur.

Cevap: İddia doğrudur. $f(x)$ polinomunun $\mathbb{Z}$ de α gibi bir kökü olsa, $f(\alpha) = \alpha^5 + 4\alpha^3 + 2\alpha^2 - 2 = 0$ olduğundan, $\alpha(\alpha^4 + 4\alpha^2 + 2\alpha) = 2$ bulunur. Bu durumda, $\alpha \mid 2$ den $\alpha \in \{\pm 1, \pm 2\}$ bulunur. Ancak, $f(\pm 1) \neq 0$ ve $f(\pm 2) \neq 0$ dır. O halde $f(x)$ polinomunun $\mathbb{Z}$ de hiç kökü yoktur.

(r) $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ ve $\alpha = a + bi \in \mathbb{C}$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ $f(x)$ polinomunun bir kökü ise, $\overline{\alpha} = a - bi$ de $f(x)$ in bir köküdür.

Cevap: İddia doğrudur. $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$; $a + bi \mapsto a - bi$ tasviri $\mathbb{C}$ nin bir otomorfisidir **(ödev)**. Bu otomorfide her $r \in \mathbb{R}$ için $\varphi(r) = \varphi(r + 0i) = r$ dir. $f(x) = c_0 + c_1x + ... + c_nx^n$ olsun. $\alpha \in \mathbb{C}$ $f(x)$ polinomunun bir kökü olduğundan $f(\alpha) = c_0 + c_1\alpha + ... + c_n\alpha^n = 0$ olur. Böylece,

$$0 = \varphi(0) = \varphi(c_0 + c_1\alpha + ... + c_n\alpha^n) = \varphi(c_0) + \varphi(c_1)\varphi(\alpha) + ... + \varphi(c_n)\varphi(\alpha)^n = c_0 + c_1\overline{\alpha} + ... + c_n\overline{\alpha}^n = f(\overline{\alpha})$$

elde edilir. O halde, $\overline{\alpha}$ de $f(x)$ in bir köküdür.

(s) Her $\alpha := a + bi \in \mathbb{C}$ sayısı $\mathbb{R}$ üzerinde cebirseldir.

Cevap: İddia doğrudur. $\alpha = a + bi \Rightarrow \alpha^2 = a^2 - b^2 + 2abi \Rightarrow \alpha^2 - a^2 + b^2 = 2abi \Rightarrow$

$$(\alpha^2 - a^2 + b^2)^2 = (2abi)^2 \Rightarrow \alpha^4 - 2\alpha^2(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 = 0$$

olduğundan $\alpha := a + bi \in \mathbb{C}$, $x^4 - 2(a^2 - b^2)x^2 + (a^2 - b^2)^2 + 4a^2b^2 \in \mathbb{R}[x]$ polinomunun bir köküdür. Dolayısıyla $\alpha := a + bi \in \mathbb{C}$ $\mathbb{R}$ üzerinde cebirseldir.

(t) $p \in IP$ olmak üzere $\sqrt{p} \in \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirseldir.

Cevap: İddia doğrudur. $\alpha := \sqrt{p}$ olsun. Bu durumda,

$$\alpha = \sqrt{p} \Rightarrow \alpha^2 = p \Rightarrow \alpha^2 - p = 0$$

Olduğundan α yani $\sqrt{p} \in \mathbb{R}$ $x^2 - p \in \mathbb{Q}[x]$ polinomunun bir köküdür. Dolayısıyla, $\sqrt{p} \in \mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirseldir.

Ayrıca, $x^2 - p \in \mathbb{Q}[x]$ monik polinomu $p \in IP$ için Eisenstein teoremini sağladığından bir asal polinomdur. Bu durumda, $irr(\sqrt{p}, \mathbb{Q}) = x^2 - p$ ve $\deg(\sqrt{p}, \mathbb{Q}) = 2$ dir.

(u) $F \le E$ ve $E \le K$ iki cisim genişlemesi ve $\alpha \in K$ olsun. $\alpha \in K$ E üzerinde cebirsel ise, F cismi üzerinde de cebirseldir.

Cevap: İddia yanlıştır. $F = \mathbb{Q}$**,** $E = \mathbb{R}$ ve $K = \mathbb{C}$ olsun. $\alpha = \pi \in \mathbb{C}$ alacak olursak, π $f(x) = x - \pi \in \mathbb{R}[x]$ polinomunun bir kökü olduğundan, $\mathbb{R}$ üzerinde cebirseldir. Ancak, π $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsel değildir.

(v) $F \le E$ ve $E \le K$ iki cisim genişlemesi ve $\alpha \in K$ olsun. $\alpha \in K$ F üzerinde cebirsel ise, E cismi üzerinde de cebirseldir. **(ÖDEV)**

(y) $F \le E$ bir cisim genişlemesi ve $\alpha \in E$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, α^n F üzerinde cebirsel ise, α da F üzerinde cebirseldir.

Cevap: İddia doğrudur. α^n F üzerinde cebirsel olduğundan $f(\alpha^n) = 0$ olacak biçimde bir $f(x) \in F[x] - \{0\}$ polinomu vardır. $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$; $a_m \ne 0_F$ olsun. Bu durumda,

$f(\alpha^n) = a_0 + a_1 \alpha^n + \ldots + a_m \alpha^{nm} = 0$ olacağından, α da $g(x) := a_0 + a_1 x^n + \ldots + a_m x^{nm} \in F[x] - \{0\}$ polinomunun bir kökü olur. Bu durumda, α F üzerinde cebirseldir.

(z) $\mathbb{Q}(\sqrt{5}) = \mathbb{Q}(\frac{1-\sqrt{125}}{5})$ **(ÖDEV)**

(w) $\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$ nin $\mathbb{Q}$ üzerinde sadece kendisi ile eşleniktir. **(ÖDEV)**