T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

NÖTRİNO SALINIMLARININ İNCELENMESİ

Hoda Abdolalizadeh

Fizik Anabilim Dalı

Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programı

DANIŞMAN
Prof. Dr. Ekrem AYDINER

Mayıs, 2025

İSTANBUL

Bu çalışma 14.05.2025 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Fizik Anabilim Dalı Yüksek Enerji ve Plazma Fiziği Programında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Prof. Dr. Ekrem AYDINER (Danışman)
İstanbul Üniversite
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Suat ÖZKORUCUKLU
Istanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Devrim Yazici
Yildiz Teknik Üniversitesi
Fen Fakültesi

Doç. Dr. Göksel DAYLAN ESMER
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Mithat KAYA
Marmara Üniversite
Fen Edebiyat Fakültesi

- **İntihal Programı Beyanı**

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Tezimin hazırlanma sürecinin her aşamasında bana rehberlik eden, sahip olduğu derin akademik bilgi ve deneyimiyle bana ilham veren, karşılaştığım her zorlukta yapıcı yönlendirmeleriyle destek olan değerli danışmanım Prof. Dr. Ekrem Aydıner'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

Mayıs, 2025 Hoda Abdolalizadeh

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ ..... **iv**
İÇİNDEKİLER ..... **vi**
ŞEKİL LİSTESİ ..... **vii**
TABLO LİSTESİ ..... **viii**
SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ ..... **x**
ÖZET ..... **xi**
SUMMARY ..... **xii**
1. GİRİŞ **1**
2. GENEL KISIMLAR **5**
2.1. NÖTRİNO SALINIMLARININ TEORİK TEMELLERİ 5
2.1.1. Nötrino Fiziğinin Tarihsel Genel Bakışı 5
2.1.2. Standart Model ve Nötrinoların Rolü 8
2.1.3. Nötrino Flavor Özdurumları ve Kütle Özdurumları 10
2.1.4. Nötrino Salınım Teorisinin Tarihine Bir Bakış 13
3. MATERYAL VE METOD **16**
3.1. FARKLI ORTAMLARDA NÖTRİNO SALINIMLARI 16
3.1.1. Vakumda nötrino salınımları 16
3.1.2. Maddede nötrino salınımları 22
3.2. NÖTRİNO SALINIMLARININ FARKLİ METRİKLERDE 26
3.2.1. Nötrino salınımlarının FRW Metriğinde 26
3.2.2. Nötrino salınımlarının Schwarzschild Metriğinde 34
3.3. NÖTRİNO FLAVOR SALINIMININ DOLANIKLIĞI 41
3.3.1. Nötrino flavor Salınımının Dolanıklık Entropisi 43
3.3.2. Von Neumann entropisiyle dolanıklık ölçümü 43
4. BULGULAR **48**
4.1. GRAVİTASYONEL ALAN ETKİSİ ALTINDA NÖTRİNO SALINIMINDA 48
4.1.1. Nötrino salınımlarının Kaluza-Klein (KK) Metriğinde 48

4.1.2. Gravitasyonel alan etkisi altında nötrinolarin Düzenli Faz Kayması ve kuantum Dolanıklık 57

4.2. MAGNETİK ALAN ETKİSİ ALTINDA NÖTRİNO SALINIMI VE KUANTUM DOLANIKLIK 63

5. TARTIŞMA VE SONUÇ 73

KAYNAKLAR 75

ÖZGEÇMİŞ 79

ŞEKİL LİSTESİ

Page No

Şekil 2.1: Reines ve Cowan'ın 1956'daki Savannah Nehri nötrino deneyinin şematik diyagramı... 6

Şekil 2.2: Tau Nötrino Demeti Oluşturulması..... 8

Şekil 2.3: Nötrinoların flavor karışımının resimli gösterimi. 11

Şekil 2.4: Nötrino flavor özdurumları (ν_e, ν_μ, ν_τ) ve bunların üç flavor nötrino salınım çerçevesinde kütle özdurumları (ν_1, ν_2, ν_3) ile ilişkisi. 12

Şekil 3.1: Bu diyagramlar, nötrinoların zayıf kuvvet aracılığıyla nasıl etkileştiğini göstermektedir. 23

Şekil 3.2: Evrendeki geometri türleri 28

Şekil 3.3: Nötrino kaynağı ile dedektör arasında yer alan kütleçekimsel mercek olarak Schwarzschild kütlesi 35

Şekil 3.4: Mavi eğri, hayatta kalma olasılığını $P(\nu_e \to \nu_e)$ gösterirken, kırmızı eğri, elektron nötrinosunun müon nötrinosuna dönüşme olasılığına $P(\nu_e \to \nu_\mu)$ karşılık gelmektedir. Siyah eğri ise entropiyi temsil etmektedir. 47

Şekil 4.1: Kaluza-Klein metrik yapısının şematik gösterimi..... 50

Şekil 4.2: Elektron ve müon nötrinolarının osilasyon olasılıkları. Kırmızı çizgi, elektron nötrinosunu; mavi çizgi ise müon nötrinosunu göstermektedir. Şekil (a)'da, $\eta = 1$ için ve Şekil (b) için $\eta = 0.9$, Şekil (c) için $\eta = 0.8$ ve Şekil (d) için $\eta = 0.7$'dir. 60

Şekil 4.3: (a) Şekilde, $\eta = 1$ için nötrino osilasyon entropisi $S(e,\mu)$, sıradan Minkowski uzay-zamanını göstermektedir. Deforme edilmiş Minkowski uzay-zamanındaki entropi ise (b–d) şekillerde sunulmuştur. Minkowski uzay-zamanının deformasyon parametreleri sırasıyla; (b) için $\eta = 0.9$, (c) için $\eta = 0.8$ ve (d) için $\eta = 0.7$'dir..... 61

Şekil 4.4: Çeşitli kesirli parametreler için nötrino osilasyon entropisi $S(e,\mu)$ karşılaştırması..... 62

Şekil 4.5: Üç flavor için nötrino osilasyon entropisinin karşılaştırılması 62

Şekil 4.6: (a) Sabit manyetik alan altında sol-el elektron nötrinodan sağ-el muon nötrinoya geçiş olasılığı $P(\nu_e \to \nu_\mu)$. (b), (a) bölümündeki geçiş olasılığına karşılık gelen dolanıklık entropisi. Belirliyoruz $B_1 \equiv B_\perp = 10^{16}$ G, $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-5}$ eV^2, $\mu_1 = \mu_2 = 10^{-20}$ μB, $P = 1$ MeV..... 69

Şekil 4.7: Farklı manyetik alan değerleri için mesafeye bağlı olarak nötrino spin-flavour salınımlarının olasılığı $P(\nu_e \to \nu_\mu)$ ile entropisinin karşılaştırılması $B1 < B2 < B3$, $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-5}$ eV^2, $\mu_1 = \mu_2 = 10^{-20}$ μB, $P = 1$ MeV. 70

Şekil 4.8: Farklı manyetik alan değerleri için artan manyetik alan gücü ile nötrino spin-flavour salınımının yarı periyodunun azalması arasındaki ilişki $B1 < B2 < B3 < \cdots$, $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-5}$ eV^2, $\mu_1 = \mu_2 = 10^{-20}$ μB, $P = 1$ MeV. 71

TABLO LİSTESİ

Page No

Tablo 2.1: Temel Parçacıkların Özeti..... 8

Tablo 3.1: Bu bölümde kullanılan nötrino salınım parametreleri. 21

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler **Açıklama**

$\boldsymbol{a}$: Ölçek faktörü
B : Manyetik alan
$\bar{\nu}$: Antinötrino
Δm^2 : Kütle kare farkı
E : Enerji
$F_{\mu\nu}$: Elektromanyetik alan şiddet tensörü
$\boldsymbol{G}$: Yerçekimi sabiti
Γ_μ : Spin bağlantısı
$\boldsymbol{H}$: Hubble parametresi
J : Açısal momentum
$\boldsymbol{k}$: Eğrilik sabiti
L : Yayılma mesafesi
μ_B : Bohr magneton
ν_e, ν_μ, ν_τ : Elektron, müon ve tau nötrino lezzetleri
m_D : Dirac kütlesi
M_D : Majorana
ν_μ : Nötrinonun manyetik momentumu
P_{osc} : Osilasyon olasılığı
P_{sur} : Yaşama olasılığı
$P_\mu{}^k$: kanonik momentum bile¸senleri
Φ : Salınım evresi
ρ : Yoğunluk işlemcisi
$S(\rho)$: Von Neumann entropisi
σ : Pauli matrisi
θ : Karışım açısı
$\boldsymbol{Tr}$: İz işlemi
$\widehat{S_i}$: Spin operatörü
U : PMNS mixing matrix
γ : Dirac matrisi
Z^0 : Zayıf etkile¸sme nötral akım ayar bozonu

$W^{\pm}$: Zayıf etkile¸sme yüklü akım ayar bozonları

Kısaltmalar **Açıklama**

CC : Charged Current (Yüklü Akım)
CKM : Cabibbo–Kobayashi–Maskawa matrix
CP : Charge-Parity symmetry
DONUT : Direct Observation of the Nu Tau
DUNE : Deep Underground Neutrino Experiment
FRW : Friedmann–Robertson–Walker metric
GF : Fermi coupling constant
HM : Hamiltonian in matter
KamLAND : Kamioka Liquid Scintillator Antineutrino Detector
KK : Kaluza–Klein (metric or theory)
MESM : Minimal Extended Standard Model
NC : Neutral Current (Yüksüz Akım)
PMNS : Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata matrix
SLAC : Stanford Linear Accelerator Center
SM : Standard Model
SNO : Sudbury Neutrino Observatory
UPMNS : PMNS mixing matrix in matrix notation
VW : Effective matter potential (used in Hamiltonian)
VZ : Neutral-current potential term

ÖZET

DOKTORA TEZİ

NÖTRİNO SALINIMLARININ İNCELENMESİ

Hoda Abdolalizadeh

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Fizik Anabilim Dalı

Danışman: Prof. Dr. Ekrem AYDINER

Bu çalışma, dışsal kütleçekimsel ve manyetik alanların nötrino salınım dinamikleri, faz kaymaları ve kuantum dolanıklık entropisi üzerindeki etkilerini araştırmayı amaçlamaktadır. Kütleçekim alanlarının etkisiyle bozunmuş uzay-zaman bağlamında, nötrino kütle özdurumları arasındaki faz kaymasının her salınım döngüsüyle arttığı ve bu durumun dolanıklık deseninde zamansal bir asimetri oluşturduğu gösterilmiştir. Sayısal simülasyonlar, uzay-zaman bozunumunun artmasıyla birlikte dolanıklık entropisinin de arttığını doğrulamakta; bu durum, kütleçekimsel etkilerle dolanıklık arasında önemsiz olmayan bir bağımlılığa işaret etmektedir. Buna paralel olarak, çalışma manyetik moment taşıdığı varsayılan nötrinoların Dirac çerçevesinde dış manyetik alanlardan nasıl etkilendiğini incelemektedir. Bu bölümde, güçlü manyetik alanların salınım periyotlarını kısalttığı ve özellikle spin ile lepton türü (flavor) durumları arasında kuantum dolanıklığını artırdığı da gösterilmiştir. Bu bulgular, manyetik etkilerin salınım döngülerini uzatan kütleçekimsel etkilerin aksine, döngüleri hızlandırarak dolanıklığı artırdığını göstermektedir.

Mayıs 2025, 91 sayfa.

Anahtar kelimeler: Temel parçacıklar, Nötrino salınımı, Kuantum dolanıklık

SUMMARY

Ph.D. THESIS

INVESTIGATION OF NEUTRINO OSCILLATIONS

Hoda Abdolalizadeh

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Sciences

Department of Physics

Supervisor: Prof. Dr. Ekrem AYDINER

This study aims to investigate how external fields both gravitational and magnetic—affect neutrino oscillation dynamics, phase shifts, and quantum entanglement entropy. In the context of deformed space-time influenced by gravitational fields, it is shown that the phase shift between neutrino mass eigenstates increases with each oscillation cycle, introducing temporal asymmetry into the entanglement pattern. Numerical simulations confirm that greater degrees of space-time deformation amplify the entanglement entropy, indicating a non-trivial dependency on gravitational effects. In parallel, the study examines the influence of external magnetic fields using the Dirac framework, assuming that neutrinos possess a magnetic moment. This section also demonstrates that strong magnetic fields shorten oscillation periods and increase the degree of quantum entanglement, particularly between spin and flavor states. This finding shows that, in contrast to gravitational effects that prolong oscillation cycles, magnetic effects accelerate the cycles and enhance quantum entanglement.

May 2025, 91 pages.

Keywords: Elementary particles, Neutrino oscillation, Quantum entanglement

1. GİRİŞ

Nötrinolar, maddenin temel ama yakalanması zor bileşenleridir. Maddeyle olağanüstü zayıf etkileşimlerinden dolayı genellikle "hayalet parçacıklar" olarak adlandırılırlar. Doğrudan tespitteki bu neredeyse görünmezliklerine rağmen, nötrinolar fotondan sonra evrendeki en bol bulunan parçacıklardır. Tahminlere göre her saniye vücudumuzdan yaklaşık 100 trilyon nötrino tamamen zararsız bir şekilde geçmektedir. Maddenin herhangi bir parçasıyla etkileşme olasılığı yaklaşık 10^{-24} gibi son derece düşük bir değerde olsa da, bu parçacıkların sayısının çokluğu, onların istatistiksel olarak tespitini mümkün kılmakta ve bilimsel açıdan son derece değerli hale getirmektedir.

Parçacık fiziğinin Standart Modeli'nde nötrinolar, elektron, müon ve tau parçacıklarını içeren lepton ailesine aittir. Her yüklü leptonun kendisine karşılık gelen bir nötrino ve anti-nötrinosu vardır. Nötrinolar, adlarından da anlaşılacağı üzere elektriksel olarak yüksüzdür ve $1/2$ spin değerine sahiptir. Başlangıçta kütlesiz oldukları varsayılsa da, modern deneyler — özellikle Almanya'daki Karlsruhe Tritium Neutrino Deneyi (KATRIN) — nötrino kütlesi için üst sınırı 0.8 elektronvolt (eV) olarak belirlemiştir. Bu değer, nötrinoların yaklaşık 1.4×10^{-36} kilogram kütleye sahip olduğunu göstermekte ve sıfırdan farklı olduğunu doğrulamaktadır.

Yüklü parçacıkların elektromanyetik ve güçlü nükleer kuvvetlerle etkileşime girmelerine karşın, nötrinolar yalnızca zayıf nükleer kuvvet yoluyla etkileşime girer. Bu zayıf etkileşim, özellikle beta bozunması gibi süreçleri yöneten temel bir mekanizmadır. 1930 yılında Wolfgang Pauli, beta bozunmasında enerji ve açısal momentumun korunumu yasalarını koruyabilmek için elektriksel yükü olmayan, düşük kütleli bir parçacığın varlığını öne sürmüştür. Bu teorik parçacık olan nötrino, 1956 yılında Clyde Cowan ve Frederick Reines tarafından bir nükleer reaktörde gerçekleştirilen deneyde ilk kez tespit edilmiştir. Bu deneyde kullanılan sintilasyon sıvısı ve fotomultiplier tüpleri, nötrinoların neden olduğu ikincil gama ışınlarını tespit ederek varlıklarını doğrulamıştır.

Nötrino fiziğinde sonraki büyük gelişme, 1960'larda Ray Davis Jr. ve John Bahcall tarafından Homestake altın madeninde gerçekleştirilen deneyle sağlanmıştır. Kozmik ışınlardan korunmak için yerin derinliklerinde kurulan bu deney, Güneş'in çekirdeğinde gerçekleşen nükleer füzyon tepkimelerinden yayılan nötrinoları klorin-37 atomlarıyla etkileşim yoluyla tespit

etmeye çalışmıştır. Ancak ölçülen nötrino sayısı beklenenin yalnızca üçte biri kadar çıkmıştır. Japonya'daki Super-Kamiokande gibi diğer deneyler de benzer eksiklikleri ortaya koymuştur ve bu durum, yaklaşık otuz yıl boyunca bilim insanlarını meşgul eden "Güneş Nötrino Problemi" olarak adlandırılmıştır.

Bu sorunun çözümü, nötrinoların flavor salınımın (flavor oscillation) geçirdiğinin keşfiyle ortaya çıkmıştır. Kuantum mekaniği ilkelerine göre, bir nötrino bir flavor'den başlayıp zamanla diğer flavorlere dönüşebilir. 2001 yılında Kanada'daki Sudbury Nötrino Gözlemevi'nde yapılan gözlemler, nötrino salınımlarını kesin olarak doğrulamış ve bu bulgu, Standart Model'in nötrino kütlesi varsayımının yetersiz olduğunu ortaya koymuştur.

Nötrino salınımlarının keşfinden bu yana, bu fenomenin altında yatan mekanizmaları anlamaya yönelik kapsamlı teorik ve deneysel araştırmalar yürütülmüştür. Çalışmalar, PMNS (Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata) çerçevesinde karışım açıları, kütle-kare farkları ve CP simetri ihlali fazlarının hassas ölçümlerini iyileştirmeye odaklanmıştır. Bu süreçte, *Super-Kamiokande*, *SNO*, *Daya Bay*, *T2K* ve *NOνA* gibi küresel deneyler; Güneş, atmosfer, reaktör ve hızlandırıcı kaynaklı nötrinoların davranışlarını daha iyi anlamamıza katkı sağlamıştır. Hâlihazırda devam eden ve gelecekte hayata geçirilecek olan *DUNE* ve *Hyper-Kamiokande* gibi projeler ise, nötrino kütle hiyerarşisi, olası steril nötrinolar ve nötrinoların erken evren ile madde-karşı madde asimetrisindeki rolü gibi henüz yanıtlanmamış soruları daha derinlemesine araştırmayı hedeflemektedir.

Bu çalışmada nötrino salınımlarını detaylı olarak incelemek için öncelikle bazı temel konuları inceleyeceğiz. Nötrino salınımlarının farklı fiziksel ortamlardaki davranışlarını çıkarmaya ve analiz etmeye odaklanarak başlıyoruz.

İlk olarak, vakumda nötrino osilasyonu formalizmi PMNS matrisi kullanılarak sunulmuş; flavor özdurumlarının kütle özdurumlarının süperpozisyonları olduğu ve farklı kütle durumlarından kaynaklanan faz farklarının flavor değişimine yol açtığı vurgulanmıştır. Bu türetimde, geçiş genlikleri ve olasılıkları için analitik ifadeler elde edilmiş, bunların kütle kare farklarına ve karışım açısına olan bağımlılığı özellikle vurgulanmıştır.

Ayrıca, özellikle elektron nötrinoları için zayıf etkileşimlerden kaynaklanan etkili potansiyeller aracılığıyla madde etkileri de modele dahil edilmiştir. Yapılan analiz, bu madde etkileşimlerinin etkili karışım açısını ve kütle kare farklarını nasıl değiştirdiğini ve bunun sonucunda osilasyon davranışını vakum ortamına kıyasla önemli ölçüde etkilediğini ortaya koymuştur.

Çalışmanın ikinci bölümünde, analiz uzay-zamanlara, özellikle FRW (Friedmann–Robertson–Walker) ve Schwarzschild metriklerine genişletilmiştir. Bu bağlamda, nötrinolar için Dirac denklemi, dörtbein formalizmi ve spin bağlantıları kullanılarak eğri arka planlarda yeniden formüle edilmiştir. FRW metriği için, Dirac denkleminin tam formu elde edilerek zamansal, radyal ve açısal bileşenlerine ayrılmış ve ölçek faktörü $a(t)$ ile temsil edilen kozmik genişlemenin nötrino enerjisini ve dolayısıyla zamanla değişen osilasyon davranışını nasıl etkilediği incelenmiştir. Schwarzschild geometrisi için ise, hem radyal hem de radyal olmayan yayılma yolları dikkate alınarak nötrino faz kaymaları türetilmiş; kütleçekimsel zaman genişlemesi ve uzaysal eğrilik etkileri göz önünde bulundurulmuştur. Ayrıca, kütleçekimsel merceklenmenin nötrino flavor geçiş olasılıkları üzerindeki etkisi tartışılmıştır.

Bu çalışmanın bir diğer amacı, nötrino salınımlarının farklı çevre koşullarındaki dolanıklığını araştırmaktır. Bu doğrultuda, öncelikle kuantum dolanıklık kavramı tarihsel bağlamda ele alınmış ve iki flavor arasında gerçekleşen nötrino osilasyonlarının kuantum süperpozisyonu ve dolanıklık temeli üzerinden yorumlanabileceği ortaya konmuştur. Von Neumann entropisi kullanılarak, dolanıklık miktarı nötrino flavor geçiş olasılıkları cinsinden nicelenmiştir. İki flavorlı sistemlerde, nötrinonun zamanla değişen kuantum durumu yoğunluk matrisleri aracılığıyla analiz edilerek dolanıklığın ölçümü gerçekleştirilmiştir. Flavor durumları arasındaki kuantum korelasyonları ifade eden entropi hesaplamaları, flavor değişim ve hayatta kalma olasılıklarının entropik karşılıklarını ortaya koymaktadır. Sayısal parametrelerle desteklenen bu analiz, flavor osilasyonlarının altında yatan kuantum bilgi yapısını açıklamayı amaçlamaktadır.

Bu çalışmanın temel odak noktası, nötrino salınımları ve bunlara eşlik eden kuantum dolanıklık üzerindeki dış çevresel etkilerin —özellikle gravitasyonel ve manyetik alanların— incelenmesidir. Bu amaçla, çalışmanın ilk bölümünde Kaluza-Klein metriği kullanılarak, nötrinoların radyal ve radyal olmayan yörüngelerde maruz kaldığı kütleçekimsel faz kaymaları analitik olarak araştırılmış; yalnızca standart faz farkları değil, aynı zamanda gravitasyonel merceklenmeden kaynaklanan ek faz kaymalarının da ortaya çıktığı gösterilmiştir.

Bu bulgular, kaynak ve dedektör arasındaki mesafeden bağımsız sabit bir gravitasyonel faz kaymasının varlığını ortaya koyarak, önceki teorik öngörüleri doğrulamakta ve bu öngörüleri daha karmaşık metrik senaryolara taşımaktadır.

Ayrıca, çalışmada gravitasyonel alanın etkisiyle deforme olmuş uzay-zaman koşulları ele alınmış ve Dirac denklemi üzerine uygulanan kesirli kalkülüs aracılığıyla salınım desenlerinin klasik sinüzoidal formlardan sapma gösterdiği ortaya konmuştur. Bu deformasyonlar, zamansal asimetrilere ve uzamış salınım periyotlarına yol açmakta; bu etkiler zamanla değişen flavor dolanıklığını ölçen von Neumann entropisi aracılığıyla sayısallaştırılmaktadır. Çalışmanın son bölümünde ise güçlü manyetik alanların etkisi altında gerçekleşen nötrino salınımları incelenmiştir. Özellikle spin-flavor geçişleri ve spin ile flavor serbestlik dereceleri arasında ortaya çıkan dolanıklık durumu vurgulanmıştır. Dirac denkleminin harici elektromanyetik alanlarla olan etkileşimleri de kapsayacak şekilde genişletilmesiyle, nötrinoların nötron yıldızları veya erken evren koşulları gibi çevresel ortamlardaki dinamikleri modellenmiştir. Son olarak, "Tartışma ve Sonuç" kısmında çalışmanın temel sonuçlarına yer verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

Bu özetleme, tezin konusunu oluşturan "Nötrino Salınımlarının İncelenmesi"nin anlaşılması için bir temel oluşturacaktır. Bu amaçla, nötrinoların tarihsel gelişim sürecinden başlayarak; Standart Model içindeki konumları, flavor ve kütle özdurumları arasındaki ilişki ve nötrino salınım mekanizması gibi teorik temeller kapsamlı bir şekilde ele alınacaktır. Bir sonraki bölümde ise nötrino salınımlarını farklı ortamlarda (boşlukta ve maddesel ortamda) genel hatlarıyla sunacağız.

2.1. NÖTRİNO SALINIMLARININ TEORİK TEMELLERİ

2.1.1. Nötrino Fiziğinin Tarihsel Genel Bakışı

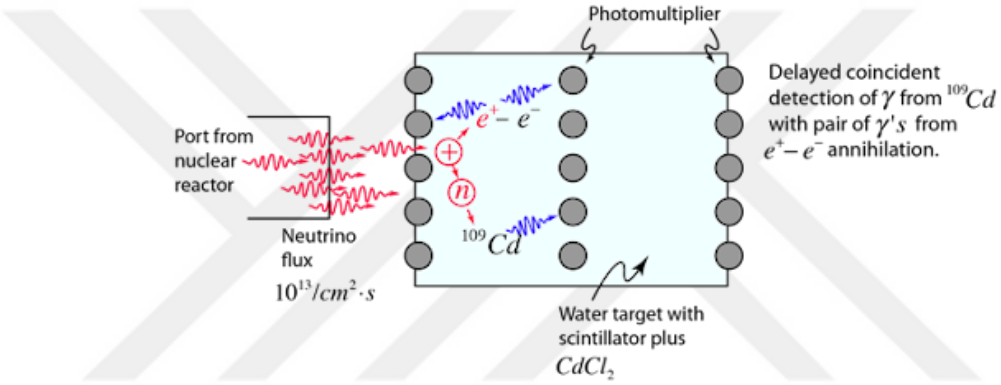
Kuantum dünyasında, enerjinin "absorption" ve "emission" kesiklidir; bu durum, atomların farklı enerji seviyeleri arasındaki geçişlerinden kaynaklanmaktadır. Ancak, beta bozunumu sırasında bir madde tarafından yayılan beta ışınlarının enerji spektrumunun sürekli olması dikkat çekici bir olgudur. Buna ek olarak, yapılan gözlemler elektronların yalnızca enerjinin bir kısmını taşıdığını, geri kalan kısmın ise eksik olduğunu ortaya koymuştur. Bu temele dayanarak, Niels Bohr gibi fizikçiler, β bozunumu sürecinde enerji korunum yasasının geçerliliğini yitirdiğini öne sürmüşlerdir(Pontecorvo, 1957). 1930 yılında, Pauli, β-bozunumu sırasında yalnızca elektronların değil, aynı zamanda sıfır durgun kütleye sahip, elektriksel olarak nötr ve fotonlardan farklı yeni bir parçacığın yayıldığını ve bu parçacığın enerjinin kalan kısmını taşıdığını öne sürmüştür. Bu parçacığın madde ile etkileşimi son derece zayıf olduğundan, deneysel olarak tespit edilmesi oldukça zordur. Pauli, bu varsayımsal parçacığa "neutron" adını vermiştir (bu isim, 1932 yılında James Chadwick tarafından keşfedilen nötron ile karıştırılmamalıdır).

Ancak, Pauli kendi hipotezine karşı temkinli bir yaklaşım sergilemiş ve önerdiği parçacığı beta bozunumu problemine yönelik "çaresiz bir çözüm" (desperate remedy) olarak nitelendirmiştir. İtalyan fizikçi Enrico Fermi, 1933-34 yıllarında beta bozunumu için ayrıntılı bir teorik çerçeve geliştirmiş ve Pauli'nin hipotezini zayıf etkileşim teorisine dahil etmiştir. Fermi, James Chadwick'in keşfettiği nötrondan ayırt edilebilmesi için, İtalyanca'da "küçük nötr parçacık"

anlamına gelen "neutrino" terimini literatüre kazandırmıştır.

$$n \rightarrow p + e^{-} + \bar{\nu}_e$$

Fermi'nin teorisi, neredeyse tespit edilemeyecek kadar zayıf etkileşim gösteren nötrinoların, zayıf nükleer kuvvet aracılığıyla nasıl etkileşime girebileceğini başarılı bir şekilde açıklamıştır. Fermi'nin ikna edici teorisine rağmen, nötrinoların madde ile son derece zayıf etkileşimi nedeniyle 25 yıldan fazla bir süre doğrudan bir kanıt elde edilememiştir. 1956 yılında Clyde Cowan ve Frederick Reines, Savannah River nükleer reaktöründe ilk başarılı nötrino tespit deneyini gerçekleştirerek bu durumu değiştirmiştir.



Şekil 2.1: Reines ve Cowan'ın 1956'daki Savannah Nehri nötrino deneyinin şematik diyagramı

Deneyde, kadmiyum klorür ile karıştırılmış büyük bir su tankı ve çevresine yerleştirilmiş scintilasyon dedektörleri kullanılmıştır. Eğer nötrinolar mevcutsa, dedektörde şu ters beta bozunumu reaksiyonunu indüklemeleri beklenmiştir:

$$\bar{\nu}_e + p \rightarrow e^{+} + n$$

Bu süreçte açığa çıkan pozitron (e^+), bir elektron ile yok oluş (annihilasyon) tepkimesine girerek tespit edilebilir gama ışınları üretmiştir. Deney, nötrinoların varlığını, özellikle de elektron antinötrinosunu ($\bar{\nu}_e$) kesin olarak doğrulamış, böylece Pauli ve Fermi'nin öngörülerini desteklemiştir. Bu çığır açıcı keşfi nedeniyle Frederick Reines, 1995 yılında Nobel Fizik Ödülü'ne layık görülmüştür.

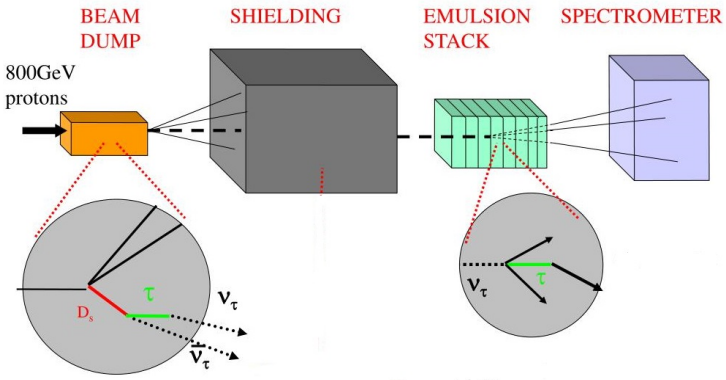
1940'lı ve 1950'li yıllarda yapılan kozmik ışın deneyleri, ağır bir elektrona benzeyen ancak nükleer etkileşimlere girmeyen muonun (μ^-) keşfine yol açtı. Bu durum, elektron nötrinosunun (ν_e) tüm zayıf etkileşimlerden sorumlu olup olmadığı ya da ikinci bir nötrino türünün var olup

olmadığı sorusunu gündeme getirdi. Bu soruyu yanıtlamak amacıyla Leon Lederman, Melvin Schwartz ve Jack Steinberger, 1962 yılında Brookhaven Ulusal Laboratuvarı'nda bir deney gerçekleştirdi. Bu deneyde, yüksek enerjili bir proton hızlandırıcısı kullanılarak pionlar (π^+) üretildi ve bu parçacıklar daha sonra muonlar ve nötrinolar oluşturarak bozundu:

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

Ortaya çıkan nötrino demeti, alüminyum dolu bir dedektöre yönlendirildi. Eğer tüm nötrinolar özdeş olsaydı, etkileşimlerin elektronlar üretmesi gerekirdi. Ancak, yalnızca muon etkileşimleri gözlemlendi. Bu durum, yeni tespit edilen nötrinonun elektron nötrinosundan (ν_e) farklı olduğunu kanıtladı ve bu parçacık muon nötrinosu (ν_μ) olarak sınıflandırıldı. Bu çığır açan keşif, ikinci bir nötrino flavorlerin varlığını ortaya koyarak parçacık fiziğinde büyük bir ilerleme sağladı. Bu önemli buluşları nedeniyle Leon Lederman, Melvin Schwartz ve Jack Steinberger, 1988 yılında Nobel Fizik Ödülü ile onurlandırıldılar.

Tau nötrinosunun (ν_τ) keşfi, 1975 yılında Martin Perl tarafından Stanford Doğrusal Hızlandırıcı Merkezi'nde (SLAC) gözlemlenen tau leptonunun (τ) tanımlanmasıyla yakından ilişkilidir. Elektron ve muon nötrinolarına benzer şekilde, fizikçiler tau leptonunun da kendisine karşılık gelen bir nötrino türüne sahip olması gerektiğini öne sürdüler. Ancak, tau nötrinosunu tespit etmek, elektron nötrinosu (ν_e) veya muon nötrinosuna (ν_μ) kıyasla önemli ölçüde daha zordu. Bunun başlıca sebepleri şunlardır: tau parçacıkları elektronlardan yaklaşık 3500 kat daha ağırdır, son derece hızlı bozunurlar ve tau nötrino etkileşimleri diğer nötrino türlerine kıyasla çok daha nadir gerçekleşir. Tau nötrinosunun varlığını doğrulamada dönüm noktası, 2000 yılında Fermilab'da gerçekleştirilen DONUT (Direct Observation of the Nu Tau) deneyi ile sağlandı. Bu deneyde, yüksek enerjili bir proton demeti kullanılarak tau nötrinoları üretildi ve bunlar nükleer emülsiyon dedektörüne yönlendirildi. Deneydeki kritik gözlem, nötrino etkileşimleri sonucunda tau leptonlarının ortaya çıkmasının belirlenmesiydi. Bu bulgu, tau nötrinolarının varlığını kesin olarak doğruladı ve böylece Standart Model içinde nötrinoların üç nesil yapısını tamamladı.



Şekil 2.2: Tau Nötrino Demeti Oluşturulması

2.1.2. Standart Model ve Nötrinoların Rolü

Parçacık fiziğinin Standart Modeli, temel parçacıkları ve bunların etkileşimlerini yöneten kuvvetleri tanımlayan temel bir teorik çerçevedir. Onlarca yıl süren geliştirme sürecinin ardından, geniş kapsamlı deneysel kanıtlarla doğrulanan Standart Model, temel parçacıkların davranışlarını ve bunların etkileşimlerini dört temel kuvvetten üçü aracılığıyla başarıyla açıklamaktadır: elektromanyetik kuvvet, zayıf nükleer kuvvet ve güçlü nükleer kuvvet. Standart Model, bilinen tüm temel parçacıkları iki ana kategoriye ayırır: "fermiyonlar" ve "bozonlar". Fermiyonlar, maddenin yapı taşlarıdır ve iki alt gruba ayrılır:kuarklar ve leptonlar. Kuarklar, protonlar ve nötronları oluşturarak atom çekirdeklerini meydana getirirken, leptonlar arasında elektronlar ve nötrinolar yer alır. Bozonlar ise etkileşimleri taşıyan parçacıklardır ve temel kuvvetlerin iletiminden sorumludur. Bozonların özellikleri şunlardır :

Kategori	**Alt Kategori**	**Parçacıklar**
Fermiyonlar (Madde Parçacıkları)	Kuvarklar	Yukarı (u), Aşağı (d), Tılsım (c), Garip (s), Tepe (t), Alt (b)
	Leptonlar	Elektron (e^-), Müon (μ^-), Tau (τ^-), Nötrinolar (ν_e, ν_μ, ν_τ)
Bozonlar (Kuvvet Taşıyıcıları)	Ölçü Bozonları	Foton (γ), Gluon (g), W^+/W^-, Z^0
	Higgs Bozonu	Higgs (H^0)

Tablo 2.1: Temel Parçacıkların Özeti

- Foton (γ): Elektromanyetik kuvvetin taşıyıcısıdır.
- W ve Z bozonları: Zayıf nükleer kuvvetin etkileşimlerini yönetir.
- Gluon (g): Güçlü nükleer kuvvetin taşıyıcısıdır ve kuarkları bir arada tutar.

Leptonlar arasında, nötrinolar benzersiz bir rol oynar. Standart Model, her biri yüklü bir lepton ile ilişkili olan üç nötrino flavorlerin tanımlar: elektron nötrinosu (ν_e), muon nötrinosu (ν_μ) ve tau nötrinosu (ν_τ). Nötrinolar elektrik yükü taşımayan, son derece hafif ve yalnızca zayıf nükleer kuvvet aracılığıyla etkileşime giren parçacıklardır, bu da onları tespit etmeyi olağanüstü derecede zor hale getirir. Standart Modelin ilk formülasyonunda, nötrinoların kütlesiz olduğu varsayılmıştır. Bu varsayım, nötrinoların yalnızca zayıf nükleer etkileşimlere katıldığı gözlemine dayanıyordu. Zayıf kuvvet, çok kısa menzilli bir etkileşim olup beta bozunması gibi süreçlerden sorumludur. Ayrıca, yapılan gözlemler nötrinoların yalnızca sol elli (left-handed) şiralliğe sahip olduğunu göstermiştir; yani, tüm zayıf etkileşimlerde yalnızca sol elli nötrinolar ve sağ elli antinötrinolar yer almıştır.

Ancak, 20. yüzyılın sonları ve 21. yüzyılın başlarında gerçekleştirilen deneysel keşifler, nötrinoların kütlesiz olduğu varsayımını kökten sarsmıştır. Bu alandaki en çığır açıcı bulgulardan biri, nötrino salınımı (neutrino oscillation) fenomeninin keşfiydi. İlk olarak 1998 yılında Super-Kamiokande deneyi tarafından gözlemlenen ve 2001 yılında Sudbury Nötrino Gözlemevi (SNO) tarafından doğrulanan bu olgu, nötrinoların uzayda yayılırken bir flavorden diğerine dönüşebildiğini göstermektedir. Nötrino salınımı, yalnızca nötrinoların sıfırdan farklı bir kütleye sahip olması durumunda gerçekleşebilir. Kuantum mekaniği ilkelerine göre, flavor salınımları ancak kütle özdurumlarının karışımı sonucu ortaya çıkabilir. Bu keşif, Standart Model'in eksik olduğunu ve nötrino kütlesini içerecek şekilde değiştirilmesi gerektiğini kanıtlamıştır (Beuthe, 2003; Giunti et al., 1993). Diğer temel parçacıklardan farklı olarak, nötrinolar Higgs mekanizmasının ötesinde bir süreçle kütle kazanabilir.

Nötrinoların küçük de olsa kütleli olduğunun anlaşılmasıyla, teorik fizikçiler Standart Model'i genişleterek bu durumu açıklamaya yönelmiştir. Bu amaçla öne sürülen en önemli yaklaşım, seesaw mekanizması(İlk kez 1981 yılında Tsutomu Yanagida tarafından ortaya atılan bu isim) olarak adlandırılan ve Standart Model'e sağ-elli steril nötrino (yani zayıf etkileşimlere girmeyen nötrino) alanları ekleyen modeldir. Seesaw mekanizmasının "Type I" olarak bilinen en basit versiyonunda, Standart Model zayıf kuvvetin etkisine inert (tepkisiz) birkaç sağ-yönelimli nötrino ile genişletilir ve bu yeni parçacıklara çok büyük bir kütle değeri atfedilir.

Sağ-yönelimli nötrino alanlarının sisteme dahil edilmesi, nötrino kütle yapısına iki tür kütle terimi ekler:

- **Dirac kütlesi** (m_D): Sol-yönelimli aktif nötrino ile eklenen sağ-yönelimli nötrino

arasında, Higgs mekanizması benzeri bir etkileşimden doğan kütle terimidir. m_D, diğer fermiyonların kütlelerine benzer şekilde elektrozayıf ölçekli bir büyüklükte olabilir (Higgs vakum beklenti değeri mertebesinde).

- **Majorana kütlesi** (M_R): Sağ-yönelimli nötrino için izin verilen, Standart Model'in ötesindeki çok büyük bir kütledir. Bu terim, sağ-yönelimli nötrinonun kendi antiparçacığı ile kütle kazandığını ifade eder ve lepton sayısını 2 birim ihlal eder. M_R, elektrozayıf ölçeğin çok üzerinde olabilir.

Bu eklemeler sonucu tek bir nötrino türü için ortaya çıkan kütle matrisi, sol-yönelimli (ν_L) ve sağ-yönelimli (ν_R) nötrino durumlarını karıştıran 2×2'lik bir matristir.

$$M_\nu = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & M_R \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

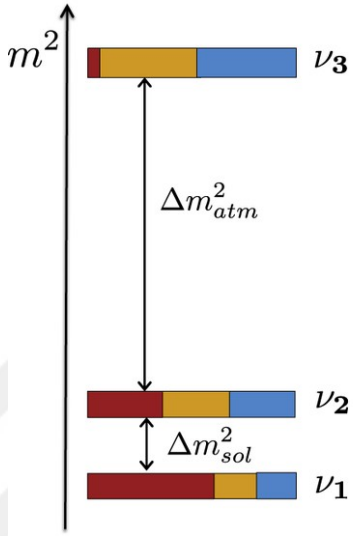
burada m_D off-diagonal eleman olarak Dirac kütlesini, M_R ise sağ-elli nötrinonun büyük Majorana kütlesini temsil etmektedir. Bu matriste sol üst köşedeki 0, sol-elli nötrino için başlangıçta Standart Model'de bir kütle terimi olmadığını belirtir. Yukarıdaki 2×2 kütle matrisi, nötrino alanlarının kütle özdurumlarına (eigenstate) geçiş yapmak için diyagonalize edilir. Köşegenleştirme sonucunda iki özdurum elde edilir: biri çok hafif diğeri ise çok ağır kütleye sahip olacaktır. Bu mekanizmaya "seesaw" adının verilmesinin sebebi, özdeğerlerden birinin büyürken diğerinin küçülmesi olgusudur. Tıpkı bir oyun parkındaki tahterevallide bir taraf yukarı çıkarken diğer tarafın aşağı inmesi gibi, nötrino kütle matrisi de bir ağır kütle değeri büyürken karşılık gelen hafif kütlenin küçülmesini sağlar. Yukarıdaki formülden de görüldüğü üzere, eğer M_R daha da büyük bir değer alırsa hafif nötrino kütlesi orantılı olarak daha da küçük hale gelir. Bu zıt yönlü değişim, mekanizmanın işleyişine dair sezgisel bir isimlendirme olarak seesaw (hani ağır taraf aşağı iner hafif taraf yukarı kalkar) benzetmesini son derece uygun kılar. Bu bölümde, Seesaw mekanizmasının Standart Model'i nasıl genişlettiğini ve çok küçük fakat sıfır olmayan kütlelere sahip nötrinolar için nasıl bir çözüm sunduğunu kısaca açıkladik (Akhmedov et al., 2000; King, 2016; Miranda and Valle, 2016).

2.1.3. Nötrino Flavor Özdurumları ve Kütle Özdurumları

Parçacık fiziğinde, nötrinolar üretilirken ve tespit edilirken üç olası flavor özdurumundan biri olarak gözlemlenir: Elektron nötrinosu (ν_e), Muon nötrinosu (ν_μ) ve Tau nötrinosu (ν_τ). Ancak, bu flavor özdurumları uzayda serbestçe hareket eden gerçek fiziksel durumlar değildir; yani,

vakumda Hamiltonyen'in gerçek özdurumları değillerdir. Bunun yerine, nötrinoların gerçek fiziksel durumları kütle özdurumlarıdır ve şu şekilde ifade edilir:

ν_1 (en hafif kütle durumu), ν_2 (orta kütle durumu), ν_3 (en ağır kütle durumu)



Şekil 2.3: Nötrinoların flavor karışımının resimli gösterimi.

Bu, her bir nötrino flavor özdurumunun, farklı kütle özdurumlarının kuantum süperpozisyonu olduğu anlamına gelir. Flavor özdurumları $(\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)$ ile kütle özdurumları (ν_1, ν_2, ν_3) arasındaki ilişki, kuark sektöründeki CKM matrisinin nötrino karşılığı olan **Pontecorvo-Maki-Nakagawa-Sakata (PMNS)** matrisi ile tanımlanır. Bu ilişkinin matematiksel ifadesi aşağıdaki gibidir:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_{i=1}^{3} U_{\alpha i} |\nu_i\rangle \tag{2.2}$$

Her bir flavor için denklem şu şekilde açılmaktadır:

$$\begin{aligned} |\nu_e\rangle &= U_{e1}|\nu_1\rangle + U_{e2}|\nu_2\rangle + U_{e3}|\nu_3\rangle \\ |\nu_\mu\rangle &= U_{\mu 1}|\nu_1\rangle + U_{\mu 2}|\nu_2\rangle + U_{\mu 3}|\nu_3\rangle \\ |\nu_\tau\rangle &= U_{\tau 1}|\nu_1\rangle + U_{\tau 2}|\nu_2\rangle + U_{\tau 3}|\nu_3\rangle \end{aligned} \tag{2.3}$$

Matris formunda:

$$\begin{bmatrix} |\nu_e\rangle \\ |\nu_\mu\rangle \\ |\nu_\tau\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} |\nu_1\rangle \\ |\nu_2\rangle \\ |\nu_3\rangle \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

Burada U_{PMNS}, nötrino karışımını yöneten üniter 3×3 boyutlu bir matristir. PMNS matrisi, üç karışım açısı ($\theta_{12}, \theta_{23}, \theta_{13}$) ve bir CP ihlal fazı ($\delta_{CP}$) kullanılarak parametrize edilebilir (Gribov and Pontecorvo, 1969; Maki et al., 1962) :

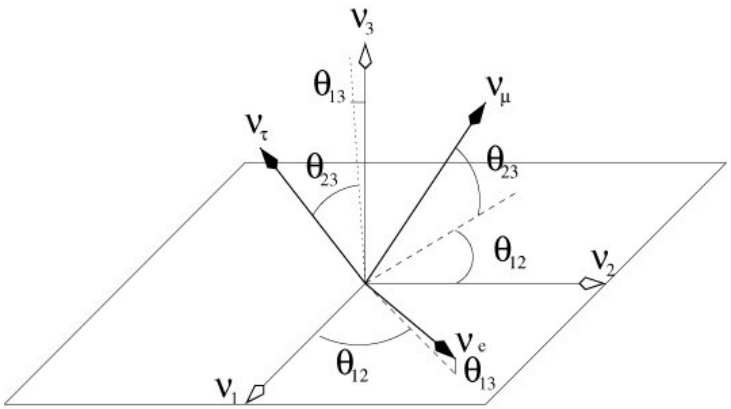
$$U_{\text{PMNS}} = \begin{bmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta_{CP}} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta_{CP}} & c_{23}c_{13} \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

Burada: $c_{ij} = \cos\theta_{ij}, \quad s_{ij} = \sin\theta_{ij}$

olmak üzere:

- θ_{12}: Güneş karışım açısı(ν_1 ile ν_2 arasındaki karışımı tanımlar)
- θ_{23}: Atmosferik karışım açısı (ν_2 ile ν_3 arasındaki karışımı tanımlar)
- θ_{13}: Reaktör karışım açısı (ν_1 ile ν_3 arasındaki karışımı tanımlar)
- δ_{CP}: CP ihlal fazı, evrendeki madde-antimadde asimetrisinden sorumlu olabilir.

Flavor özdurumları, kütle özdurumlarıyla örtüşmediği için nötrinolar uzayda hareket ederken bir flavordan diğerine dönüşebilir. Bu durumun nedeni, farklı kütle özdurumlarının farklı kütlelere sahip olması ve zaman içinde aralarında faz farkının oluşmasıdır. Başlangıçta belirli bir flavor olarak üretilen bir nötrino, ilerleyen süreçte başka bir flavor olarak gözlemlenebilir. Bu olaya nötrino salınımı adı verilir.



Şekil 2.4: Nötrino flavor özdurumları (ν_e, ν_μ, ν_τ) ve bunların üç flavor nötrino salınım çerçevesinde kütle özdurumları (ν_1, ν_2, ν_3) ile ilişkisi.

2.1.4. Nötrino Salınım Teorisinin Tarihine Bir Bakış

Neutrino ile ilişkili en ilginç fenomenlerden biri, neutrino kütlesine doğrudan kanıt sağlayan kuantum mekaniksel bir süreç olan neutrino salınımıdır. Bu bölümde kütle öz durumları kavramına, bunların flavor öz durumlarıyla olan ilişkisine ve neutrino salınımlarının temel yapısına derinlemesine değinmektedir.

1957 yılında Bruno Pontecorvo, nötr kaon sistemindeki karışımdan ilham alarak nötrino-antineutrino salınımları fikrini ilk kez önerdi ifadesi şunu anlatır. 1950'lerde fizikçiler, nötr kaonlar adı verilen parçacıkların beklenmedik bir şekilde birbiriyle karışabildiğini ve bir türden diğerine dönüşebildiğini keşfetmişti. Bu olay, parçacık fiziğinde karışma (mixing) veya salınım (oscillation) olarak bilinir. Bruno Pontecorvo, bu fikirden yola çıkarak nötrinoların da benzer şekilde davranabileceğini düşündü. Onun önerisi, bir nötrinonun (örneğin bir elektron nötrinosunun) zaman içinde antineutrino'ya (karşıt parçacığına) dönüşebileceği fikriydi. Bu, modern anlamda bugün anladığımız nötrino salınımlarından biraz farklıydı çünkü günümüzde nötrino-antineutrino dönüşümünden çok, bir flavor nötrinosunun (elektron, muon, tau) başka bir flavor nötrinosuna dönüşmesi üzerinde duruyoruz. Ancak Pontecorvo'nun önerisi, nötrinoların karışabileceği ve sabit kimliklere sahip olmadıkları yönünde atılmış ilk teorik adımdı . Bu deneyden önceki bölümde bahsedildiği üzere, 1962 yılında Brookhaven Ulusal Laboratuvarı'nda Leon Lederman, Melvin Schwartz ve Jack Steinberger tarafından gerçekleştirilen deneyle müon nötrinosunun keşfi, nötrinoların yalnızca tek bir tür olmadığını gösteren önemli deneysel kanıtlar sağlamış (Danby et al., 1962); ayrıca birden fazla nötrino kütle durumunun var olabileceği fikrini güçlendirmiş ve nötrino karışımı ile salınımlarının incelenmesine zemin hazırlamıştır.

Ayni dönemde, Ziro Maki, Masami Nakagawa ve Shoichi Sakata teorik cepede önemli bir adım attılar. 1962'de yayımladıkları çalışmada, iki farklı nötrino flavorin karışabileceğini ve gözlenen nötrino türlerinin aslında kütle özdurumlarının süperpozisyonları olabileceğini öne sürdüler. Bu çalışma, bugün PMNS matrisi (Pontecorvo–Maki–Nakagawa–Sakata karışım matrisi) olarak bilinen lepton karışım matrisinin ilk kuramsal temellerini oluşturmuştur. Artık birden fazla nötrino türünün (örneğin, elektron ve müon nötrinoları) varlığı deneysel olarak da teyit edilmiştir.

Nötrino salınımı kuramının en kritik motivasyonlarından biri, Güneş'ten gelen nötrinoların

beklenenden az gözlenmesiyle ortaya çıkan Güneş nötrino problemidir. 1970'larda Ray Davis ve John Bahcall, özellikle Homestake Madeni'nde gerçekleştirdikleri güneş nötrino deneylerinde, güneş modellerinin öngördüğünden önemli ölçüde daha az nötrino tespit ettiler (Davis, 1994). Bu tutarsızlık, elektron nötrinolarının farklı flavorlere dönüştüğünü düşündürdü. 1978'de Lincoln Wolfenstein, nötrinoların madde içerisindeki ilerleyişinde, serbest uzaydakinden farklı bir salınım dinamiği olacağını gösterdi. Wolfenstein, elektronlarca zengin bir ortamda (örneğin Güneş'in çekirdeğinde veya Dünya'da) elektron nötrinolarının diğer flavorlerle koherent ileri saçılma yoluyla etkileşerek etkin bir kırılma indisine maruz kalacağını, bunun da salınım frekansı ve açısını değiştireceğini öne sürdü. 1985'te Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW) etkisi literatüre geçti. MSW etkisi, madde içerisindeki farklı kütle özdurumları karışım açısının, ortamdaki elektron yoğunluğuna ve nötrino enerjisine bağlı olarak değişeceğini belirtir. Özellikle Güneş'in yüksek yoğunluklu çekirdeğinde elektron nötrinosu başlangıçta kendi özdurumunda olsa da madde etkisiyle karışım açısı değişir; nötrino düşük yoğunluklu bölgelere çıktığında farklı bir flavor özdurumuna geçiş yapmış olabilir.Bu mekanizma, Güneş nötrino problemine güçlü bir kuramsal çözüm sundu (Langacker et al., 1987; Smirnov, 2005, 2019).

1998 yılında Japonya'daki **Super-Kamiokande** deneyi, Takaaki Kajita'nın liderliğinde, nötrino salınımlarına dair ilk güçlü deneysel kanıtı sundu — yani, nötrinoların uzayda yol alırken tür (flavor) değiştirme olgusu. Super-Kamiokande, Kamioka madeninde, Ikeno Dağı'nın 1.000 metre altında yer alan büyük bir yeraltı nötrino dedektörüdür. Bu dedektör, içi 50.000 ton ultra saf suyla dolu devasa bir tanktan oluşur ve çevresi binlerce hassas ışık detektörü (fotomultiplier tüpü) ile kaplıdır. Sistem, nötrinoların sudaki elektronlar veya çekirdeklerle etkileşime girmesi sonucu oluşan Cherenkov ışığının zayıf parlamalarını yakalamak üzere tasarlanmıştır. Bu çığır açan keşif, kozmik ışınların (uzaydan gelen yüksek enerjili parçacıklar) Dünya atmosferine çarpmasıyla oluşan ve müon nötrinoları ile elektron nötrinolarını içeren *atmosferik nötrinoların* incelenmesinden geldi. Super-Kamiokande, bu nötrinoları iki yönden ölçtü:

- Dedektörün hemen üzerinde oluşan aşağı yönlü nötrinolar,
- Dünya'nın karşı tarafında oluşarak gezegenin tamamını kat edip dedektöre ulaşan yukarı yönlü nötrinolar.

Anahtar gözlem, yukarı yönlü müon nötrinolarının sayısının beklenenden çok daha az

olmasıydı; oysa elektron nötrinolarının sayısı tahminlerle uyumluydu. Bu durum, müon nötrinolarının uzun mesafeler boyunca yol alırken dedektörün doğrudan gözlemleyemediği tau nötrinolarına dönüştüğünü gösteriyordu. Bu sonuç, nötrinoların kütlesiz olmadığını ve tür değiştirme yeteneğine sahip olduklarını gösteren ilk doğrudan ve istatistiksel olarak anlamlı kanıt oldu — ki bu, Standart Model'in başlangıçta hesaba katmadığı bir olguydu(Fukuda et al., 1998; Kim, 2015; Suzuki, 2019).

1999 yılında Kanada'daki Sudbury Nötrino Gözlemevi (SNO), 1000 ton ağır su (D_2O) kullanan bir nötrino dedektörü olarak faaliyete geçmiştir. SNO'nun benzersiz özelliği, hem elektron nötrinoya duyarlı yük akımı (Charged Current - CC) etkileşimlerini, hem de tüm nötrino türlerine duyarlı yüksüz akım (Neutral Current - NC) etkileşimlerini farklı kanallar aracılığıyla tespit edebilmesidir.

2001 yılında SNO, Güneş'ten gelen nötrinoların yalnızca elektron nötrinoları olarak değil, toplam nötrino akısı şeklinde de ölçülebileceğini göstermiştir. Bunu takiben, 2002 yılında yayımlanan sonuçlarla SNO, nötrino salınımının doğrudan deneysel kanıtını sunmuştur. Ağır sudaki nötrinoların NC etkileşimlerinden elde edilen veriler, elektron nötrinolarındaki kaybın diğer flavor nötrinolara dönüşümünden kaynaklandığını kesin olarak ortaya koymuştur (Jelley et al., 2009).

2002–2003 yıllarında, KamLAND dedektörü Japonya'daki çeşitli nükleer reaktörlerden gelen 3 MeV enerjili antinëtrino akısını 180 km civarında bir ortalama baz uzunluğunda gözlemledi. KamLAND, nükleer reaktörlerden yayılan elektron antinötrinoları tespit ederek, uzak mesafelerdeki salınım etkisini ölçmeyi amaçlıyordu. Bu deney, nötrino salınımının yalnızca kozmik veya güneş kaynaklarında değil, yapay kaynaklarda da geçerli olduğunu ispatlayarak nötrino osilasyonlarının standart üç-nötrino çerçevesini sağlamlaştırdı(Araki et al., 2005).

Bir on yıl sonra, Daya Bay deneyi (2012), son bilinmeyen karışım açısı (θ_{13}) üzerine hassas ölçümler yaparak salınım parametrelerini yüksek doğrulukla rafine etmiş ve standart üç nötrino salınım çerçevesini güçlendirmiştir (Guo et al., 2007). Bugün itibarıyla üç nötrino salınım modelinin tüm temel parametreleri büyük ölçüde belirlenmiş durumdadır.

3. MATERYAL VE METOD

3.1. FARKLI ORTAMLARDA NÖTRİNO SALINIMLARI

3.1.1. Vakumda nötrino salınımları

Bu bölümde, vakumda nötrino salınımları için gerekli formülü türeteceğiz. Nötrinolar, $W^{\pm}$ bozonları aracılığıyla gerçekleşen yüklü akım (CC) etkileşimlerine ve Z bozonu aracılığıyla gerçekleşen yüksüz akım (NC) etkileşimlerine katılan temel parçacıklardır. Ancak, nötrinonun vakumda gerçekleşen salınım sürecinde herhangi bir fiziksel etkileşim söz konusu değildir; yani bozon alışverişi ya da dış ortamla bir etkileşim gerçekleşmez.

Flavor özdurumlarını genel olarak $\alpha \in \{e, \mu, \tau\}$ olacak şekilde ν_α ile göstereceğiz. Kütle özdurumları ise ν_i şeklinde adlandırılır ve burada $i = 1,2,3$ olmak üzere üç kütleli nötrino varsayılır. Bu nedenle, flavor nötrinoları için Yunan harfleri, kütle özdurumları için ise Latin harfleri kullanılır. Bir flavor nötrinosu ν_α, kütle özdurumlarının bir süperpozisyonu olarak tanımlanabilir:

$$|\nu_\alpha\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i} |\nu_i\rangle, \tag{3.1}$$

Her bir kütleli nötrino, bir $U_{\alpha i}$ faktörü ile ağırlıklandırılmıştır. Bu ağırlıklar, lepton karışım matrisi veya PMNS matrisi (Pontecorvo, Maki, Nakagawa ve Sakata) olarak adlandırılan bir üniter matrisin elemanları tarafından verilir. Özdurumlar aşağıdaki denklemi sağlar:

$$\langle \nu_\alpha | \nu_\beta \rangle = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.2}$$

Ve lepton karışım matrisinin üniterliği nedeniyle:

$$\langle \nu_i | \nu_j \rangle = \delta_{ij} \tag{3.3}$$

Vakumda, kütleli nötrinolar, (serbest) Hamiltonyen'in özdurumlarıdır ve aşağıdaki denklemi sağlar:

$$H_0 |\nu_i\rangle = E |\nu_i\rangle, \qquad E = \sqrt{\vec{P}^2 + m^2} \tag{3.4}$$

Bu nedenle, Schrödinger denklemi aşağıdaki şekilde ifade edilir:

$$i\partial_t|\nu_i\rangle = H_0|\nu_i\rangle \tag{3.5}$$

Şu çözümü verir:

$$|\nu_i(t)\rangle = \exp(-iEt)|\nu_i\rangle \tag{3.6}$$

Bu davranış, doğrudan zayıf özdurumlarla ilişkilendirilebilir, çünkü Eq.(3.1) her zaman için geçerlidir. Dolayısıyla, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i}|\nu_i(t)\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i}\exp(-iEt)|\nu_i\rangle \tag{3.7}$$

Denklem Eq.(3.1)'in tersini kullanarak, ve Eq.(3.7)'ye yerine koyabiliriz, dolayısıyla şu sonuca varılır:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i}U_{\beta i}\exp(-iEt)|\nu_\beta\rangle \tag{3.8}$$

Bu nedenle, zaman t'deki flavor nötrinosu, zaman $t = 0$'daki flavor özdurumlarının bir süperpozisyonudur. Bu son denklemi kullanarak, başlangıçta α flavor bir nötrinonun β flavor salınım yapma geçiş genliğini kolaylıkla hesaplayabiliriz.

$$A_{\alpha\beta}(t) = \langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U^*_{\alpha i}U_{\beta i}e^{-iEt} \tag{3.9}$$

ve buradan ayrıca salınım olasılığı da elde edilebilir (Kayser, 2005).

$$P_{\alpha\beta}(t) = |A_{\alpha\beta}(t)|^2 = \sum_{ij} U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}e^{-i(E_i-E_j)t} \tag{3.10}$$

Göreliliksel nötrinolar için, serbest Hamiltonyenin özdeğerleri yaklaşık olarak şu şekilde ifade edilebilir:

$$E \approx E + \frac{m^2}{2E} \tag{3.11}$$

Burada, eşit momentum yaklaşımı $E = |\vec{P}|$ kullanılmıştır. Nötrinoların ışık hızına çok yakın bir

hızda hareket ettiğini ve bu nedenle $t = L$, şu sonuca ulaşırız:

$$P_{\alpha\beta}(E,L) = \sum_{ij} U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} e^{i\frac{\Delta m^2_{ij}}{2E}L} \tag{3.12}$$

burada $\Delta m^2_{ij} = m^2_i - m^2_j$, kütle kare farklarını ifade etmektedir. Olasılığı ayrıca enerji E ve baseline L'nin bir fonksiyonu olarak da ifade ederiz. Toplamayı ayırarak aşağıdaki ifadeyi elde edebiliriz:

$$P_{\alpha\beta}(E,L) = \sum_{i} |U_{\alpha i}|^2 |U_{\beta i}|^2 + \sum_{i\neq j} [U^*_{\alpha i} U_{\beta i}][U_{\alpha j} U^*_{\beta j}] e^{i\frac{\Delta m^2_{ij}}{2E}L} \tag{3.13}$$

Dikkat edilmelidir ki, $i \leftrightarrow j$ değişimi için, ikinci toplamda yer alan terim complex conjugate ile değiştirilir. $e^{i\frac{L}{2E}\Delta m^2_{ji}}$ terimi açılarak dört ayrı toplam şeklinde yeniden yazılabilir. Bu durumda flavor geçiş olasılığı şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = \underbrace{\sum_i U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha i} U^*_{\beta i}}_{P_1} + \underbrace{\sum_{i\neq j} U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U^*_{\beta j}}_{P_2} - \underbrace{2\sum_{i\neq j} U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \sin^2\left(\frac{\Delta m^2_{ji} L}{4E}\right)}_{P_3} \\ \underbrace{+\, i\sum_{i\neq j} U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \sin\left(\frac{\Delta m^2_{ji} L}{2E}\right)}_{P_4} \end{aligned} \tag{3.14}$$

Şimdi P_1 ve P_2 terimlerini birlikte değerlendireceğiz:

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= \sum_i U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha i} U^*_{\beta i} + \sum_{i\neq j} U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \\ &= \sum_i \sum_j U^*_{\alpha i} U_{\beta i} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} = \left| \sum_i U_{\alpha i} U^*_{\beta i} \right|^2 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Bu ifadeyi değerlendirmek için karışım matrisi U'nun üniter özelliğini kullanıyoruz. Üç kütle özdurumu varsayımı altında:

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} & U_{e3} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} & U_{\mu 3} \\ U_{\tau 1} & U_{\tau 2} & U_{\tau 3} \end{pmatrix}, \quad U^\dagger = \begin{pmatrix} U^*_{e1} & U^*_{\mu 1} & U^*_{\tau 1} \\ U^*_{e2} & U^*_{\mu 2} & U^*_{\tau 2} \\ U^*_{e3} & U^*_{\mu 3} & U^*_{\tau 3} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

Üniterlik koşulu:

$$UU^{\dagger} = \begin{pmatrix} \sum_i U_{ei}U_{ei}^* & \sum_i U_{ei}U_{\mu i}^* & \sum_i U_{ei}U_{\tau i}^* \\ \sum_i U_{\mu i}U_{ei}^* & \sum_i U_{\mu i}U_{\mu i}^* & \sum_i U_{\mu i}U_{\tau i}^* \\ \sum_i U_{\tau i}U_{ei}^* & \sum_i U_{\tau i}U_{\mu i}^* & \sum_i U_{\tau i}U_{\tau i}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Dolayısıyla:

$$\sum_i U_{\alpha i}U_{\beta i}^* = \delta_{\alpha\beta} \quad \Rightarrow \quad P_1 + P_2 = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.18}$$

Şimdi P_3 terimini hesaplayalım:

$$P_3 = \sum_{i\neq j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E}\right) \tag{3.19}$$

İndeksleri ayırarak:

$$\begin{aligned} P_3 &= \sum_{i>j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}\right) + \sum_{i<j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ji}^2 L}{4E}\right) \\ &= \sum_{i>j} U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}\right) + \sum_{i>j} U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^* \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}\right) \\ &= \sum_{i>j} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}\right) \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* + U_{\alpha j}^* U_{\beta j} U_{\alpha i} U_{\beta i}^*\right) \\ &= \sum_{i>j} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}\right) \left[U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^* + \left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*\right)^*\right] \\ &= 2\sum_{i>j} \Re\left(U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*\right) \sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}\right) \end{aligned} \tag{3.20}$$

Burada $\Re(Z)$, Z karmaşık sayısının gerçek kısmını temsil etmektedir. İfade P_3'te yalnızca gerçek kısım dikkate alınmıştır çünkü bu ifadede yer alan $\sin^2\left(\frac{\Delta m_{ij}^2 L}{4E}\right)$ terimi simetrik ve tamamen gerçek bir fonksiyondur. $U_{\alpha i}^* U_{\beta i} U_{\alpha j} U_{\beta j}^*$ çarpımı karmaşık bir sayı olabilir; ancak, gerçek bir fonksiyon olan $\sin^2$ ile birlikte değerlendirildiğinde, yalnızca bu çarpımın gerçek kısmı fiziksel ve ölçülebilir geçiş olasılığına katkı sağlar. Simetrik fonksiyon yapısı nedeniyle sanal kısımlar birbirini götürür ve bu nedenle P_3 ifadesinde yer almaz.

Benzer şekilde P_4 terimini de hesaplayalım:

$$\begin{aligned}
P_4 &= \sum_{i\neq j} U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{ji}L}{2E}\right) \\
&= -\sum_{i>j} U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}L}{2E}\right) + \sum_{i<j} U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{ji}L}{2E}\right) \\
&= -\sum_{i>j} U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}L}{2E}\right) + \sum_{i>j} U^*_{\alpha j}U_{\beta j}U_{\alpha i}U^*_{\beta i}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}L}{2E}\right) \\
&= \sum_{i>j}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}L}{2E}\right)\left(U^*_{\alpha j}U_{\beta j}U_{\alpha i}U^*_{\beta i} - U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right) \\
&= \sum_{i>j}\sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}L}{2E}\right)\left[\left(U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right)^* - U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right] \\
&= -2i\sum_{i>j}\Im\left(U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}\right)\sin\left(\frac{\Delta m^2_{ij}L}{2E}\right)
\end{aligned} \tag{3.21}$$

Burada $\Im(Z)$, Z karmaşık sayısının sanal kısmını temsil etmektedir.

Şimdi, Eq.(3.18), Eq.(3.20) ve Eq.(3.21) numaralı ifadeleri Eq.(3.14) denklemine yerleştirerek elde ederiz:

$$\begin{aligned}
P_{\alpha\beta}(E,L) = \delta_{\alpha\beta} &- 4\sum_{i>j}\Re[U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}]\sin^2(\frac{\Delta m^2_{ij}}{2E}L) \\
&+2\sum_{i>j}\Im[U^*_{\alpha i}U_{\beta i}U_{\alpha j}U^*_{\beta j}]\sin(\frac{\Delta m^2_{ij}}{2E}L)
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Bu formdan, 3ν durumunda nötrino salınımlarının Δm^2_{21} ve Δm^2_{31} büyüklüklerine (burada Δm^2_{32} bu ikisinin bir kombinasyonudur) ve ayrıca lepton karışım matrisi U'nun elemanlarına bağlı olduğunu görebiliriz. Üç kütleli nötrino durumu dikkate alındığında, bu matris üç farklı dönüşümün çarpımı olarak yazılabilir Eq.(2.5).

Eğer tüm nötrinolar kütlesiz olsaydı, kütle kare farkı $\Delta m^2_{ij} = 0$ olurdu. Bu durumda Eq.(3.22) numaralı denklem şu şekilde indirgenir:

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \tag{3.23}$$

Bu sonuç, $\alpha \neq \beta$ için $\nu_\alpha \to \nu_\beta$ geçişinin olasılığının sıfır olduğunu ifade eder. Dolayısıyla, vakumda nötrino flavour değişimlerinin gözlemlenmiş olması, nötrinoların kütlesiz olmadığını

ve ayrıca kütle özdurumlarının dejenerik olmadığını göstermektedir. Şimdi yalnızca iki kütle özdurumunun, yani ν_1 ve ν_2'nin önemli olduğunu varsayalım ve bu durumda $\Delta m^2_{21} = \Delta m^2$ olarak tanımlansın. Buna karşılık gelen iki flavor durumu da ν_e ve ν_μ'dur. Bu durumda, bu iki flavor durumu arasında geçişi tanımlayan 2×2 boyutunda bir karışım matrisi U'nun var olması beklenir ve bu matris üniter olmalıdır. Bir 2×2 üniter matris yalnızca bir dönüş açısı ve üç faz faktörü içerir. Ancak yapılan çalışmalar göstermiştir ki bu faz faktörleri salınıma etki etmez ve dolayısıyla ihmal edilebilir. Bu durumda, sadece bir açısal parametre içeren olası üniter matris şu şekildedir:

$$U = \begin{pmatrix} U_{e1} & U_{e2} \\ U_{\mu 1} & U_{\mu 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.24}$$

ve buna bağlı olarak:

$$U^\dagger = \begin{pmatrix} U^*_{e1} & U^*_{\mu 1} \\ U^*_{e2} & U^*_{\mu 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Bu ifadeyi Eq.(3.22) numaralı denkleme uyguladığımızda:

$$4U^*_{\alpha 2}U_{\beta 2}U_{\alpha 1}U^*_{\beta 1} = -4\sin\theta\cos\theta\cos\theta\sin\theta = -\sin^2 2\theta$$

Dolayısıyla, $\alpha \neq \beta$ için Eq.(3.22) denkleminden:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \to \nu_\beta) &= \delta_{\alpha\beta} - (-\sin^2 2\theta)\sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) + 2 \times 0 \times \sin\left(\frac{\Delta m^2 L}{2E}\right) \\ &= \sin^2 2\theta \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 L}{4E}\right) \end{aligned} \tag{3.26}$$

ve bu sonuç, iki flavor'lu nötrino salınımı için standart olasılık ifadesini verir.

Tablo 3.1: Bu bölümde kullanılan nötrino salınım parametreleri.

Parameter	Value
Δm^2_{21}	$7.5 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}^2$
Δm^2_{ee}	$2.5 \times 10^{-3}\,\mathrm{eV}^2$
$\sin^2\theta_{12}$	0.32
$\sin^2\theta_{23}$	0.55
$\sin^2\theta_{13}$	0.022
δ	-0.40π

3.1.2. Maddede nötrino salınımları

Son bölümde vakumda nötrino salınımlarını tartıştık. Ancak nötrinolar madde içinden geçerken, ortamda bulunan parçacıklarla koherent ileri saçılma sonucu oluşan etkili potansiyeller nedeniyle bu salınımlar değişir. Nötrinolar, çevredeki parçacıklarla etkileşirken ileri saçılmaya uğrayabilir ve bu durum, ekstra bir etkileşim potansiyel enerjisi oluşturabilir. Bu iki şekilde gerçekleşebilir:

1. Bir nötrino ν_α yalnızca ilgili yüklü lepton L_α ile bir W bozonu değişimi yapabilir. Yerkürenin temel malzemesinde anlamlı sayılarda bulunan tek yüklü lepton elektrondur. Bu nedenle, bu etki yalnızca bir ν_e nötrinosunda (ve onun antiparçacığı $\bar{\nu}_e$'de) gözlemlenebilir. İlgili etkileşim potansiyeli, açıkça, temel malzemede bulunan elektronların sayı yoğunluğu, N_e, ile orantılı olacaktır. Standart Model'e göre, bu potansiyel aynı zamanda Fermi bağlaşım sabiti G_F ile orantılı olacaktır. Standart Model şunu verir:

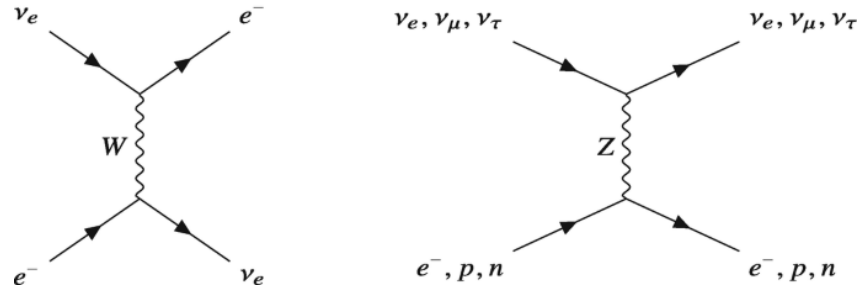
$$V(W) = \begin{cases} +\sqrt{2}G_F N_e & \text{for} \quad \nu_e \\ -\sqrt{2}G_F N_e & \text{for} \quad \bar{\nu}_e \end{cases} \tag{3.27}$$

Bu potansiyel işareti, parçacık ile antiparçacık arasındaki temel farkı yansıtır: nötrino ve antinötrino madde içerisinde zıt işaretli potansiyellere maruz kalırlar. Bu da onların salınım dinamiklerini farklılaştırır. Söz konusu potansiyel, Hamiltonyen matrisine katkı sağlar ve sadece ν_e bileşenini etkileyerek flavor geçişlerini yönlendiren etkin kütle ayrımlarını ve karışım açılarını değiştirir.

2. Standart Model'e göre, herhangi bir flavorden bir nötrino, çevredeki bir elektron, proton veya nötron ile bir Z bozonu değişimi yapabilir. Ayrıca, Z bağlaşmaları elektron ve proton için eşit ve zıt işaretlidir. Bu nedenle, yerkürenin temel maddesi elektriksel olarak nötr olduğu için, Z-bozon değişimi yoluyla elektron ve proton katkıları birbirini götürecektir. Sonuç olarak, türden bağımsız bir potansiyel V_Z öne çıkacak ve birim hacim başına düşen nötron sayısı, N_n, ile orantılı olacaktır. Standart Model şunu verir:

$$V(Z) = \begin{cases} -\frac{\sqrt{2}}{2}G_F N_e & \text{for} \quad \nu \\ +\frac{\sqrt{2}}{2}G_F N_e & \text{for} \quad \bar{\nu} \end{cases}$$

Öncelikle, maddeden geçen bir nötrino için laboratuvar referans çerçevesinde Schrödinger



Şekil 3.1: Bu diyagramlar, nötrinoların zayıf kuvvet aracılığıyla nasıl etkileştiğini göstermektedir.

denklemini ele alalım.

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\nu_\alpha(t)\rangle = H_M|\nu_\alpha(t)\rangle \tag{3.28}$$

Burada, H_M, maddede yayılma için karşılık gelen Hamiltonyen'dir.

$$H_M = H_{Vac} + V_W \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + V_Z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Hamiltonyenin ifadesine, relatif enerji özdeğerlerini etkilemeden, birim matrisin herhangi bir katını ekleyebilir veya çıkarabiliriz. Eq.(3.29)'u şu şekilde yeniden yazıyoruz:

$$H_M = H_{Vac} + V_W \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + V_W \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + V_Z \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = H_{Vac} + V_W \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Öncelikle, vakumdaki iki nötrino durumunda H_{Vac}'ın bileşenlerini belirleyeceğiz.

$$\begin{aligned} \langle \nu_\alpha | H_{Vac} | \nu_\beta \rangle &= \langle \sum_i U_{\alpha i} \nu_i | H_{Vac} | \sum_j U_{\beta j} \nu_j \rangle \\ &= \sum_{ij} \langle U_{\alpha i} \nu_i | H_{Vac} | U_{\beta j} \nu_j \rangle \\ &= \sum_i U^*_{\alpha i} U_{\beta i} E_i \end{aligned} \tag{3.31}$$

Burada, E_i'nin kütle özdurumu ν_i'nin enerjisi olduğu gerçeğini kullandık.

$$E_i = \sqrt{P^2 + {m_i}^2} = (P + \frac{{m_i}^2}{2P}) \tag{3.32}$$

Şimdi H_{Vac}'ın (α, β) bileşenini belirliyoruz.

$H_{\alpha\alpha}$:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\alpha} &= \cos^2\theta\left(P+\frac{m_1^2}{2P}\right)+\sin^2\theta\left(P+\frac{m_2^2}{2P}\right) \\ &= (\cos^2\theta+\sin^2\theta)P+\cos^2\theta\frac{m_1^2}{2P}+(1-\cos^2\theta)\frac{m_2^2}{2P} \\ &= P+\cos^2\theta\frac{m_1^2}{2P}-\frac{m_2^2}{2P}-\cos^2\theta\frac{m_2^2}{2P} \\ &= P-\frac{\cos^2\theta}{2P}\Delta m^2+\frac{m_2^2}{2P} \\ &= P+\frac{m_2^2}{2P}-\frac{2\cos^2\theta-1}{4P}\Delta m^2-\frac{\Delta m^2}{4P} \\ &= -\frac{2\cos^2\theta-1}{4P}\Delta m^2+P+\frac{2m_2^2-\Delta m^2}{4P} \\ &= -\cos 2\theta\frac{\Delta m^2}{4P}+P+\frac{m_1^2+m_2^2}{4P}. \end{aligned} \tag{3.33}$$

$H_{\beta\beta}$ için benzer şekilde ilerleyerek:

$$\begin{aligned} H_{\beta\beta} &= \sin^2\theta\left(P+\frac{m_1^2}{2P}\right)+\cos^2\theta\left(P+\frac{m_2^2}{2P}\right) \\ &= \cos 2\theta\frac{\Delta m^2}{4P}+P+\frac{m_1^2+m_2^2}{4P}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

$H_{\alpha\beta}, H_{\beta\alpha}$:

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta} = H_{\beta\alpha} &= -\cos\theta\sin\theta\left(P+\frac{m_1^2}{2P}\right)+\sin\theta\cos\theta\left(P+\frac{m_2^2}{2P}\right) \\ &= (-\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)P-\cos\theta\sin\theta\frac{m_1^2}{2P}+\sin\theta\cos\theta\frac{m_2^2}{2P} \\ &= \sin\theta\cos\theta\left(\frac{m_2^2}{2P}-\frac{m_1^2}{2P}\right) \\ &= \sin 2\theta\frac{\Delta m^2}{4P}. \end{aligned} \tag{3.35}$$

Böylece:

$$H_{\text{Vac}} = \frac{\Delta m^2}{4P}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix}+\left(P+\frac{m_1^2+m_2^2}{4P}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3.36}$$

Yalnızca girişim yapan katkıların göreceli fazları önemli olduğundan ve dolayısıyla yalnızca göreceli enerjiler önemli olduğundan, H_{Vac} ifadesinden birim matrisin bir katını serbestçe çıkarabiliriz. Ayrıca, yüksek derecede relativistik bir nötrino için, $P \cong E$ olarak yaklaşık bir

ifade kullanılabilir. Böylece Eq.(3.36) şu hale gelir:

$$H_{\text{Vac}} = \frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} \tag{3.37}$$

Eq.(3.37) ve Eq.(3.30) kullanılarak:

$$\begin{aligned} H_M &= \frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix} -\left(\cos 2\theta - \frac{(V_W/2)}{(\Delta m^2/4E)}\right) & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta - \frac{(V_W/2)}{(\Delta m^2/4E)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{\Delta m^2}{4E}\begin{pmatrix} -(\cos 2\theta - x) & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & (\cos 2\theta - x) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.38}$$

burada,

$$x = \frac{(V_W/2)}{(\Delta m^2/4E)} \tag{3.39}$$

Basitlik açısından, Eq.(3.38)'i Eq.(3.37) formunda yazmak istiyoruz. Bu, bir X bulmamız durumunda yapılabilir ki,

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_M &= (\cos 2\theta - x)X, \\ \sin 2\theta_M &= (\sin 2\theta)X, \\ \Delta m_M^2 &= \frac{\Delta m^2}{X}. \end{aligned}$$

Bu denklemleri çözdüğümüzde, elde ederiz

$$\sin^2 2\theta_M = \frac{\sin^2 2\theta}{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - x)^2} \tag{3.40}$$

$$\Delta {m_M}^2 = \Delta m^2 \sqrt{\sin^2 2\theta + (\cos 2\theta - x)^2} \tag{3.41}$$

Böylece, Eq.(3.40) ve Eq.(3.41) kullanılarak, Δm^2 ve θ sırasıyla $\Delta {m_M}^2$ ve θ_M ile değiştirildiğinde, maddede Hamiltonyenin vakumdaki ile aynı olduğu görülür.

$$H_M = \frac{\Delta {m_M}^2}{4E}\begin{pmatrix} -\cos 2\theta_M & \sin 2\theta_M \\ \sin 2\theta_M & \cos 2\theta_M \end{pmatrix} \tag{3.42}$$

H_M'nin özdeğerleri şunlardır:

$$\lambda_1 = +\frac{\Delta m_M^2}{4E}, \qquad \lambda_2 = -\frac{\Delta m_M^2}{4E} \tag{3.43}$$

Böylece, Eq.(3.28), Eq.(3.43) kullanılarak çözülür.

$$|\nu(t)\rangle = |\nu_1\rangle e^{-i\frac{\Delta m_M^2}{4E}t}\cos\theta_M + |\nu_2\rangle e^{+i\frac{\Delta m_M^2}{4E}t}\sin\theta_M \tag{3.44}$$

$|\nu(t)\rangle$ durumunun t anında $|\nu_\mu\rangle$ olarak tespit edilme olasılığı şudur:

$$P_M(\nu_e \to \nu_\mu) = |\langle\nu_\mu|\nu(t)\rangle|^2 = \sin^2 2\theta_M \sin^2\left(\frac{\Delta m_M^2}{4E}t\right) \tag{3.45}$$

3.2. NÖTRİNO SALINIMLARININ FARKLİ METRİKLERDE

Fizikte, bir metrik, belirli bir uzay içindeki noktalar arasındaki mesafeyi tanımlayan matematiksel bir fonksiyondur ve uzay-zamanın geometrik ve fiziksel özelliklerini tanımlamada temel bir araç olarak hizmet eder. Düz uzay-zaman bağlamında, özel görelilikte kullanılan Minkowski metriği, uzay-zaman aralığının Lorentz dönüşümleri altında değişmez kalmasını sağlar. Buna karşılık, genel göreliliğin temelini oluşturan eğri uzay-zamanda Riemann metriği, madde ve enerjinin uzay-zaman geometrisi üzerindeki etkisini dikkate alır ve böylece onun eğriliğini ve dinamik yapısını tanımlar. Farklı metriklerde nötrino salınım olasılıkları, metriğin dinamiklerine bağlı olarak değişklik gösterir. Bu bölümde, nötrino salınımlarının iki önemli uzay-zaman metriği olan FRW ve Schwarzschild metrikleri altındaki davranışı ele alınmaktadır.

3.2.1. Nötrino salınımlarının FRW Metriğinde

Friedmann–Robertson–Walker (FRW) metrikleri, Genel Görelilik'teki Einstein alan denklemlerinin homojen (her noktada aynı özelliklere sahip), izotropik (her yönde aynı görünen) ve genişleyen ya da büzülen bir evreni tanımlayan çözümler kümesidir.

Bir metriği yazmadan önce, Vierbein (tetrad) formalizmini tanıtmalıyız :
e_μ^a (Vierbein): Fiziksel olarak bir uzay-zaman modeli olarak yorumlanan bir Lorentz manifoldu üzerinde tanımlanır; biri zaman benzeri ve üçü uzay benzeri olmak üzere dört noktasal

ortonormal vektör alanı kümesidir. Ayrıca, Vierbein alanı metrik tensörün "matris karekökü" olarak kabul edilebilir. Örneğin, Friedmann–Robertson–Walker (FRW) metrik için uygun bir Vierbein seçimi şu şekilde verilebilir:

$$e^a_\mu = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{a(t)}{\sqrt{1-Kr^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)r\sin\theta \end{pmatrix}. \tag{3.46}$$

Metrik tensör, Vierbein kullanılarak :
$g_{\mu\nu} = e^a_\mu \, e^b_\nu \, \eta_{ab}, \quad \eta_{ab} = \mathrm{diag}(+1,-1,-1,-1)$

olarak tanımlanır ve yukarıdaki seçim için FRW metrik şu matrisle ifade edilir:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a^2(t)}{1-Kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a^2(t)r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a^2(t)r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{3.47}$$

FRW metrik formunda uzay-zamanın satır elemanı şu şekilde ifade edilir:

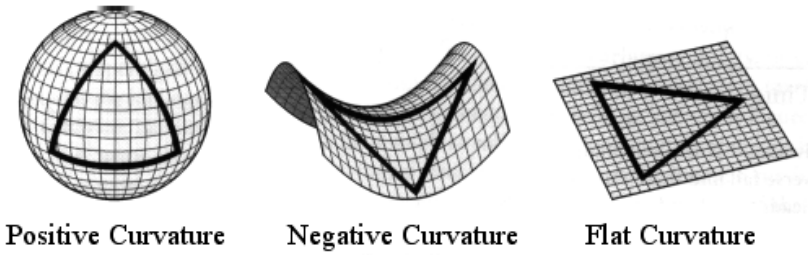
$$ds^2 = g_{\mu\nu}\,dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2\right)\right], \tag{3.48}$$

burada

- $a(t)$: Evrenin ölçek faktörüdür (scale factor); evrenin genişlemesi veya daralması bu şekilde anlaşılabilir.
- K: Evrenin uzaysal eğriliğidir (spatial curvature).

Ayrıca,

$$\begin{cases} K = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Bu duruma düz evren diyoruz } (\mathbb{R}^3), \\ K = -1 \quad \Rightarrow \quad \text{Bu duruma kapalı evren diyoruz } (\mathbb{S}^3), \\ K = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{Bu duruma açık evren diyoruz } (\mathbb{H}^3). \end{cases}$$



Şekil 3.2: Evrendeki geometri türleri

Bölümün başında da belirtildiği gibi, FRW uzay-zamanı evrenin büyük ölçekte homojen ve izotropik olduğunu varsayar. Bu simetrilerden dolayı metrik, azimutal açı olan ϕ'ye bağlı değildir; yani metrik elemanları ϕ yönünde değişmezlik gösterir. Bu durum, uzayın yönsel (azimutal) simetriye sahip olduğunu ve fiziksel niceliklerin ϕ'ye göre değişmediğini ortaya koyar. Dolayısıyla, metrik bileşenleri yalnızca t, r ve θ'ya bağlıdır.

Genel görelilik çerçevesinde, eğri bir uzay-zamanda Dirac denklemi, klasik düzlemsel Minkowski uzayındaki versiyonundan farklı olarak, uzay-zamanın eğriliğini dikkate alacak şekilde değiştirilmelidir. Bunun nedeni, uzay-zamanın eğriliğinin parçacıkların (özellikle spin $1/2$ fermiyonlarının) hareketi üzerinde doğrudan bir etkisi olmasıdır. Düz uzayda Dirac denklemi:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m)\psi = 0 \tag{3.49}$$

iken, eğri uzayda türevler kovaryant hale gelir. Eğri uzayda kovaryant Dirac denklemi şu şekilde yazılır:

$$\left(i\gamma^{\mu}(x)\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - i\gamma^{\mu}(x)\Gamma_{\mu}(x)\right)\psi(x) = m\psi(x). \tag{3.50}$$

Denklemdeki bileşenler şunlardır:

- $\gamma^{\mu}(x)$: Eğriliğe Bağlı Dirac Matrisleri

  Düz Minkowski uzayında Dirac matrisleri sabit olup, Minkowski metriği (η^{ab})ile bağlantılıdır:

  $$\{\gamma^{a}, \gamma^{b}\} = \gamma^{a}\gamma^{b} + \gamma^{b}\gamma^{a} = 2\eta^{ab}I \tag{3.51}$$

  Eğri uzayda ise Dirac matrisleri artık konum bağımlıdır ve tetrad (vierbein) alanları

aracılığıyla tanımlanır:

$$\gamma^{\mu}(x) = e_a^{\mu}(x)\gamma^a. \tag{3.52}$$

Burada $e_a^{\mu}(x)$, eğri uzay ile Minkowski uzayı arasında bir dönüşüm sağlayan tetrad (vierbein) alanlarıdır. γ^a ise sabit Minkowski uzayındaki Dirac matrisleridir.

$$\begin{aligned}
\gamma^0(x) &= \gamma^0, \\
\gamma^1(x) &= -\frac{\sqrt{1-Kr^2}}{a(t)}\,\gamma^1, \\
\gamma^2(x) &= -\frac{1}{a(t)\,r}\,\gamma^2, \\
\gamma^3(x) &= -\frac{1}{a(t)\,r\sin\theta}\,\gamma^3.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

- $\Gamma_{\mu}(x)$: Spin Bağlantısı (Spin Connection)

  Eğri uzayda kovaryant türev tanımlamak için bağlantı terimleri eklenmelidir. Spin bağlantısı $\Gamma_{\mu}(x)$, fermiyonların eğri uzaydaki paralel taşınmasını tanımlayan bir bağlantı terimidir ve tetrad alanları kullanılarak şu şekilde yazılır:

$$\Gamma_{\mu} = \frac{1}{8}\omega_{\mu}^{ab}[\gamma_a, \gamma_b]. \tag{3.54}$$

  Burada ω_{μ}^{ab}, eğri uzaydaki tetrad alanlarının türevleriyle ilişkili olan spin bağlantısıdır ve yerel Lorentz çerçevesinin konuma bağlı olarak nasıl değiştiğini, yani nasıl döndüğünü veya kıvrıldığını tanımlar. $[\gamma_a, \gamma_b]$ ise Dirac matrislerinin komütatörüdür. Buna dayanarak, spin Bağlantısı bileşenleri şunlardır :

$$\begin{aligned}
\Gamma_0 &= 0, \\
\Gamma_1 &= \frac{\dot{a}(t)}{2\sqrt{1-Kr^2}}\,\gamma^0\gamma^1, \\
\Gamma_2 &= \frac{1}{2}\,\dot{a}(t)\,r\,\gamma^0\gamma^2 + \frac{1}{2}\sqrt{1-Kr^2}\,\gamma^2\gamma^1, \\
\Gamma_3 &= \frac{1}{2}\,\dot{a}(t)\,r\sin\theta\,\gamma^0\gamma^3 + \frac{1}{2}\sqrt{1-Kr^2}\,\sin\theta\,\gamma^3\gamma^1 + \frac{1}{2}\cos\theta\,\gamma^3\gamma^2.
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Şimdi parantezin ikinci terimini kontrol ediyorum:

$$\left[\Gamma_{\mu}(x), \gamma^{\nu}(x)\right] = \frac{\partial\gamma^{\nu}(x)}{\partial x^{\mu}} + \Gamma_{\mu\rho}^{\nu}\,\gamma^{\rho}(x). \tag{3.56}$$

Burada *Christoffel sembolleri* $\Gamma^{\nu}_{\mu\rho}$, eğri uzay-zamanda koordinat bazlarının nasıl değiştiğini tanımlar. Bu semboller, metrik tensörü $g_{\mu\nu}$ 'den türetilir ve vektörlerin eğri uzayda nasıl paralel taşındığını belirler.

$$\Gamma^{\nu}_{\mu\rho} = \frac{1}{2} g^{\nu\tau} \left(\frac{\partial g_{\tau\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\tau}}{\partial x^{\rho}} - \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\tau}} \right). \tag{3.57}$$

Dolayısıyla,

$$\gamma^{\mu}(x)\Gamma_{\mu}(x) = -\frac{3}{2}\frac{\dot{a}(t)}{a(t)}\gamma^{0} + \frac{\sqrt{1-Kr^2}}{a(t)\,r}\gamma^{1} + \frac{\cos\theta}{2a(t)\,r\sin\theta}\gamma^{2}. \tag{3.58}$$

Robertson Walker uzay-zamanında Dirac denklemini elde ederiz:

$$\left\{ i a \gamma^{0} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{3\dot{a}(t)}{2a(t)} \right) - i \left[\sqrt{1-kr^2}\,\gamma^{1} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r}\gamma^{2} \left(\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{\cos\theta}{2\sin\theta} \right) + \frac{1}{r\sin\theta}\gamma^{3}\frac{\partial}{\partial\phi} \right] - m a \right\} \psi(t,r \tag{3.59}$$

Basitleştirmek için, spinör alanı şu şekilde ayrıştırılır:

$$\psi(t,r,\theta,\phi) = \frac{1}{a^{3/2}(t)\,r\,(\sin\theta)^{1/2}}\Psi(t,r,\theta,\phi). \tag{3.60}$$

Burada $\Psi(t,r,\theta,\phi)$, yeniden ölçeklendirilmiş yeni spinör fonksiyonudur. Bu dönüşüm, Dirac denklemi içindeki ölçek faktörüne olan bağımlılığı ortadan kaldırarak hesaplamayı basitleştirir. Şu andan itibaren, FRW geometrisi için $k = 0$ (flat FRW universe) durumu dikkate alınmalıdır:

$$i a \frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-i\gamma^{1}\frac{\partial}{\partial r} - i\frac{\gamma^{2}}{r}\frac{\partial}{\partial\theta} - i\frac{\gamma^{3}}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi} - m a \right)\Psi. \tag{3.61}$$

Açık bir çözüm bulmak için, Dirac denklemini radyal kısım ve açısal kısım için ayrı ayrı çözüyoruz:

$$i a \frac{\partial}{\partial t}\psi = T(t)R(r)Y(\theta,\phi)\psi, \tag{3.62}$$

$$T(t) = e^{-i\int\omega(t)dt} \tag{3.63}$$

$$R(r) = -i\gamma^{0}\gamma^{1}\frac{\partial}{\partial r} + \gamma^{1}\frac{1}{r}Y - i a \gamma^{0} m, \tag{3.64}$$

$$Y(\theta,\phi) = i\gamma^{1}\gamma^{0}\gamma^{2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{i}{\sin\theta}\gamma^{1}\gamma^{0}\gamma^{3}\frac{\partial}{\partial\phi}. \tag{3.65}$$

Dirac matrisleri : $\gamma^0 = \begin{pmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix}, \gamma^j = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix}$ dayalı, İndirgenmiş Dirac denkleminin açısal kısmı:

$$Y(\theta,\phi)\psi_J = i\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & -\sigma^2 \end{pmatrix}\frac{\partial}{\partial\theta}\psi_J - \frac{m_j}{\sin\theta}\begin{pmatrix} -\sigma^1 & 0 \\ 0 & \sigma^1 \end{pmatrix}\psi_J. \tag{3.66}$$

Yukarıdaki formda, öz çözümleri (eigenvalue problem) elde etmek istiyoruz: $Y\psi_J = y\psi_J$. ψ_J iki bileşenli bir spinör olduğundan, şu şekilde tanımlanır:

$$\psi_J = \begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}.$$

Bu matrisleri spinör bileşenlerine uyguladığımızda denklem şu şekle dönüşür:

$$y\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = i\sigma^2\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} - \frac{m_j}{\sin\theta}\sigma^1\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}. \tag{3.67}$$

Bu sistem aşağıdaki diferansiyel denklem formuna indirgenir:

$$\begin{cases} y\Theta_1 = -i\frac{d\Theta_2}{d\theta} - \frac{m_j}{\sin\theta}\Theta_2, \\ y\Theta_2 = i\frac{d\Theta_1}{d\theta} - \frac{m_j}{\sin\theta}\Theta_1. \end{cases} \tag{3.68}$$

İlk denklemi i ile çarparak reel hale getiriyoruz:

$$\begin{cases} \frac{d\Theta_2}{d\theta} = iy\Theta_1 + i\frac{m_j}{\sin\theta}\Theta_2, \\ \frac{d\Theta_1}{d\theta} = -iy\Theta_2 + i\frac{m_j}{\sin\theta}\Theta_1. \end{cases} \tag{3.69}$$

Şimdi, $k = -iy$ olarak tanımlarsak, sistem şu hale gelir:

$$\frac{d}{d\theta}\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m_j}{\sin\theta} & -k \\ -k & \frac{m_j}{\sin\theta} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \end{pmatrix}. \tag{3.70}$$

$$\begin{cases} \Theta_1 = -\frac{1}{k}\left(\frac{d}{d\theta} + \frac{m_j}{\sin\theta}\right)\Theta_2, \\ \Theta_2 = \frac{1}{k}\left(\frac{d}{d\theta} - \frac{m_j}{\sin\theta}\right)\Theta_1 \end{cases} \tag{3.71}$$

Bu, FRW uzay-zamanında indirgenmiş açısal Dirac denklemi kümesidir. Şimdi indirgenmiş Dirac denkleminin radyal kısmına bakalım (Küresel koordinatlarda, özellikle bazı konvansiyonlar altında, radyal yön için genellikle $\gamma^1 \to \gamma^3$ şeklinde bir yeniden adlandırma yapılır):

$$a\omega(t)\psi_{Jk} = -i\gamma^0\gamma^3\frac{\partial}{\partial r}\psi_{Jk} + \frac{1}{r}\gamma^3 k\psi_{Jk} - ia\gamma^0 m\psi_{Jk} \tag{3.72}$$

$$a\omega(t)\psi_{Jk} = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{bmatrix}\frac{\partial}{\partial r}\psi_{Jk} + \frac{k}{r}\begin{bmatrix} 0 & \sigma^3 \\ \sigma^3 & 0 \end{bmatrix}\psi_{Jk} + am\begin{bmatrix} -\mathbb{I} & 0 \\ 0 & \mathbb{I} \end{bmatrix}\psi_{Jk} \tag{3.73}$$

$$\frac{d}{dr}\begin{bmatrix} \mathscr{R}_1 \\ \mathscr{R}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{k}{r} & a(\omega+m) \\ -a(\omega-m) & \frac{k}{r} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathscr{R}_1 \\ \mathscr{R}_2 \end{bmatrix} \tag{3.74}$$

Son olarak, radyal bileşenler:

$$\begin{cases} \mathscr{R}_1 = -\frac{1}{a(\omega-m)}\left(\frac{d}{dr} - \frac{k}{r}\right)\mathscr{R}_2, \\ \mathscr{R}_2 = -\frac{1}{a(\omega+m)}\left(\frac{d}{dr} + \frac{k}{r}\right)\mathscr{R}_1 \end{cases} \tag{3.75}$$

Genel çözümü aşağıdaki formda yazabiliriz:

$$\psi_{mJk}(t,r,\theta,\phi) = \mathscr{R}(r)\,\Theta(\theta)\exp\left(im_j\phi - i\int_{t_0}^{t}\omega(t')\,dt'\right) \tag{3.76}$$

$\psi_{mJk}(t,r,\theta,\phi)$ ifadesinde yer alan m, J ve k indisleri, küresel simetriye sahip bir uzay-zamandaki spinör çözümünü karakterize eden kuantum sayılarıdır. J indisi, parçacığın yörüngesel açısal momentumu ile spininin birleşiminden doğan toplam açısal momentumu ifade eder. $m \equiv m_j$ ise toplam açısal momentumun z-eksenindeki izdüşümünü temsil eder ve çözümün azimutal bağımlılığında $\exp(im_j\phi)$ terimi olarak yer alır. k indisi ise spin-yörünge etkileşimini belirleyen parametredir ve spinör bileşenlerinin paritesine ve açısal yapılarına göre ayrım yapar. Bu tür bir gösterim, Dirac spinörünün zamansal, radyal ve açısal bileşenlerinin sistematik olarak ayrılmasına olanak tanır.

Terim $\exp(im_j\phi)$, küresel koordinatlarda spinör dalga fonksiyonunun azimutal bağımlılığını temsil eder. Eğri uzay-zamanda Dirac denkleminin açısal kısmı çözülürken doğal olarak ortaya çıkar. Yukarıdaki tüm bilgileri kullanarak, FRW geometrisindeki Dirac denkleminin çözümünü

aşağıdaki gibi yazabiliriz:

$$\psi_{mJk}(t,r,\theta,\phi) = \frac{1}{a^{3/2}(t)\, r\, \theta^{1/2}} \begin{bmatrix} \mathscr{R}_1(r)\,\Theta_1(\theta) \\ \mathscr{R}_2(r)\,\Theta_2(\theta) \end{bmatrix} \exp\left(im_j\phi\right) \exp\left(-i\int_{t_0}^{t} \omega(t')\,dt'\right) \quad (3.77)$$

Zamana bağlı olmayan tüm terimleri içine alan bir uzaysal fonksiyon $\phi_{mJk}(r,\theta,\phi)$ tanıtıyoruz.

$$\psi_{mJk}(t,r,\theta,\phi) \equiv \frac{1}{a^{3/2}(t)} \exp\left(-i\int_{t_0}^{t} \omega(t')\,dt'\right) \phi_{mJk}(r,\theta,\phi) \quad (3.78)$$

Özel görelilikte, serbest bir parçacığın toplam enerjisi şu şekilde verilir:

$$E^2 = p^2 + m^2. \quad (3.79)$$

Ancak, genişleyen bir evrende bir parçacığın fiziksel momentumu korunmaz, bunun yerine eşlik eden momentum (comoving momentum) korunur. Eşlik eden momentum, fiziksel momentum ile şu şekilde ilişkilidir:

$$p_{\text{fiziksel}} = \frac{\varepsilon}{a(t)}. \quad (3.80)$$

Bu ifadeyi göreli enerji denklemi içine koyarsak:

$$\omega^2(t) = \left(\frac{\varepsilon}{a(t)}\right)^2 + m^2. \quad (3.81)$$

Hubble teleskobundan elde edilen gözlemler, mevcut evrenin sıfırdan farklı bir ivmeyle (acceleration) genişlemekte olduğunu doğrulamaktadır (Perlmutter et al., 1999; Riess et al., 1998). Bu nedenle, uzun zaman aralıklarında gerçekleşen nötrino salınımlarında, bu genişlemenin salınımın doğası üzerinde kaçınılmaz bir etkisi olmalıdır. Bu durum özellikle erken evrende oluşan nötrinolar için göz ardı edilemez. Söz konusu nötrinolar, evrenin farklı genişleme evrelerinden geçmiştir; bunlar sırasıyla kozmolojik sabit baskın evre, radyasyon baskın evre ve madde baskın evredir. Örneğin, Evrenin radyasyon egemen olduğu çağında, ölçek faktörü $a(t) = \beta t^{\alpha}$ ve $\alpha = \frac{1}{2}$ olarak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{(\beta t^{1/2})^2} + m^2} \quad (3.82)$$

Yüksek enerjili nötrinolar için $\varepsilon \to \infty$ geçiş olasılığı şu şekilde davranır:

$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(t) \to \sum_{i,j} 2U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U^*_{\alpha j}U_{\beta j}e^{-\frac{\beta}{3\varepsilon}(m_i^2-m_j^2)t^{3/2}} \tag{3.83}$$

Öte yandan, erken Evren için, ölçek faktörü $a(t) = e^{Ht}$ gibi davranır; burada H Hubble sabitidir:

$$\omega(t) = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{e^{2Ht}} + m^2} \tag{3.84}$$

Yüksek enerjili nötrinolar için geçiş olasılığı şu şekilde davranır:

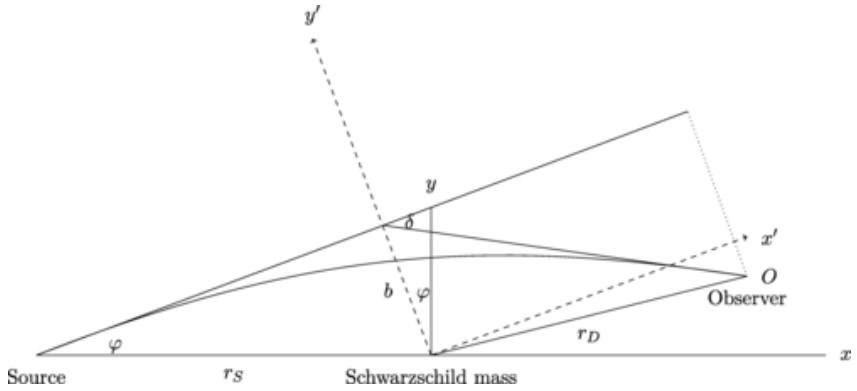
$$P_{\nu_\alpha \to \nu_\beta}(t) \to \sum_{i,j} 2U_{\alpha i}U^*_{\beta i}U^*_{\alpha j}U_{\beta j}e^{-i(m_i-m_j)t+i\frac{e^{-2Ht}\varepsilon^2}{4H}\left(\frac{1}{m_i}-\frac{1}{m_j}\right)+\ldots} \tag{3.85}$$

3.2.2. Nötrino salınımlarının Schwarzschild Metriğinde

Schwarzschild metriği, Albert Einstein'ın genel görelilik teorisinde, vakumda (yani madde ve enerji içermeyen bölgede) Einstein alan denklemlerinin ilk ve en basit tam çözümüdür. Bu çözüm, küresel simetriye sahip, dönmeyen ve elektriksel yükü olmayan bir kütle M tarafından oluşturulan uzay-zaman geometrisini tanımlar. Eğer merkezi cisim dönüyorsa (örneğin kara delik) Kerr metriği, yük taşıyorsa Reissner-Nordström metriği gibi daha genel çözümler gerekir. Nötrino salınımları, Schwarzschild geometrisi altında ilk kez Nicola Fornengo ve çalışma arkadaşları tarafından incelenmiştir (Fornengo et al., 1997). Bu öncü çalışmanın ardından, konu üzerine daha ayrıntılı analizler Alexandre, Dvornikov ve Swami gibi araştırmacılar tarafından yapılmıştır (Alexandre and Clough, 2018; Dvornikov, 2020; Swami, 2022). Bu çalışma, Schwarzschild arka planında kütleçekimsel etkilerin nötrino salınımlarına katkısını analiz etmeyi amaçlamaktadır.

Standart Schwarzschild koordinatlarında (t, r, θ, ϕ), metrik matris şu şekilde ifade edilir:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} \left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\left(1-\frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{3.86}$$



Şekil 3.3: Nötrino kaynağı ile dedektör arasında yer alan kütleçekimsel mercek olarak Schwarzschild kütlesi

Schwarzschild metrik formunda uzay-zamanın satır elemanı şu şekilde ifade edilir:

$$ds^2 = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)dt^2 + \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2 \tag{3.87}$$

Burada:

- G : yerçekimi sabitidir.
- M : merkezi cismin kütlesidir.
- r : radyal koordinattır (Schwarzschild yarıçapı $r_s = 2GM$).
- θ ve ϕ : açısal koordinatlardır.
- t : koordinat zamanıdır.

Bu metrikten çıkarılan ilgili bileşenler şunlardır:

- Zaman-zaman bileşeni : $g_{tt} = -\left(1-\frac{2GM}{r}\right)$
- Radyal bileşen : $g_{rr} = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)^{-1}$
- Açısal bileşenler: $g_{\theta\theta} = r^2, \quad g_{\phi\phi} = r^2\sin^2\theta$

Eğer $B(r) = \left(1-\frac{2GM}{r}\right)$ şeklinde tanımlanırsa, $\{t, r, \vartheta, \varphi\}$ koordinat sisteminde metrik çizgi elemanı şu şekilde ifade edilir:

$$ds^2 = B(r)\,dt^2 - B(r)^{-1}\,dr^2 - r^2\,d\vartheta^2 - r^2\sin^2\vartheta\,d\varphi^2 \tag{3.88}$$

Schwarzschild metriği ile tanımlanan kütleçekim alanı küresel simetriye sahip olduğundan (yani izotropik ve statiktir), geometri içerisinde ayrıcalıklı herhangi bir yön bulunmaz. Bu nedenle, bu uzay-zamanda yayılan herhangi bir test parçacığı ya da dalga—örneğin bir nötrino—hangi açısal doğrultuda hareket ediyor olursa olsun aynı kütleçekimsel etkiye maruz kalır. Bu yüksek düzeydeki simetri, uygun bir koordinat seçimiyle parçacığın tüm hareketinin iki boyutlu bir düzlemde analiz edilebileceğini göstermektedir. Bu nedenle, yörüngeyi ekvator düzleminde ($\vartheta = \pi/2$) alabiliriz ve bu durumda $d\vartheta = 0$ olur.

Bir nötrinonun dört-momentum bileşenleri aşağıdaki şekilde tanımlanır: :

$$p^{\mu} = m\frac{dx^{\mu}}{ds} \tag{3.89}$$

Ilgili kanonik momentum bileşenleri $p_{\mu}^{(k)}$ şu şekildedir:

$$p_t^{(k)} = m_k B(r)\frac{dt}{ds}, \quad p_r^{(k)} = -m_k B(r)^{-1}\frac{dr}{ds}, \quad p_{\varphi}^{(k)} = -m_k r^2\frac{d\varphi}{ds} \tag{3.90}$$

Bu bileşenler, kütle m_k ile birlikte, kütle-kabuk (mass-shell) ilişkisini sağlar:

$$m_k^2 = g^{\mu\nu}p_{\mu}^{(k)}p_{\nu}^{(k)} = \frac{1}{B(r)}(p_t^{(k)})^2 - B(r)(p_r^{(k)})^2 - \frac{(p_{\varphi}^{(k)})^2}{r^2} \tag{3.91}$$

Schwarzschild metriği statik olduğu için nötrinonun toplam enerjisi korunur. Bu bağlamda, yerel referans çerçevesi seçilerek yerel enerji şu şekilde tanımlanabilir:

$$E_k^{(\text{yerel})}(r) = |g_{tt}|^{-1/2}E_k = B(r)^{-1/2}E_k \tag{3.92}$$

Bir kütleçekim alanında nötrino salınım olasılığını elde edebilmek için, farklı kütle özdurumlarına ait dalga fonksiyonlarının, uzay-zaman noktası A'da üretilip B'de algılanan durumları arasındaki girişimi hesaplayacağız. Bu nedenle, ilk olarak A noktasından B noktasına kadar olan ışık ışını yolundaki girişim fazını hesaplayacağız ve ν_k kütle özdurumunun $A(t_A, r_A, \varphi_A)$ noktasından $B(t_B, r_B, \varphi_B)$ noktasına kadar ilerlerken kazandığı fazı şu şekilde tanımlayacağız:

$$\Phi_k = \int_A^B [E_k\,dt - p_k(r)\,dr - J_k\,d\varphi] \tag{3.93}$$

Şimdi iki farklı durumu ele alacağız: radyal ve radyal olmayan durumları inceleyerek ele alıyoruz.

I. **Radyal Durum** :

Radyal doğrultuda yayılan nötrinolar için $d\varphi = 0$ olur ve açısal momentum söz konusu değildir. Bu durumda, Eq.(3.93) şu şekilde sadeleşir:

$$\Phi_k = \int_{r_A}^{r_B} \left[E_k \left(\frac{dt}{dr} \right)_0 - p_k(r) \right] dr \tag{3.94}$$

Burada $p_k(r)$, $J_k = 0$ alınarak kütle-kabuk ilişkisi olan Eq.(3.91)'den elde edilir ve şu şekilde ifade edilir:

$$p_k(r) = \pm \frac{1}{B(r)} \sqrt{E_k^2 - B(r)\, m_k^2} \tag{3.95}$$

Işık ışınına karşılık gelen diferansiyel ise şu şekildedir (Radyal durum için: $d\theta = d\varphi = 0$ ve null geodezikler için $ds^2 = 0$) :

$$\left(\frac{dt}{dr} \right)_0 = \pm \frac{1}{B(r)} \tag{3.96}$$

Buna göre, kuantum mekaniksel faz Φ_k şu şekilde ifade edilir:

$$\Phi_k = \pm \int_{r_A}^{r_B} \frac{E_k - \sqrt{E_k^2 - B(r)\, m_k^2}}{B(r)}\, dr \tag{3.97}$$

Bu noktada, sonsuzdaki enerji E_k referans alınarak relativistik açılım uygulanır; yani $m_k \ll E_k$ varsayılır. Düz uzay-zaman durumunda olduğu gibi, aşağıdaki yaklaşık bağıntı geçerlidir:

$$E_k \simeq E_0 + \mathscr{O}\left(\frac{m_k^2}{2E_0} \right) \tag{3.98}$$

Burada E_0, kütlesiz bir parçacık için sonsuzdaki enerjidir. Ayrıca $0 < B(r) \leq 1$ olduğu göz önüne alındığında, şu yaklaşık ifade elde edilir:

$$\sqrt{E_k^2 - B(r)\, m_k^2} \simeq E_k - B(r)\, \frac{m_k^2}{2E_0} \tag{3.99}$$

Buna göre, faz yaklaşık olarak şu şekilde ifade edilir:

$$\Phi_k \simeq \pm \int_{r_A}^{r_B} \frac{m_k^2}{2E_0}\, dr \tag{3.100}$$

Dolayısıyla, salınımı belirleyen faz farkı yaklaşık olarak şu şekilde ifade edilir ve bu sonuç,

eğri uzay-zamanda uygun koordinatlar kullanılarak türetilen düz uzay-zaman durumunu yansıtmaktadır.

$$\Phi_k \simeq \frac{\Delta m_k^2}{2E_0} |r_B - r_A| \tag{3.101}$$

II. **Radyal olmayan durum** :

Bu bölümde, genel bir yörünge boyunca gerçekleşen yayınım durumu ele alınacaktır. Radyal durumdan farklı olarak, bu hareketin ek bir açısal bağımlılığı vardır. Buna göre Φ_k fazı şu şekilde ifade edilir:

$$\Phi_k = \int_{r_A}^{r_B} \left[E_k \left(\frac{dt}{dr} \right)_0 - p_k(r) - J_k \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_0 \right] dr \tag{3.102}$$

Eq.(3.102)'de, ışık ışını yörüngesi boyunca $\left(\frac{dt}{dr}\right)_0$ ve $\left(\frac{d\varphi}{dr}\right)_0$ nicelikleri şu şekilde verilir:

$$\left(\frac{dt}{dr} \right)_0 = \frac{E_0}{B^2(r)\, p_0(r)}, \quad \left(\frac{d\varphi}{dr} \right)_0 = \frac{J_0}{r^2} \cdot \frac{1}{B(r)\, p_0(r)} \tag{3.103}$$

Açısal momentum J_k'yı, enerji E_k, çarpışma parametresi b ve sonsuzdaki hız $v_k^{(\infty)}$ cinsinden ifade etmek kullanışlıdır:

$$J_k = E_k\, b\, v_k^{(\infty)} \tag{3.104}$$

Kütlesiz bir parçacığın açısal momentumu olan J_0 açıkça şu şekilde ifade edilir $(v_k^{(\infty)} \to 1)$:

$$J_0 = E_0\, b \tag{3.105}$$

Eq.(3.102) uygun bir şekilde aşağıdaki gibi düzenlenebilir:

$$\Phi_k = \int_{r_A}^{r_B} \frac{E_0}{B(r)\, p_0(r)} \left[\frac{E_k}{B(r)} - \frac{B(r)\, p_0(r)}{E_0}\, p_k(r) - \frac{E_k b^2}{r^2} \left(1 - \frac{m_k^2}{2E_k^2} \right) \right] dr \tag{3.106}$$

mass-shell koşulu olan Denklem Eq.(3.91), aşağıdaki ifadeleri verir:

$$B(r)\, p_0(r) = \pm E_0 \sqrt{1 - B(r)\, \frac{b^2}{r^2}} \tag{3.107}$$

$$
\begin{aligned}
B(r)\,p_k(r) &= \pm E_k \sqrt{1 - B(r)\,\frac{b^2}{r^2} - B(r)\,\frac{m_k^2}{E_k^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)} \\
&= \pm E_k \sqrt{1 - B(r)\,\frac{b^2}{r^2}}\left[1 - \frac{B(r)\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)}{1 - B(r)\,\frac{b^2}{r^2}} \cdot \frac{m_k^2}{2E_k^2}\right]
\end{aligned}
\tag{3.108}
$$

Eq. (3.107) ve Eq. (3.108)'nin, Eq. (3.106) içine yerleştirilmesi ve relativistik yaklaşık olan Eq. (3.98)'in kullanılmasıyla, Φ_k fazı için ifade şu şekilde sadeleşir:

$$
\Phi_k \simeq \pm \frac{m_k^2}{2E_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{\sqrt{1 - B(r)\left(\frac{b^2}{r^2}\right)}} \tag{3.109}
$$

Eq.(3.109), kütle özdurumu $|\nu_k\rangle$ tarafından, kaynaktan A noktasından dedektör B noktasına kadar olan radyal olmayan bir yayılım sürecinde kazanılan fazı ifade eder. $b \to 0$ sınırında, hareket radyal duruma indirgenmiş olur ve bu durumda Eq.(3.101) yeniden elde edilir. Şimdi iki durumu göz önünde bulunduralım:

1. Bir nötrino, bir kütleçekim alanında üretildikten sonra potansiyel kuyudan (potential well) radyal olmayan bir şekilde dışa doğru yayılır.

   $$
   \sqrt{1 - B(r)\,\frac{b^2}{r^2}} \simeq \sqrt{1 - \frac{b^2}{r^2}}\left(1 + \frac{GM}{r} \cdot \frac{b^2}{r^2 - b^2}\right) \tag{54}
   $$

   Bu durumda Φ_k fazı kolayca tümleşik hale getirilir ve şu şekilde ifade edilir:

   $$
   \Phi_k \simeq \frac{m_k^2}{2E_0}\left[\sqrt{r_B^2 - b^2} - \sqrt{r_A^2 - b^2} + GM\left(\frac{r_B}{\sqrt{r_B^2 - b^2}} - \frac{r_A}{\sqrt{r_A^2 - b^2}}\right)\right] \tag{3.110}
   $$

2. Bir nötrino, kütleli cismin etrafında hareket ederek $r = r_0$ noktasındaki en yakın yaklaşma mesafesinden geçer.

   $$
   \Phi_k(r_A \to r_0 \to r_B) = \frac{m_k^2}{2E_0} \int_{r_0}^{r_A} \frac{dr}{\sqrt{1 - B(r)\,\frac{b^2}{r^2}}} + \frac{m_k^2}{2E_0} \int_{r_0}^{r_B} \frac{dr}{\sqrt{1 - B(r)\,\frac{b^2}{r^2}}} \tag{3.111}
   $$

   Eğer en yakın yaklaşma mesafesi şu şekilde verilirse: $r_0 = b\left(1 - \frac{GM}{b}\right)$ faz Φ_k yaklaşık olarak aşağıdaki gibi olur:

   $$
   \Phi_k \simeq \frac{m_k^2}{2E_0}\left[\sqrt{r_A^2 - r_0^2} + \sqrt{r_B^2 - r_0^2} + GM\left(\sqrt{\frac{r_A - r_0}{r_A + r_0}} + \sqrt{\frac{r_B - r_0}{r_B + r_0}}\right)\right] \tag{3.112}
   $$

Bu ifade daha da sadeleştirilerek şu şekilde yazılabilir:

$$\Phi_k \simeq \frac{m_k^2}{2E_0}\left[\sqrt{r_A^2-b^2}+\sqrt{r_B^2-b^2}\right. \\ \left. +GM\left(\frac{b}{\sqrt{r_A^2-b^2}}+\frac{b}{\sqrt{r_B^2-b^2}}+\sqrt{\frac{r_A-b}{r_A+b}}+\sqrt{\frac{r_B-b}{r_B+b}}\right)\right] \tag{3.113}$$

$b \ll r_A, r_B$ (nötrinonun yolu, kaynağa veya dedektöre göre kütle çekim merkezine çok daha yakındır) durumunda, Eq.(3.113) aşağıdaki şekilde sadeleşir:

$$\Phi_k \simeq \frac{m_k^2}{2E_0}(r_A+r_B)\left(1-\frac{b^2}{2r_Ar_B}+\frac{2GM}{r_A+r_B}\right) \tag{3.114}$$

Radyal olmayan durumda yayılan nötrinoların flavor değiştirme olasılığı :

$$P(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2(2\theta)\sin^2\left[\frac{m_k^2(r_A+r_B)}{2E_0}\left(1-\frac{b^2}{2r_Ar_B}+\frac{2GM}{r_A+r_B}\right)\right] \tag{3.115}$$

Bir kütleçekim merceğinin (gravitational lensing) varlığında, kaynaktan yayılan bir nötrino, uygun mesafeleri farklı olan iki ayrı yoldan ilerleyebilir. Bu yollar genellikle kısa yol (S) ve uzun yol (L) olarak ikiye ayrılır. Kısa yol, merceğin bir tarafından geçerek daha küçük bir bükülme açısıyla ve daha az zaman gecikmesiyle gözlemciye ulaşırken; uzun yol, merceğin diğer tarafından dolanarak daha büyük bir bükülme açısıyla, daha uzun optik ve fiziksel mesafeyi kat ederek daha fazla zaman gecikmesiyle gözlemciye ulaşır. Bu bağlamda nötrino salınımları, yalnızca aynı yol boyunca hareket eden kütle özdurumları arasındaki girişimden değil, aynı zamanda farklı yollar boyunca yayılan kütle özdurumları arasındaki girişimden de kaynaklanır. Bir nötrino, kaynak noktası $A(t_A, r_A, \phi_A)$'da bir lepton flavor özdurumu olarak $|\nu_e\rangle = \cos\theta\,|\nu_1\rangle + \sin\theta\,|\nu_2\rangle$ şeklinde üretilir ve zamanla aşağıdaki duruma evrilir:

$$|\nu_e, B\rangle = N\sum_{\text{Path=L,S}}\left[\cos\theta\,\exp(-i\Phi_1^{\text{path}})|\nu_1\rangle + \sin\theta\,\exp(-i\Phi_2^{\text{path}})|\nu_2\rangle\right] \tag{3.116}$$

Eğer dedektörde ν_μ flavor tespit ediliyorsa : $|\nu_\mu\rangle = -\sin\theta\,|\nu_1\rangle + \cos\theta\,|\nu_2\rangle$, Bu durumda geçiş genliği (transition amplitude) şu şekilde ifade edilir:

$$\langle\nu_\mu|\nu_{e,B}\rangle = N\sum_{\text{path}=L,S}\left[\cos\theta\,\exp(-i\Phi_1^{\text{path}})\langle\nu_\mu|\nu_1\rangle + \sin\theta\,\exp(-i\Phi_2^{\text{path}})\langle\nu_\mu|\nu_2\rangle\right] \tag{3.117}$$

Nötrino salınım olasılığı dedektörde şu şekilde ifade edilir:

$$\begin{aligned} P(\nu_e \to \nu_\mu) &= |\langle \nu_\mu | \nu_{e,B} \rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2}\cos^2\theta \sin^2\theta \left\{ \left(1+\cos(\Phi_1^L - \Phi_1^S)\right) + \left(1+\cos(\Phi_2^L - \Phi_2^S)\right) \right. \\ &\quad \left. - \cos(\Phi_2^L - \Phi_1^L) - \cos(\Phi_2^S - \Phi_1^S) - \cos(\Phi_2^L - \Phi_1^S) - \cos(\Phi_2^S - \Phi_1^L) \right\} \end{aligned} \tag{3.118}$$

Eq.(3.114)'un Eq.(3.118) içine yerleştirilmesiyle aşağıdaki ifade elde edilir :

$$\begin{aligned} P(\nu_e \to \nu_\mu) = \sin^2(2\theta) \Bigg[& \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 X}{4E_0}\right)\left(1+\frac{2GM}{X}-\frac{\Sigma b^2}{4r_A r_B}\right) \\ & \times \cos\left(\frac{m_1^2 X\,\Delta b^2}{8E_0 r_A r_B}\right)\cos\left(\frac{m_2^2 X\,\Delta b^2}{8E_0 r_A r_B}\right) \\ & + \sin^2\left(\frac{\Sigma m^2 X\,\Delta b^2}{16E_0 r_A r_B}\right)\sin^2\left(\frac{\Delta m^2 X\,\Delta b^2}{16E_0 r_A r_B}\right) \Bigg], \end{aligned} \tag{3.119}$$

burada şu tanımlar yapılmıştır:
$X \equiv r_A + r_B, \quad \Delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2, \quad \Sigma m^2 \equiv m_2^2 + m_1^2, \quad \Delta b^2 \equiv b_L^2 - b_S^2, \quad \Sigma b^2 \equiv b_L^2 + b_S^2.$
Bu formül, kütleçekimsel bir merceğin varlığında, farklı jeodezikler boyunca yayılan kütle özdurumları arasındaki girişimi dikkate alarak nötrino flavor geçiş olasılığını temsil etmektedir. Kütle kare farkına ve baz uzunluğu X'e bağlı olan standart salınım fazına ek olarak, ifade merkezi kütle M'den kaynaklanan kütleçekimsel düzeltmeleri ve uzun ile kısa yolların çarpışma parametreleri arasındaki farklardan kaynaklanan geometrik modifikasyonları içermektedir. Hem cos hem de $\sin^2$ terimlerini içeren girişim terimleri, çoklu yayılım yolları ve kütle özdurumlarının tutarlı süperpozisyonunu yansıtarak, uzay-zamanın eğriliği ile yörünge ayrımının salınım desenini düz uzay-zaman beklentilerinin ötesine nasıl taşıdığını ortaya koymaktadır.

3.3. NÖTRİNO FLAVOR SALINIMININ DOLANIKLIĞI

Kuantum dolanıklık kavramı ilk kez 1935 yılında Albert Einstein, Boris Podolsky ve Nathan Rosen tarafından, kuantum mekaniğinin eksik olduğunu düşündükleri noktaları vurgulamak amacıyla yayımladıkları bir makalede tanıtılmıştır. Bu çalışmada, parçacıkların büyük mesafelerle ayrılmış olsalar bile ilişkili özellikler sergileyebileceğibir senaryo tarif edilmiştir. Einstein, bu olguyu ünlü bir şekilde "uzaktan ürkütücü etki (spooky action at a distance)" olarak adlandırmıştır.

Kuantum dolanıklık olgusunda, iki veya daha fazla parçacık birbirine bağlı hale gelir, öyle ki bir parçacığın durumu, diğer parçacıkların durumu göz önünde bulundurulmadan tam olarak tanımlanamaz. Bu bağlılık, bir parçacığın durumunun ölçülmesinin, dolanıklık içinde olduğu diğer parçacıkların durumunu anında etkilediğini gösterir. Kuantum mekaniği perspektifinden bakıldığında, bir sistemin durumu Hilbert uzayında bir dalga fonksiyonu veya bir durum vektörü ile temsil edilir. Bileşik sistemler için toplam durum, alt sistemlerin durumlarının tensör çarpımı ile ifade edilir. Eğer bileşik durum, alt sistemlerin bağımsız durumlarına ayrıştırılamıyorsa dolanıklık oluşur. Örneğin, iki parçacık A ve B dolanıklık içindeyse, durumları şu şekilde yazılabilir:

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A|1\rangle_B + |1\rangle_A|0\rangle_B)$$

Bu durumda, her iki parçacık da tek başına kesin bir duruma sahip değildir; bunun yerine, bir parçacık $|0\rangle$ durumundaysa, diğeri $|1\rangle$ durumundadır ve tam tersi de geçerlidir. Parçacık A'nın durumunun ölçülmesi, hemen parçacık B'nin durumunu belirler ve bu, dolanıklığa özgü yerel olmayan (non-local) korelasyonları ortaya koyar.

Yıllar içinde, pek çok deney dolaşıklığın varlığını doğrulamıştır. Bunlardan en dikkat çekici olanı, "Bell eşitsizliklerinin ihlali (violation of Bell's)"dir. Bell eşitsizlikleri, yerel gizli değişken teorilerinin sağlaması gereken matematiksel ifadeler dir. Ancak kuantum mekaniğinin öngörüleri bu eşitsizlikleri ihlal eder ve deneysel sonuçlar tutarlı bir şekilde kuantum mekaniğini desteklemiştir. Örneğin, dolanık fotonlar kullanılarak yapılan deneyler, klasik fizik ile açıklanamayan korelasyonlar göstermiş ve böylece kuantum dolanıklığın yerel olmayan doğasını kesin olarak doğrulamıştır. Nötrino salınımları ile kuantum dolanıklığı arasındaki kavramsal bağ, 2000'li yılların başlarında şekillenmeye başlamıştır. Araştırmacılar, flavor salınımlarını kuantum süperpozisyonu ve dolanıklık perspektifinden yorumlamaya yönelmiştir. 2007 yılında gerçekleştirilen önemli bir çalışma, mod dolanıklığının flavor geçiş olasılıkları cinsinden ifade edilebileceğini göstermiş ve parçacık karışımı bağlamında tek parçacıklı dolanık durumların operasyonel bir karakterizasyonunu sağlamıştır (Blasone et al., 2009). Alan geliştikçe, daha sofistike analizler ortaya çıkmıştır. 2014 yılında, nötrino karışımı ve salınımlarında doğal olarak bulunan dolanıklık yapılarını daha derinlemesine incelemek amacıyla bir alan kuramı yaklaşımı geliştirilmiştir. Bu çerçeve, çok modlu ve çok parçacıklı dolanıklık ile ilişkili karmaşık kuantum korelasyonlarını ortaya çıkarmış ve bu özellikleri, lepton sayısı varyansları gibi ölçülebilir niceliklerle ilişkilendirmiştir(Blasone

et al., 2014). Geçtiğimiz on yıl, süpernova gibi yoğun nötrino ortamlarında dolanıklığın rolüne yönelik artan bir ilgiye tanıklık etmiştir. Çalışmalar, bu aşırı koşullar altında farklı flavorlere sahip nötrinoların etkileşimler yoluyla dolanıklığa girdiğini ve bu süreç sonucunda aralarında dengelenmiş enerji dağılımlarının oluştuğunu ortaya koymuştur (Martin et al., 2023). Ayrıca, kuantum simülasyon tekniklerindeki gelişmeler, araştırmacıların birden fazla nötrino arasındaki dolanıklığın zaman içinde nasıl evrildiğini modellemesine olanak sağlamış ve bu durum, nötrinoların kolektif davranışlarına dair yeni içgörüler sunmuştur (Marc and Martin, 2023). Kısacası, nötrino salınımlarında dolanıklık, farklı flavor durumları arasında ortaya çıkan kuantum korelasyonlarıyla ilişkilidir. Nötrinonun yayılımı sırasında, kütle özdurumları, kütle farklarından kaynaklanan farklı faz gelişimleri gösterir. Bu faz farklılıkları, flavor durumlarının zamanla birbirlerine göre faz kaymasına uğramasına ve dolayısıyla flavor süperpozisyonlarının kuantum düzeyinde dolanık bir yapı sergilemesine neden olur.

3.3.1. Nötrino flavor Salınımının Dolanıklık Entropisi

Dolanıklık entropisi, kuantum mekaniği ve kuantum bilgi teorisinde önemli bir ölçü olup, daha büyük bir kuantum sisteminin alt sistemleri arasındaki kuantum dolanıklığının miktarını, bu alt sistemler arasında paylaşılan bilgi miktarını ölçerek nicelendirir. Klasik bilişimde bilgi Shanon entropisiyle ölçülürken, kuantum bilişimde von Neuman entropisiyle ölçülür. Elbette, dolanıklık entropisini hesaplamak için Rényi entropisi, replica yöntemi, entanglement negativity ve holografide Ryu–Takayanagi formülü gibi çeşitli başka yöntemler de bulunmaktadır.

3.3.2. Von Neumann entropisiyle dolanıklık ölçümü

Von Neumann entropisinin, iki alt sistemden oluşan kuantum sistemlerinde alt sistemler arasındaki dolanıklığı nicelleştirmek için temel bir araç olarak hizmet ettiği bilinmektedir. Karışık hallerle çalışırken, yani alt sistemlerin yoğunluk matrisi ile tanımlandığı durumlarda, Von Neumann entropisi $S(\rho)$, alt sistemler arasındaki korelasyon derecesini karakterize ederek dolanıklığı hassas bir şekilde ölçer. Entropi, bir kuantum hâlinin ne kadar saf veya karışık olduğunu nicelleştirir. Saf bir hâl sıfır entropiye sahiptir ($S = 0$), maksimum karışık bir hâl ise en yüksek entropiye sahiptir. Yoğunluk matrisi, bir sistemin kuantum hâlini matematiksel olarak temsil eden bir yapıdır ve farklı olasılıklı durumları dikkate alarak sistemi tanımlar. Azaltılmış yoğunluk matrisi ise, tüm sistemin yoğunluk matrisinden bir alt sistemin özgürlük derecelerinin izinin alınması (veya tümleştirilmesi) yoluyla elde edilir.

Von Neumann entropisi şu şekilde tanımlanır:

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \log \rho) \tag{3.120}$$

burada ρ, sistemin yoğunluk matrisi olup, Tr iz işlemini temsil etmektedir.

$$\rho = |\nu_\alpha(t)\rangle\langle\nu_\alpha(t)| \tag{3.121}$$

Sadece iki flavor, ν_α ve ν_β, ile sınırlı kalıyoruz ve yoğunluk matrisini hesaplıyoruz. Nötrino flavor evrim denklemi :

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_j U_{\alpha j} e^{-iE_j t} \sum_\alpha U^*_{j\alpha} |\nu_\alpha\rangle \tag{3.122}$$

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \cos\theta e^{-iE_j t}(\cos\theta|\nu_\alpha\rangle - \sin\theta|\nu_\beta\rangle) + \sin\theta e^{-iE_k t}(\sin\theta|\nu_\alpha\rangle + \cos\theta|\nu_\beta\rangle) \tag{3.123}$$

Eq.(3.123) denklemi;

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \left(\cos^2\theta e^{-iE_j t} + \sin^2\theta e^{-iE_k t}\right)|\nu_\alpha\rangle + \cos\theta\sin\theta\left(e^{-iE_k t} - e^{-iE_j t}\right)|\nu_\beta\rangle \tag{3.124}$$

şeklinde, sadece çeşni özdurumlarına bağlı olarak düzenlenilebilir. Aynı ifade cebirsel formda aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = U_{\alpha\alpha}(t)|\nu_\alpha\rangle + U_{\alpha\beta}(t)|\nu_\beta\rangle \tag{3.125}$$

Öyleyse $U_{\alpha\alpha}(t)$ zamanla değişen fazlarla birleşen iki kütle durumunun karışımı olarak nasıl değiştiğini gösterir :

$$U_{\alpha\alpha}(t) = \cos^2\theta e^{-iE_j t} + \sin^2\theta e^{-iE_k t} \tag{3.126}$$

ve $U_{\alpha\beta}(t)$ zaman evriminin flavor durumları arasındaki geçiş genliklerine nasıl yansıdığını ortaya koyar:

$$U_{\alpha\beta}(t) = \cos\theta\sin\theta\left(e^{-iE_k t} - e^{-iE_j t}\right) \tag{3.127}$$

Nötrinoların kuantum durumları, iki-flavor'lı bir sistemde, flavor özdurumları olarak ifade edilen $|\nu_\alpha\rangle$ ve $|\nu_\beta\rangle$ ile temsil edilebilir ve bu durumlar, kuantum hesaplamada kubitlere benzer

şekilde iki durumlu sistemlerin tensör çarpımı notasyonu kullanılarak ifade edilebilir.

$$|\nu_\alpha\rangle \equiv |1\rangle_\alpha \otimes |0\rangle_\beta \equiv |10\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.128}$$

Tensör çarpımı gösterimi $|1\rangle_\alpha \otimes |0\rangle_\beta$ bileşik bir kuantum durumunu temsil eder, yani ν_α olarak tespit edilen bir nötrinonun ν_β olma olasılığı sıfırdır.

$$|\nu_\beta\rangle \equiv |0\rangle_\alpha \otimes |1\rangle_\beta \equiv |01\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.129}$$

Son olarak denklem Eq.(3.125) şu şekilde yazılır:

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = U_{\alpha\alpha}(t)|1\rangle_\alpha \otimes |0\rangle_\beta + U_{\alpha\beta}(t)|0\rangle_\alpha \otimes |1\rangle_\beta = \begin{bmatrix} 0 \\ U_{\alpha\alpha}(t) \\ U_{\alpha\beta}(t) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.130}$$

Şimdi $|\nu_\alpha(t)\rangle$'nin Yoğunluk Matrisi hesaplıyoruz:

$$\rho = |\nu_\alpha(t)\rangle\langle\nu_\alpha(t)| = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & |U_{\alpha\alpha}(t)|^2 & U_{\alpha\alpha}(t)U^*_{\alpha\beta}(t) & 0 \\ 0 & U^*_{\alpha\alpha}(t)U_{\alpha\beta}(t) & |U_{\alpha\beta}(t)|^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.131}$$

$$\rho = |U_{\alpha\alpha}|^2|\nu_\alpha\rangle\langle\nu_\alpha| + U_{\alpha\alpha}U^*_{\alpha\beta}|\nu_\alpha\rangle\langle\nu_\beta| + U^*_{\alpha\alpha}U_{\alpha\beta}|\nu_\beta\rangle\langle\nu_\alpha| + |U_{\alpha\beta}|^2|\nu_\beta\rangle\langle\nu_\beta| \tag{3.132}$$

Yoğunluk matrisinin elemanlarını hesaplıyoruz :

$$\begin{aligned} U_{\alpha\alpha}(t)U^*_{\alpha\beta}(t) &= \left(\cos^2\theta e^{-iE_jt} + \sin^2\theta e^{-iE_kt}\right)\left[\cos\theta\sin\theta\left(e^{iE_kt} - e^{iE_jt}\right)\right] \\ &= \sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\theta e^{i\frac{\Delta m^2 t}{2E}} - \sin^2\theta e^{-i\frac{\Delta m^2 t}{2E}} + \sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \end{aligned} \tag{3.133}$$

$$\begin{aligned} U^*_{\alpha\alpha}(t)U_{\alpha\beta}(t) &= \left(\cos^2\theta e^{iE_jt} + \sin^2\theta e^{iE_kt}\right)\left[\cos\theta\sin\theta\left(e^{-iE_kt} - e^{-iE_jt}\right)\right] \\ &= \sin\theta\cos\theta\left(\cos^2\theta e^{-i\frac{\Delta m^2 t}{2E}} + \sin^2\theta e^{i\frac{\Delta m^2 t}{2E}} + \sin^2\theta - \cos^2\theta\right) \end{aligned} \tag{3.134}$$

$$\begin{aligned} |U_{\alpha\alpha}(t)|^2 &= \left(\cos^2\theta e^{-iE_jt} + \sin^2\theta e^{-iE_kt}\right)\left(\cos^2\theta e^{iE_jt} + \sin^2\theta e^{iE_kt}\right) \\ &= \cos^4\theta + \sin^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta\left(e^{i(E_k-E_j)t} + e^{-i(E_k-E_j)t}\right) \\ &= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta\cos(E_k - E_j)t \\ &= \cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta\cos\frac{\Delta m^2 t}{2E} \equiv P_{sur} \end{aligned} \tag{3.135}$$

$$\begin{aligned} |U_{\alpha\beta}(t)|^2 &= \sin^2\theta\cos^2\theta\left(e^{iE_kt} - e^{iE_jt}\right)\left(e^{-iE_kt} - e^{-iE_jt}\right) \\ &= \sin^2\theta\cos^2\theta\left(2 - e^{i\frac{\Delta m^2 t}{2E}} - e^{-i\frac{\Delta m^2 t}{2E}}\right) \\ &= 2\sin^2\theta\cos^2\theta\left(1 - \cos\frac{\Delta m^2 t}{2E}\right) \\ &= 2\sin^2\theta\cos^2\theta\left(2\sin^2\frac{\Delta m^2 t}{4E}\right) \\ &= 4\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2\frac{\Delta m^2 t}{4E} \\ &= \sin^2 2\theta\sin^2\frac{\Delta m^2 t}{2E} \equiv P_{osc} \end{aligned} \tag{3.136}$$

Bu noktada, matris ρ'nun indirgenmiş yoğunluk matrisleri aşağıdaki şekilde verilir:

$$\rho_\alpha = \mathrm{Tr}_\beta(\rho) = \mid U_{\alpha\alpha}\mid^2 |1\rangle\langle 1| + \mid U_{\alpha\beta}\mid^2 |0\rangle\langle 0| \tag{3.137}$$

$$\rho_\beta = \mathrm{Tr}_\alpha(\rho) = \mid U_{\alpha\alpha}\mid^2 |0\rangle\langle 0| + \mid U_{\alpha\beta}\mid^2 |1\rangle\langle 1|. \tag{3.138}$$

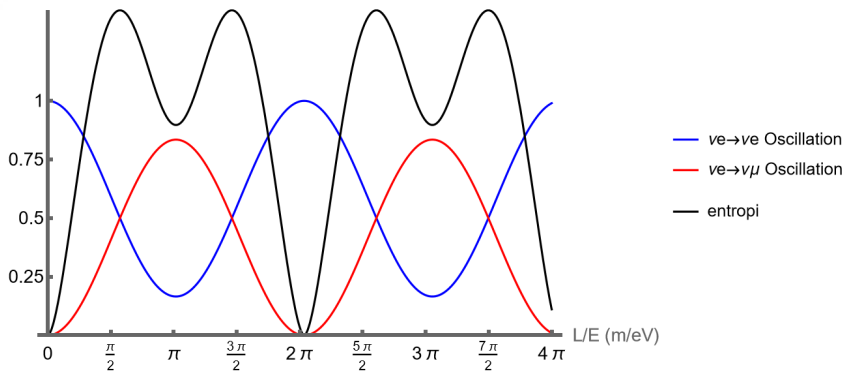
Bir mod (flavor) üzerinde izleme işlemi sonrası indirgenmiş durum ile ilişkili lineer entropi doğrudan hesaplanabilir.

$$\begin{aligned} S(\rho_\alpha) = S(\rho_\beta) = &\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta\cos\frac{\Delta m^2 t}{2E}\right) \\ &\log\left(\cos^4\theta + \sin^4\theta + 2\cos^2\theta\sin^2\theta\cos\frac{\Delta m^2 t}{2E}\right) \\ &\left(\sin^2 2\theta\sin\frac{\Delta m^2 t}{2E}\right)\log\left(\sin^2 2\theta\sin\frac{\Delta m^2 t}{2E}\right) \end{aligned} \tag{3.139}$$

Diğer bir deyişle, dolanıklık entropisi şu şekilde ifade edilir:

$$S(\rho_\alpha) = S(\rho_\beta) = -(P_{sur})\log(P_{sur}) - (P_{osc})\log(P_{osc}) \tag{3.140}$$

Burada, P_{sur}, bir nötrinonun başlangıçtaki flavor durumunda kalma olasılığını belirten Eq.(3.135)'de verilen ifadeyi temsil eder ve flavor değişimi geçirmeden varlığını sürdürmesini ifade eder. Öte yandan, P_{osc}, bir nötrinonun uzayda yayılması sırasında bir flavor durumundan başka bir flavor durumuna geçiş yapma olasılığını belirten Eq.(3.136)'deki ifadeyi temsil eder. Bu ilişki, dolanıklık entropisinin, Von Neumann entropisi ile nicelleştirildiğinde, nötrinoların flavor koruma ve salınım davranışlarını tanımlayan olasılıklarla nasıl bağlantılı olduğunu göstermektedir. Sayısal analizler için $\theta_{12} = 33^\circ$, $\Delta m^2_{12} = 7.37 \times 10^{-5}\,\mathrm{eV}^2$ ve $c = 3 \times 10^8\,\mathrm{Km/s}$ değerlerini kullanıyoruz. İki flavor ($\alpha = e$ ve $\beta = \mu$) için nötrinonun dolanıklık entropisi, **Şekil 3.4:**'de gösterilmektedir. Siyah eğri, dolanıklık entropisini ve Eq.(3.140) ile hesaplanan karşılık gelen değeri göstermektedir. Entropi, her iki olasılığın eşit olduğu durumda (yani sistem maksimum karışık durumda olduğunda) en yüksek değerine ulaşır; bir olasılık bir ve diğeri sıfır olduğunda ise (yani sistem saf durumda olduğunda) sıfıra düşer. Grafik, flavor salınımı L/E oranı arttıkça bu entropinin dalgalandığını açıkça göstermektedir; bu durum nötrino flavor durumları arasındaki dinamik dolanıklığı yansıtmaktadır. Bu bağlamda, dolanıklık entropisinin, bir nötrino durumunun iki flavor özdurumu arasında süperpozisyonda bulunma derecesini nicel olarak ölçen bir büyüklük olduğu ortaya konulmaktadır.



Şekil 3.4: Mavi eğri, hayatta kalma olasılığını $P(\nu_e \to \nu_e)$ gösterirken, kırmızı eğri, elektron nötrinosunun müon nötrinosuna dönüşme olasılığına $P(\nu_e \to \nu_\mu)$ karşılık gelmektedir. Siyah eğri ise entropiyi temsil etmektedir.

4. BULGULAR

4.1. GRAVİTASYONEL ALAN ETKİSİ ALTINDA NÖTRİNO SALINIMINDA

Nötrino salınımları, uzay-zamanın hem geometrisine hem de yapısına duyarlı benzersiz bir kuantum fenomeni sunar. Bu çalışmanın iki bölümünde bu etkileşimin farklı yönleri incelenmiştir. İlk çalışma, nötrino salınımlarının kütleçekim alanlarından nasıl etkilendiğini, Genel Görelilik kuramı çerçevesinde Kaluza-Klein (KK) metrikleri kullanarak ele almaktadır. Özellikle kara delik gibi büyük kütleli cisimlerin yakın çevresinde oluşan bu kütleçekim alanları, nötrinoların izlediği yörüngeyi, enerjisini ve fazını değiştirmektedir. Bu analizden elde edilen çarpıcı bir sonuç, kaynak ve dedektör arasındaki mesafeden bağımsız olarak ortaya çıkan sabit bir kütleçekim faz kaymasının tespit edilmesidir.

İkinci çalışma ise, nötrino salınımları, gravitasyonel faz kaymaları ve kuantum dolanıklık arasındaki karmaşık ilişkiyi, deforme olmuş uzay-zaman geometrileri çerçevesinde incelemektedir. Analiz, süpernovalardan, dönen karadeliklerden veya temel kuantum kütleçekim etkilerinden kaynaklanabilecek kütleçekim alanlarının, nötrinoların faz davranışını nasıl değiştirebileceğini ve standart salınım örüntülerini nasıl bozabileceğini araştırmaktadır. Sayısal simülasyonlar aracılığıyla, çalışmada uzay-zaman deformasyonunun farklı derecelerinin, uzamış salınım periyotlarına ve artan dolanıklık entropisine yol açtığı gösterilmektedir.

4.1.1. Nötrino salınımlarının Kaluza-Klein (KK) Metriğinde

Nötrino flavor salınımı, bir gravitasyonel alanın varlığında bozulur. Einstein'ın genel görelilik kuramına göre, kütle ve enerji uzay-zamanı eğriltir ve nötrinolar gibi neredeyse kütlesiz parçacıklar bile bu eğrilikten kaynaklanan geodezikleri takip etmek zorundadır. Güçlü gravitasyonel alanlar altında, nötrinoların izlediği geodezikler bükülür ve bu durum gravitasyonel merceklenme etkilerine yol açar. Eğri uzay-zamanın nötrino salınımları üzerindeki etkilerine ilişkin çeşitli teorik çalışmalar yapılmıştır (Alavi and Hosseini, 2013; Chakraborty, 2015; Crocker et al., 2004; Visinelli, 2015; Zhang, 2000).

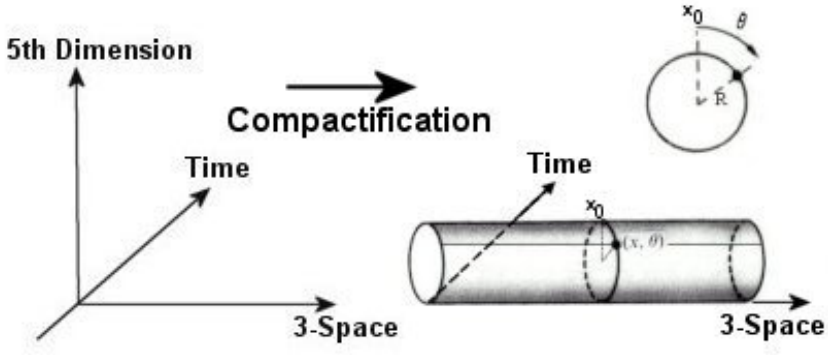
Özellikle kara delikler veya nötron yıldızları gibi büyük kütleli cisimlerin yakınında, eğri

uzay-zamanda nötrinoların faz evrimi yalnızca nicel olarak değil, aynı zamanda yapısal olarak da değişir. Gravitasyonel alanın varlığı, düz uzay-zamanda yalnızca kütle kareleri farkına bağlı olan simetriyi bozar ve bunun yerine hem mutlak kütle ölçeğine hem de izlenen uzay-zaman yoluna bağlı yeni bağımlılıklar ortaya çıkarır. Bu etkinin en çarpıcı hali, uzak bir kaynaktan gelen nötrinoların bir kütleçekim kaynağı etrafında birden fazla yol daha kısa ya da daha uzun, daha derin ya da daha sığ potansiyeller izleyebildiği gravitasyonel merceklenme senaryolarında görülür. Her bir yol, nötrino dalga fonksiyonu üzerine kendine özgü bir gravitasyonel faz damgası vurur. Bu dalga fonksiyonları bir detektörde birleştiğinde, ortaya çıkan girişim deseni yalnızca klasik salınım terimlerini değil, aynı zamanda geometriye bağlı gravitasyonel faz kaymalarını da içerir.

Dolayısıyla, gravitasyonel mercek, farklı rotalardan gelen nötrino kütle özdurumları arasında girişime olanak tanıyan kozmolojik bir çift yarık gibi davranır. Bu yollar uzunlukları ve karşılaştıkları gravitasyonel potansiyeller bakımından farklılık gösterir ve bu da çeşniler arası geçiş olasılıklarında çoklu yol girişim yapılarının ortaya çıkmasına neden olur.

Bu tezde daha önceki bölümlerde, dış gravitasyonel alan Einstein denklemlerinin statik, küresel simetrili kütle etrafındaki uzay-zaman çözümü olan Schwarzschild metriği kullanılarak modellenmiştir. Schwarzschild geometrisi, tek belirleyici parametresi (kütle) ile eğriliğin nötrinoların faz evrimi ve kuantum girişimi üzerindeki etkilerini analiz etmek için tutarlı ve fiziksel olarak temellendirilmiş bir zemin sağlamıştır. Ancak Schwarzschild metriği birçok astrofiziksel uygulama için yeterli olsa da, dört boyutlu yapısıyla sınırlıdır.

Oysa Kaluza–Klein metriği, özellikle statik ve küresel simetrili haliyle, Schwarzschild çözümünü ekstra boyuttaki yapı veya harekete ilişkin parametreleri dahil ederek genişletir (Chakrabarty et al., 2023). Fiziksel olarak, daha yüksek boyutlu bir uzay-zamanda bulunan bir kütle, beşinci boyuttaki momentum gibi ek bir "geometrik yük" taşıyabilir ve bu durum oluşturduğu gravitasyonel alanı değiştirir. Sonuçta ortaya çıkan metrik, dört boyutlu bir bakış açısından hâlâ statik ve küresel simetrik görünse de, artık ekstra boyuta bağlı olarak tanımlanan ve genellikle v ile gösterilen bir parametre içerir. Bu parametre, ya beşinci boyuttaki bir boost (itme) hızı ya da efektif bir gravitasyonel yük olarak yorumlanabilir. $v = 0$ olduğunda, Kaluza–Klein metriği klasik Schwarzschild geometrisine indirgenir ve bu durum ekstra boyutsal etkinin yokluğunu yansıtır. Ancak $v > 0$ olduğunda, uzay-zamanın yapısı değişir ve bu da nötrino çeşni salınım dinamiklerini etkiler. Nötrinoların düzlem dalga fonksiyonuna sahip olduğunu ve boşlukta, kaynak S noktasından (t_S, x_S) dedektör D noktasına (t_D, x_D) yayıldığını



Şekil 4.1: Kaluza-Klein metrik yapısının şematik gösterimi

varsayalım. Bu durumda, dalga fonksiyonunun dedektördeki evrimi şu şekilde ifade edilebilir:

$$|\nu_i(t_D, x_D)\rangle = \exp(-i\Phi)|\nu_i(t_S, x_S)\rangle \tag{4.1}$$

Burada Φ_i, salınım fazını ifade etmektedir. Kaynak S'de bir flavor özdurumunda ($|\nu_\alpha\rangle$) üretilen nötrinolar, dedektör D'ye ulaşır ve bu durumda, nötrinonun ν_α durumundan ν_β durumuna flavor değiştirme olasılığı şu şekilde ifade edilir:

$$P_{\alpha\beta} = |\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t_D, x_D)\rangle|^2 = \sum_{i,j} U^*_{\alpha k} U_{\beta k} U_{\alpha j} U^*_{\beta j} \exp[-i(\Phi_i - \Phi_j)] \tag{4.2}$$

Eğri uzay-zamanda, nötrino yayılımının Φ_i fazına ilişkin ifade, kovaryant bir forma genelleştirilebilir.

$$\Phi_i = \int_S^D p^{(i)}_\mu \, dx^\mu, \tag{4.3}$$

burada

$$p^{(i)}_\mu = m_i g_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{ds} \tag{4.4}$$

$p^{(i)}_\mu$, x^μ koordinatlarına kanonik eşlenik momentumdur ve $g_{\mu\nu}$ ile ds^2, sırasıyla eğri uzay-zamanın metrik tensörü ve çizgi elemanıdır. Bu adımda, nötrino fazlarını hesaplamak için Kaluza-Klein (KK) metriğini kullanıyoruz. Kaluza-Klein metrik tensör $g_{\mu\nu}$ şu şekilde ifade edilir:

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\left(1-\frac{Z}{B}\right) & 0 & 0 & -\frac{aZ\sin^2\theta}{B\sqrt{1-v^2}} \\ 0 & \frac{B\Sigma}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{B\Sigma}{\Delta} & 0 \\ -\frac{aZ\sin^2\theta}{B\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 & \left(Br^2+a^2+a^2\sin^2\theta\frac{Z}{B}\right)\sin^2\theta \end{bmatrix} \tag{4.5}$$

çizgi elemanı şu şekilde verilmektedir:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-\left(1-\frac{Z}{B}\right)dt^2 - \frac{2aZ\sin^2\theta}{B\sqrt{1-v^2}}dtd\phi + \left[B\left(r^2+a^2\right)+\frac{a^2\sin^2\theta Z}{B}\right]\sin^2\theta d\phi^2 \\ &+\frac{B\Sigma}{\Delta}(dr^2+d\theta^2), \end{aligned} \tag{4.6}$$

burada,

$$\begin{aligned} B &= \left(1+\frac{v^2Z}{1-v^2}\right)^{1/2}, \\ Z &= \frac{2mr}{\Sigma}, \\ \Delta &= r^2+a^2-2mr, \\ \Sigma &= r^2+a^2\cos^2\theta. \end{aligned}$$

Burada m ve a, orijinal Kerr çözümünün kütle ve spin parametreleri, v ise boost (hızlanma) hızıdır. Bu bölümde, $(\theta = \pi/2)$ ve $a = 0$ olarak ayarlayarak dönen bir cismin olmadığı en basit durumu dikkate alarak KK metriğinde nötrino salınım fazlarını hesaplayacağız. Bu metrik için:

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu \tag{4.7}$$

metrik bileşenleri $g_{\mu\nu}$, şu şekilde olur:

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(1+\frac{2mv^2}{r(1-v^2)}\right)^{-1/2}, \\ g_{rr} &= \left(1-\frac{2m}{r}\right)^{-1}\left(1+\frac{2mv^2}{r(1-v^2)}\right)^{1/2}, \\ g_{\phi\phi} &= r^2\left(1+\frac{2mv^2}{r(1-v^2)}\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ayrıca, kanonik momentum bileşenlerini $p_\mu^{(k)}$ olarak tanımlıyoruz, burada k, kütle özdurumuna

karşılık gelmektedir:

$$\begin{aligned} p_t^{(k)} &= m_k g_{tt} \frac{dt}{ds}, \\ p_r^{(k)} &= m_k g_{rr} \frac{dr}{ds}, \\ p_\phi^{(k)} &= m_k g_{\phi\phi} \frac{d\phi}{ds}. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Şimdi, gravitasyonel alanların nötrino salınımlarını etkilediği farklı yolları, radyal ve radyal olmayan senaryoları inceleyerek ele alıyoruz. Radyal yollar, daha basit ve simetrik durumlar hakkında içgörüler sağlarken, radyal olmayan yollar, açısal momentum ve etki parametresi (b) gibi parametrelerin etkisini ortaya koyar.

I. **Radyal Durum** :
Öncelikle radyal durumda nötrino salınım fazını inceleyelim. Bu senaryo, nötrinoların merkezi bir kütle kaynağından radyal olarak dışa doğru yayıldığı ve merkezden uzaklaşan geodezikleri takip ettiği duruma karşılık gelmektedir. Bu konfigürasyonda, nötrino yalnızca r-yönünde hareket eder; açısal sapmaya uğramaz, etki parametresinden kaynaklı bir etkilenim göstermez ve ϕ yönündeki eğrilikten kaynaklanan bir yol uzunluğu farkı yaşamaz. Bu durumda, $d\phi = 0$ olur.

Uzay-zaman statik olduğundan, test parçacıklarının enerjisi E'nin korunduğunu biliyoruz ve $p_t = E_k$, $p^0 = -E^0$ ve $p_r = p_k(r)$ olarak tanımlıyoruz; burada k alt simgesi nötrino flavorlarına karşılık gelir. Şimdi, radyal olarak yayılan ve null bir yörünge üzerinde hareket eden bir nötrinonun fazı şu şekilde olur:

$$\Phi_k = \int_{r_S}^{r_D} \left[-E_k \left(\frac{dt}{dr} \right)_0 + p_k(r) \right] dr = \int_{r_S}^{r_D} \left[-\frac{E_0}{p_0(r)} \frac{g_{rr}}{g_{tt}} + p_k(r) \right] dr. \tag{4.10}$$

Burada alt simge 0, null yörüngeyi ifade etmektedir. Kütle-kabuk (mass-shell) ilişkisi

$$-m^2 = g_{tt} p_t^2 + g_{rr} p_r^2 + g_{\phi\phi} p_\phi^2 \tag{4.11}$$

şimdi bize şunu verir:

$$p_0 = \pm E_0 \sqrt{-\frac{g_{rr}}{g_{tt}}}, \qquad p_k(r) = \pm \sqrt{-\frac{g_{rr} E_k^2}{g_{tt}} - m_k^2 g_{rr}} \tag{4.12}$$

Şimdi, Eq.(4.12) kullanılarak, fazı null yörüngede Eq.(4.10) olarak yazabiliriz.

$$\Phi_k = \pm \int_{r_S}^{r_D} E_k \sqrt{-\frac{g_{rr}}{g_{tt}}} \left[\sqrt{1 - \frac{m_k^2 g_{tt}}{E_k^2}} - 1 \right] dr. \tag{4.13}$$

Böylece, $0 < g_{tt} < 1$ ve göreli yaklaşım ($m_k \ll E_k$) kullanılarak, Denklem Eq.(4.13) şu hale gelir:

$$\Phi_k = \pm \frac{m_k^2}{2E_0} \int_{r_S}^{r_D} \sqrt{-g_{tt} g_{rr}}\, dr. \tag{4.14}$$

Şimdi, Eq.(4.8) içindeki metrik katsayılar için $g_{tt} g_{rr} = -1$ olduğundan, faz şu hale gelir:

$$\Phi_k = \pm \frac{m_k^2}{2E_0} (r_D - r_S). \tag{4.15}$$

Aslında Bu ifade, zayıf kütle çekim alanları için radyal fazın bilindik düz uzay-zaman yapısına dönüştüğünü göstermektedir. Dolayısıyla, zayıf bir kütleçekim alanında ekvator düzleminde radyal olarak dışa doğru hareket eden nötrinoların salınım olasılığı, kütleçekimsel etkilerden bağımsız olacaktır.

II. **Radyal olmayan durum** :

Şimdi radyal olmayan durumu inceleyelim. Null bir yörünge boyunca hareket eden bir nötrino için faz şu şekilde yazılabilir:

$$\Phi_k = \int_{r_S}^{r_D} \left[-E_k \left(\frac{dt}{dr} \right)_0 + p_r + J_k \left(\frac{d\phi}{dr} \right)_0 \right] dr, \tag{4.16}$$

Burada enerji ve açısal momentumun korunumu kullanılmıştır: $p_t^{(k)} = -E_k, \quad p_\phi^{(k)} = J_k$ ve J, test parçacığının açısal momentumu anlamına gelmektedir. Şimdi, açısal momentumu J_k'yı enerji E_k, çarpışma parametresi b ve test parçacığının sonsuzdaki hızı $v_k^{(\infty)}$ cinsinden ifade etmek istiyoruz:

$$J_k = E_k b v_k^{(\infty)} \tag{4.17}$$

görelilik yaklaşımı kullanılarak ve kütlesiz bir parçacık için: $J_0 = E_0 b$.

Şimdi, radyal olmayan durum için fazı şu şekilde yazabiliriz:

$$\Phi_k = \int_{r_S}^{r_D} \frac{E_0 E_k g_{rr}}{p_0(r)} \left[\frac{1}{g_{tt}} + \frac{p_0 p_k(r)}{E_0 E_k g_{rr}} + \frac{b^2}{g_{\phi\phi}} \left(1 - \frac{m_k^2}{2E_k^2} \right) \right] dr. \tag{4.18}$$

Bu ifade, Eq.(4.11) ve görelilik yaklaşımı kullanılarak basitleştirilecektir.

$$\Phi_k = \frac{m_k^2}{2E_0}\int_{r_S}^{r_D}\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}\left(1-\frac{b^2}{|g_{tt}|g_{\phi\phi}}\right)^{-1/2}dr. \tag{4.19}$$

Şimdi integrali iki farklı durumda değerlendireceğiz.

1. Nötrinolar, gravitasyonel potansiyel içinde üretilir ve dedektöre doğru radyal olmayan bir şekilde dışa doğru hareket eder.

2. Uzak bir kaynaktan gelen nötrinolar, dedektöre ulaşmadan önce gravitasyonel potansiyel tarafından merceklenir.

İlk durumu ele alarak integrand ifadesini inceleyelim. Metrik katsayılarını yerine koyarak şu ifadeyi elde ederiz:

$$\int_{r_S}^{r_D}\sqrt{-g_{tt}g_{rr}}\left(1-\frac{b^2}{|g_{tt}|g_{\phi\phi}}\right)^{-1/2}dr = \sqrt{r^2-b^2}+\frac{Mr}{\sqrt{r^2-b^2}}-\frac{Mrv^2}{(v^2-2)\sqrt{r^2-b^2}}. \tag{4.20}$$

Buradaki ilk iki terim Schwarzschild katkısını ifade eder ve üçüncü terim, sıfır olmayan itki hızı parametresinden kaynaklanır. Bu terim ayrıca yük cinsinden şu şekilde yazılabilir:

$$-\frac{Mrv^2}{(v^2-2)\sqrt{r^2-b^2}} = \frac{Qrv}{2\sqrt{r^2-b^2}} \longrightarrow v = \pm\sqrt{M^2+2Q^2}-M. \tag{4.21}$$

$$\int_{r_D}^{r_S}\sqrt{-g_{tt}\,g_{rr}}\left(1-\frac{b^2\,|g_{tt}|}{g_{\phi\phi}}\right)^{-1/2}dr = \sqrt{r^2-b^2}+M\left(1+\frac{Q^2}{2M^2}\right)\frac{r}{\sqrt{r^2-b^2}} \tag{4.22}$$

Böylece, faz şu şekilde yazılabilir:

$$\Phi_k = \frac{m_k^2}{2E_0}\left[\sqrt{r_D^2-b^2}-\sqrt{r_S^2-b^2}+M\left(1+\frac{Q^2}{2M^2}\right)\left(\sqrt{\frac{r_D}{r_D^2-b^2}}-\sqrt{\frac{r_S}{r_S^2-b^2}}\right)\right]. \tag{4.23}$$

$v\to 0$ sınırında, yukarıdaki ifade Schwarzschild durumuna indirgenir.

Şimdi, ikinci durumu ele alalım. Burada, nötrinolar uzak bir kaynaktan üretilir, merceklenme nesnesine doğru hareket eder ve $r = r_0$ noktasında en yakın geçişini yaparak dedektöre ulaşır. Bu durumda, faz ifadesi, momentumun işareti ve r_0 etrafındaki yörüngenin simetrisi göz önüne

alınarak iki parçaya ayrılabilir.

$$\begin{aligned}\Phi_k(r_S \to r_0 \to r_D) = &\frac{m_k^2}{2E_0}\int_{r_S}^{r_0}\sqrt{-g_{tt}\,g_{rr}}\left(1-\frac{b^2\,|g_{tt}|}{g_{\phi\phi}}\right)^{-1/2} \\ &+\frac{m_k^2}{2E_0}\int_{r_D}^{r_0}\sqrt{-g_{tt}\,g_{rr}}\left(1-\frac{b^2\,|g_{tt}|}{g_{\phi\phi}}\right)^{-1/2} dr.\end{aligned} \tag{4.24}$$

Faz integrandını, zayıf alan limitinde r_0 cinsinden ifade ediyoruz.

$$\begin{aligned}\int_{r_D}^{r_S}\sqrt{-g_{tt}\,g_{rr}}\left(1-\frac{b^2\,|g_{tt}|}{g_{\phi\phi}}\right)^{-1/2} dr &= \sqrt{r^2-r_0^2}-2M\,\frac{\sqrt{r^2-r_0^2}}{(r+r_0)(v^2-2)} \\ &= \sqrt{r^2-r_0^2}+M\left(1+\frac{Q^2}{2M^2}\sqrt{\frac{(r-r_0)}{r+r_0}}\right).\end{aligned} \tag{4.25}$$

İkinci eşitlikte, $v \sim \frac{Q}{M} \ll 1$ küçük yük yaklaşımını göz önünde bulundurduk. Son olarak, elde ederiz:

$$\begin{aligned}\Phi_k(r_S \to r_0 \to r_D) = \frac{m_k^2}{2E_0}\Bigg[&\sqrt{r_D^2-r_0^2}+\sqrt{r_S^2-r_0^2} \\ &+M\left(1+\frac{Q^2}{2M^2}\right)\left(\sqrt{\frac{r_D-r_0}{r_D+r_0}}+\sqrt{\frac{r_S-r_0}{r_S+r_0}}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{4.26}$$

r_0'ı b cinsinden açıyoruz.

$$r_0 \simeq b-\frac{2M}{2-v^2} \simeq b-M\left(1+\frac{Q^2}{2M^2}\right).$$

$$\begin{aligned}\Phi_k = \frac{m_k^2}{2E_0}\Bigg[&\sqrt{r_D^2-b^2}+\sqrt{r_S^2-b^2} \\ &+M\left(1+\frac{Q^2}{2M^2}\right)\left(\frac{b}{\sqrt{r_D^2-b^2}}+\frac{b}{\sqrt{r_S^2-b^2}}+\sqrt{\frac{r_D-b}{r_D+b}}+\sqrt{\frac{r_S-b}{r_S+b}}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{4.27}$$

Şimdi, $b \ll r_S$, r_D durumunda, yukarıdaki ifadeyi $\frac{b}{r_S}$ ve $\frac{b}{r_D}$ oranları cinsinden açarak elde ederiz:

$$\Phi_k = \frac{m_k^2}{2E_0}(r_D+r_S)\left[1-\frac{b^2}{2r_Dr_S}+\left(1+\frac{Q^2}{2M^2}\right)\frac{2M}{r_D+r_S}\right]. \tag{4.28}$$

Bu denklem ve tartışma, nötrino salınım fazlarının yalnızca kütleçekimsel kütleye ve geometrik yapıya değil, aynı zamanda boost uygulanmış uzay-zamanlardan kaynaklanan görelilik

etkilerine de duyarlı olduğunu göstermektedir. Dolayısıyla, fazın boost parametresine, yük Q aracılığıyla bağlı olduğunu gözlemleyebiliriz. yani $Q \to 0$ durumunda, Schwarzschild uzay-zamanındaki faz ifadesine ulaşılır.

Şimdi, kütleçekimsel merceklenmeye uğramış nötrinoların salınım olasılığını hesaplayacağız. Bir nötrinonun kaynak noktası S'de α flavor özdurumunda üretildiğini ve dedektör D'de β flavor özdurumunda tespit edildiğini varsayalım. Bu durumda salınım olasılığı şu şekilde verilir:

$$P_{\alpha\beta}^{\text{lens}} = \left|\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t_D, x_D)\rangle\right|^2 = |N|^2 \sum_{i,j} U_{\beta i} U_{\beta j}^* U_{\alpha j} U_{\alpha i}^* \sum_{p,q} \exp\left(-i\Delta\Phi_{ij}^{pq}\right), \tag{4.29}$$

Burada p ve q, merceklenme nedeniyle nötrinoların kaynaktan dedektöre kadar izleyebileceği farklı klasik yolları temsil eder. Böylece $\Delta\Phi_{ij}^{pq}$, flavor yapısını i, j indisleri aracılığıyla ve geometrik merceklenme yapısını p, q yolları üzerinden birleştiren bir faz farkıdır.

$$\Delta\Phi_{ij}^{pq} = \Phi_i^p - \Phi_j^q = \Delta m_{ij}^2 A_{pq} + \Delta b_{pq}^2 B_{ij}, \tag{4.30}$$

Burada katsayılar aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$$A_{pq} = \frac{r_S + r_D}{2E_0}\left[1 + \left(1 + \frac{Q^2}{2M^2}\right)\frac{2M}{r_S + r_D} - \frac{\Sigma b_{pq}^2}{4 r_S r_D}\right] \tag{4.31}$$

$$B_{ij} = -\frac{\Sigma m_{ij}^2}{8E_0}\left(\frac{1}{r_S} + \frac{1}{r_D}\right) \tag{4.32}$$

Yukarıdaki denklem setinde geçen büyüklükler ise şu şekilde tanımlanır:

$$\begin{aligned} \Delta b_{pq}^2 &= b_p^2 - b_q^2, \qquad & \Sigma b_{pq}^2 &= b_p^2 + b_q^2 \\ \Delta m_{ij}^2 &= m_i^2 - m_j^2, \qquad & \Sigma m_{ij}^2 &= m_i^2 + m_j^2 \end{aligned} \tag{4.33}$$

Zayıf alan sınırında, kaynak S, mercek ve dedektör D'yi birleştiren düzlem üzerindeki genel bir noktada iki flavorlu nötrino salınım olasılığını değerlendireceğiz.

$$P_{\alpha\beta}^{\text{lens}} = |N|^2 \left[\sum_{i,j} U_{\beta i} U_{\beta j}^* U_{\alpha j} U_{\alpha i}^* \left(\sum_{p=q} \exp(-i\Delta m_{ij}^2 A_{pp}) + 2\sum_{p>q} \cos(\Delta b_{pq}^2 B_{ij}) \exp(-i\Delta m_{ij}^2 A_{pq})\right)\right] \tag{4.34}$$

$p = q$ olan nötrino yolları için Δb_{pq}^2 sıfıra eşit olur ve bu durumda salınım olasılığı yalnızca

nötrino kütlelerinin kare farkına bağlıdır.

Elektron nötrinosundan muon nötrinosuna geçiş olasılığı:

$$P_{e\mu}^{\text{lens}} = |N|^2 \sin^2(2\alpha)\left[\sin^2\left(\frac{\Delta m^2 A_{11}}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta m^2 A_{22}}{2}\right) - \cos(\Delta b^2 B_{12})\cos(\Delta m^2 A_{12}) + \frac{1}{2}\cos(\Delta b^2 B_{11}) + \frac{1}{2}\cos(\Delta b^2 B_{22})\right] \tag{4.35}$$

Bu bölümde, Kaluza–Klein (KK) metriği altında, gravitasyonel alanların ve özellikle merceklenme etkilerinin nötrino flavor salınımları üzerindeki etkisi ayrıntılı olarak ele alınmıştır. Radial ve radial olmayan yörüngeler üzerinden yapılan analizler, nötrino faz evriminin yalnızca kütle farklarına değil, aynı zamanda geometrik parametreler duyarlı olduğunu göstermektedir. Elde edilen ifadeler, boost parametresi v ve buna bağlı efektif yük Q'nun salınım fazlarını nasıl değiştirdiğini ortaya koyarken, çoklu yol girişimleri de flavor geçiş olasılıklarına yeni yapıların eklendiğini göstermektedir.

4.1.2. Gravitasyonel alan etkisi altında nötrinolarin Düzenli Faz Kayması ve kuantum Dolanıklık

Nötrino salınımlarının en dikkat çekici yönlerinden biri, çevresel koşulların değişimine bağlı olarak ortaya çıkan faz kaymaları kavramıdır. Özellikle dolanıklık entropisi ile ilişkili olarak nötrino salınımlarındaki faz kaymalarının incelenmesi, ilk olarak Ahluwalia ve Burgard tarafından önerildiğinden bu yana ilgi çekici bir araştırma konusu olmuştur(Ahluwalia and Burgard, 1996, 1998).Araştırmacılar, kütleçekimsel alanların nötrino salınımlarında faz kaymasına neden olabileceğini teorik olarak göstermişlerdir. Bu öncü çalışmanın ardından, söz konusu kavram pek çok farklı çalışmada ayrıntılı biçimde ele alınmıştır. Grossman ve ekibi, süpernova patlamalarının mekanizmasının, kütleçekimiyle ilişkili faz kaymalarından anlamlı şekilde etkilenebileceğini ileri sürmüştür(Grossman and Lipkin, 1997). Capozziello ve arkadaşları, bu faz kaymalarını $f(R)$ kütleçekim teorisi çerçevesinde analiz etmiş(Capozziello et al., 2010), Capozziello ve Lambiase ise Brans–Dicke kütleçekim kuramı bağlamında nötrino flavor salınımlarını incelemiştir(Capozziello and Lambiase, 1999). Ren ve Zhang, bu analizleri Kerr–Newman uzayzamana genişleterek, kütleçekimsel dönme ve elektrik yükü etkisiyle değişen salınım fazları için genel denklemler türetmiştir (Ren and Zhang, 2010). Ayrıca, Koranga, Planck ölçeğindeki kuantum kütleçekim etkilerinin nötrino salınımlarında faz kaymasına yol açabileceğini göstermiştir (Koranga, 2012). Swami ise, kütleçekim kaynağının

dönmesinden kaynaklanan faz kaymalarını hem merceklenmiş hem de merceklenmemiş nötrinolar için hesaplayarak ayrıntılı şekilde incelemiştir (Swami, 2022).

Önceki bölümde, özellikle Kaluza-Klein (KK) metriği kullanılarak, hem radyal hem de radyal olmayan durumlar için nötrino fazlarını detaylı bir şekilde analiz ettik. Şimdi, yerçekiminin nötrino salınımları üzerindeki etkisinin bir başka yönünü inceleyeceğiz. Bu bölüm, deforme olmuş uzay-zamanda (Yerçekimi alanının etkisi altında) nötrino salınımlarını modellemek için kavramsal ve matematiksel bir temel sunmaktadır. Standart (Minkowski) uzay-zamanında özel göreliliğin tanımladığı düz uzayda nötrino salınımları genellikle Markovian süreçler olarak ele alınır; yani sistemin gelecekteki durumu yalnızca mevcut duruma bağlıdır, geçmiş durumların bir etkisi yoktur. Bu çerçevede, nötrinoların flavor durumları arasında geçişler periyodik, öngörülebilir ve sabit geçiş noktalarına sahiptir. Ancak kütleçekimsel alanlardan kaynaklanan gravitasyonel pertürbasyonlar uzay-zamanı deforme ederek bu klasik yapıyı bozar. Deforme olmuş bir Minkowski uzay-zamanında parçacıkların hareketi artık Markovian olmaktan çıkar; sistem geçmiş durumlarını hatırlar ve bu durum önemli sonuçlar doğurur (Metzler and Klafter, 2002; Sokolov et al., 2002). Bu durum da kuantum sistemi artık izole bir yapı olmaktan çıkar ve eğrilmiş uzay-zamanla olan etkileşimi bozunmaya (decoherence) ve nihayetinde kuantum durumlarının tanımlandığı Hilbert uzayının yapısında deformasyona neden olur. Bu da, standart kuantum mekaniği varsayımlarının geçerliliğini yitirebileceğini göstermektedir. Bu davranışı modellemek için çalışmada kesirli Dirac denklemi kullanılmaktadır. Matematiksel ifadeyle, bu durum Dirac denkleminin olağan zaman türevinin, η parametresiyle tanımlanan kesirli bir türevle değiştirilmesiyle modellenmektedir. Bu yüzden, klasik zaman türevi yerine, Caputo kesirli türevi devreye sokulmuştur (Aydiner, 2023; Laskin, 2000; Raspini, 2001).

$$iD_t^{\eta}\Psi_j(t,x) = -\left[|P| + \frac{(m_j)^2c^3}{2|P|}\right]\frac{\delta.P}{2|P|}\Psi_j(t,x) \tag{4.36}$$

Burada :

- D_{η}^{t}: Caputo kesirli türev operatörünü belirtir.
- η: Kesirli mertebe parametresi, $0 < \eta < 1$ aralığında tanımlıdır.
- $\Psi(t,x)$: Nötrinonun dalga fonksiyonudur.

Eq(4.36)'ün çözümü, aşağıdaki gibi iki dalga fonksiyonu ile verilebilir:

$$\psi_j(t,x) = \chi_j^{(0)}(t,x)\,\xi_j^{(0)}(t,x) \tag{4.37}$$

burada iki dalga fonksiyonu aşağıdaki denklemleri sağlar:

$$iD_t^{\eta}\chi_j^{(0)}(t,x) = -\lambda_1^{\eta}\chi_j^{(0)}(t,x) \tag{4.38}$$

$$iD_t^{\eta}\xi_j^{(0)}(t,x) = -\lambda_2^{\eta}\xi_j^{(0)}(t,x) \tag{4.39}$$

Kesirli Dirac denkleminin genel çözümü aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\psi_j(t,x) = \psi_j^{(0)}(0)\,E_{\eta}(-i\lambda_1^{\eta}t^{\eta})\,E_{\eta}(-i\lambda_2^{\eta}t^{\eta}) \tag{4.40}$$

Burada Mittag-Leffler fonksiyonu şu şekilde verilir:

$$E_{\eta}(-i\lambda t^{\eta}) \sim \exp\left(-\frac{i\lambda t^{\eta}}{\Gamma(1+\eta)}\right) \tag{4.41}$$

Aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$|\nu_j(t)\rangle = \sum_{j=1}^{3} U_{\alpha j}\,E_{\eta}(-i\lambda_1^{\eta}t^{\eta})\,E_{\eta}(-i\lambda_2^{\eta}t^{\eta})\,|\nu_j\rangle \tag{4.42}$$

Olasılık genliği şu şekilde olur:

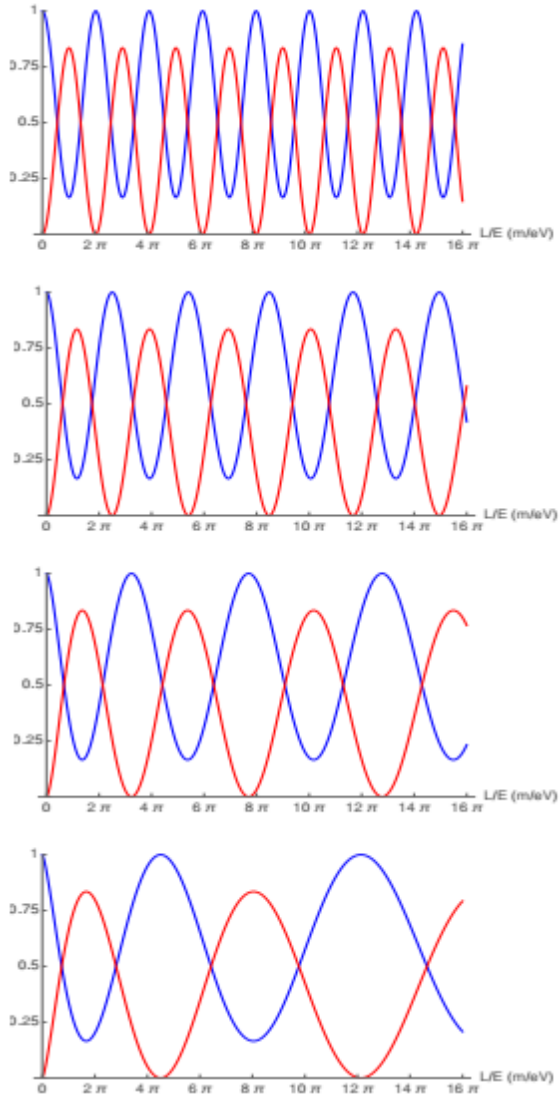
$$\langle\nu_\beta|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_j U_{\alpha j}U_{\beta j}^{*}\exp\left\{-i\left(\frac{m_j^2c^3}{2hp}\right)^{\eta}t^{\eta}\right\}\exp\left\{-i\left(\frac{pc}{h}\right)^{\eta}t^{\eta}\right\} \tag{4.43}$$

Bu kapsamda elde edilen denklem, kuantum durumları $|\nu_\alpha\rangle \to |\nu_\beta\rangle$ arasında kesirli geçiş olasılıklarını tanımlar. Bu olasılık şu şekilde verilir:

$$P_{|\nu_\alpha\rangle\to|\nu_\beta\rangle} = \sum_{j,k} U_{\alpha j}U_{\beta j^*}U_{\alpha k^*}U_{\beta k}\exp\left[-i\left(\frac{(m_j^2-m_k^2)c^3}{2h|P|}\right)^{\eta}t^{\eta}\right] \tag{4.44}$$

Standart Minkowski uzay-zamanında, $\eta = 1$ olduğunda orijinal denklem elde edilir. Kesirli mertebenin osilasyon olasılığı üzerindeki etkisini gözlemleyebilmek amacıyla, Eq.(4.44) farklı η değerleri için sayısal olarak çözülmüş ve Elektron, müon nötrinolarının osilasyon olasılıkları **Şekil 4.2:**'de sunulmuştur. Sayısal işlem sırasında, θ_{12} 33°'ye, Δm_{12}^2 $7.37\times10^{-5}\,\mathrm{eV}^2$'ye ve c

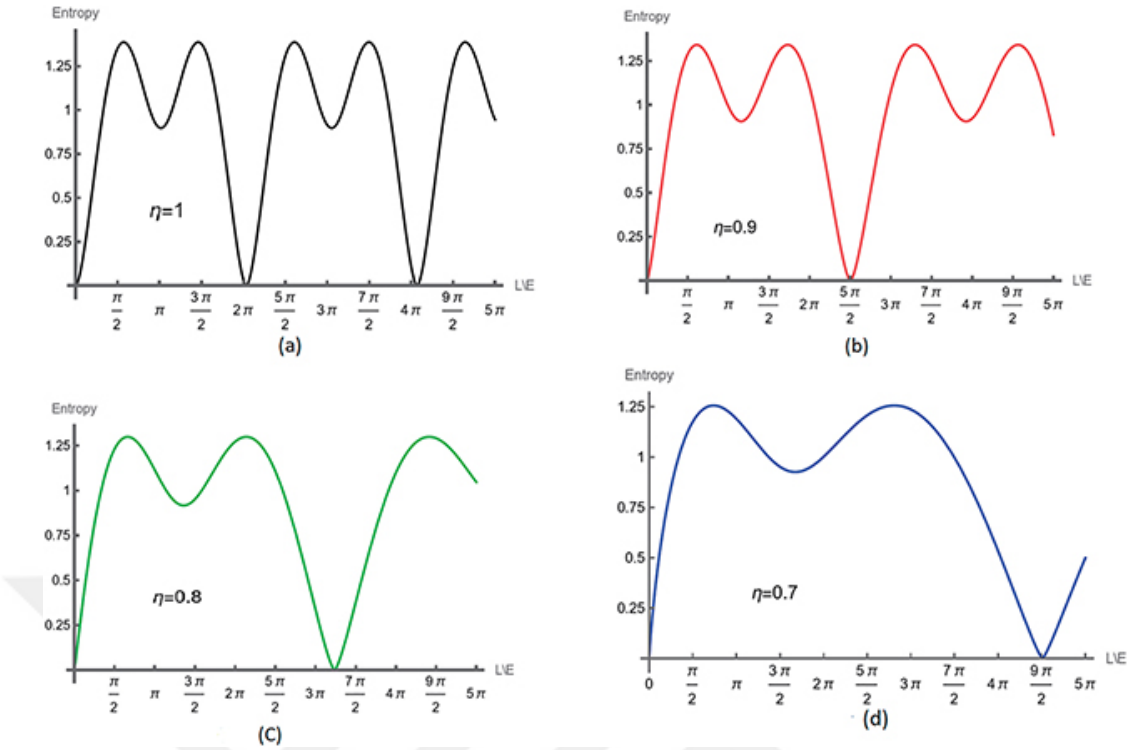
3×10^8 km/s'ye ayarlanmıştır.



Şekil 4.2: Elektron ve müon nötrinolarının osilasyon olasılıkları. Kırmızı çizgi, elektron nötrinosunu; mavi çizgi ise müon nötrinosunu göstermektedir. Şekil (a)'da, $\eta = 1$ için ve Şekil (b) için $\eta = 0.9$, Şekil (c) için $\eta = 0.8$ ve Şekil (d) için $\eta = 0.7$'dir.

Şekilde gösterildiği gibi, η değerlerinin 1'den küçük olduğu durumlarda, nötrino osilasyonları gerilmiş, düzensiz bir örüntü sergilemektedir: geçiş noktaları kaymakta ve osilasyon periyotları uzamaktadır. Kısacası, kütleçekim alanı osilasyon döngüsünü değiştirerek nötrino osilasyonlarını etkilemekte, bu durum standart senaryoya kıyasla anormal faz kaymaları ve uzamış osilasyon periyotlarına yol açmaktadır.

Şimdi, von Neumann Eq.(3.120) yöntemi kullanılarak, gravitasyonel alan etkisi altında iki flavor arasındaki nötrino osilasyonlarının entropisi, çeşitli η değerleri için hesaplanmaktadır. Elde edilen sonuçlar **Şekil 4.3:**'de gösterilmiştir.



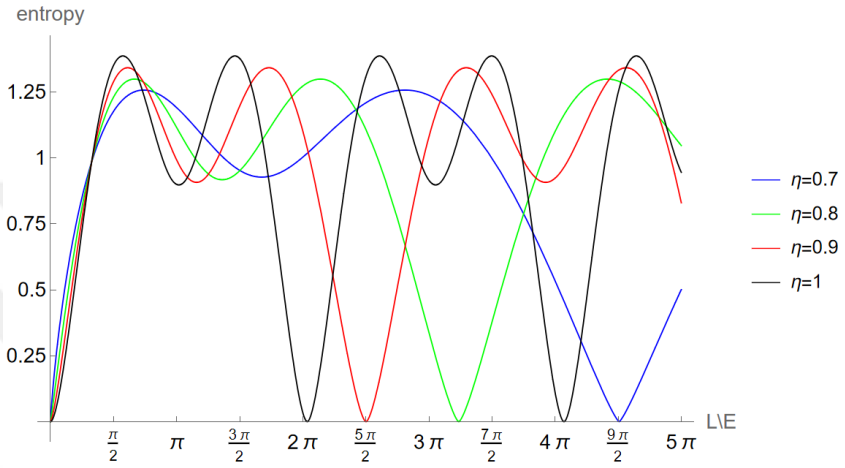
Şekil 4.3: (a) Şekilde, $\eta = 1$ için nötrino osilasyon entropisi $S(e,\mu)$, sıradan Minkowski uzay-zamanını göstermektedir. Deforme edilmiş Minkowski uzay-zamanındaki entropi ise (b–d) şekillerde sunulmuştur. Minkowski uzay-zamanının deformasyon parametreleri sırasıyla; (b) için $\eta = 0.9$, (c) için $\eta = 0.8$ ve (d) için $\eta = 0.7$'dir.

Şekil 4.3:(a)'da, $\eta = 1$ durumu için dolanıklık entropisi verilmiştir ve bu entropi, tam olarak **Şekil 3.4:** numaralı denklemde sunulan entropiyle aynıdır. Bu durumda, dolanıklığın dağılımının oldukça periyodik olduğu ve simetrik bir yapıya sahip olduğu görülmektedir. Ancak, $\eta < 1$ değerleri için entropi dağılımının simetrisinin bozulduğu ve periyodikliğin ortadan kalktığı gözlemlenmektedir. Bu durum, η değerlerinin küçüldüğü durumlarda daha belirgin hale gelmektedir. Örneğin, (a) bölümünde $\eta = 1$ için osilasyon periyodu 2π iken, (b) bölümünde $\eta = 0.9$ için osilasyon periyodu 2.5π'ye, (c) bölümünde $\eta = 0.8$ için 3.25π'ye ve son olarak (d) bölümünde $\eta = 0.7$ için 4.5π'ye kaymaktadır. Entropide gözlemlenen bir artış, genellikle sistemdeki kuantum dolanıklığının artması ya da kuantum korelasyonlarının daha karmaşık hâle gelmesiyle ilişkilidir. Bu bağlamda, entropinin kesirli zaman parametresi η'ya bağlı olarak gösterdiği değişim, sistemin ideal yani tamamen koherent, düzenli ve tersinir kuantum evriminden sapma derecesini yansıtır.

Özellikle $\eta = 1$ durumunda sistem, standart kuantum mekaniğine uygun şekilde Markovyen, belleksiz ve tamamen koherent bir dinamik sergiler; bu durumda entropi evrimi hem simetrik hem de periyodiktir. Buna karşın $\eta < 1$ olduğunda, sistemin evrimi kesirli türevli denklemlerle

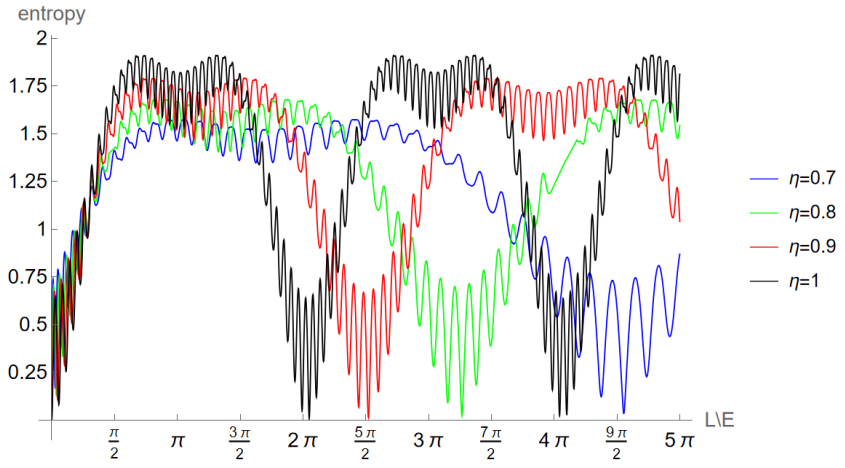
tanımlanır ve bu durum geçmişe bağımlılık içeren, yani bellek etkisi taşıyan gayri-Markovyen bir yapıya yol açar. Bu tür dinamikler, sistemin koheransını zayıflatır ve dolanıklığın zamansal gelişiminde gözle görülür bir düzensizlik ve periyodik yapıdan sapma ortaya çıkarır.

Şekildeki dört grafik, dolanıklık entropisinin farklı kesirli zaman parametreleri η altında nasıl evrildiğini karşılaştırmalı olarak görselleştirmek ve aynı zamanda η kaynaklı faz kaymalarını açıkça göstermek amacıyla, **Şekil 4.4:**'te üst üste gelecek şekilde çizilmiştir.



Şekil 4.4: Çeşitli kesirli parametreler için nötrino osilasyon entropisi $S(e,\mu)$ karşılaştırması

Ayrıca, **Şekil 4.5:**'te görüldüğü üzere, çeşitli η parametreleri için üç flavorli nötrino osilasyonları dolanıklık entropisi çizilmiştir. Burada, üç flavor geçiş olasılığı kullanılarak dolanıklık entropisi hesaplanmıştır. Görüldüğü gibi, üç flavor için elde edilen sonuçlar, iki flavor için elde edilen sonuçlarla uyumludur.



Şekil 4.5: Üç flavor için nötrino osilasyon entropisinin karşılaştırılması

4.2. MAGNETİK ALAN ETKİSİ ALTINDA NÖTRİNO SALINIMI VE KUANTUM DOLANIKLIK

Standart Model'e (SM) göre, temel parçacıklar olarak nötrinolar geleneksel olarak elektriksel olarak yüksüz kabul edilmekte ve doğrudan elektromanyetik etkileşimleri olmadığı varsayılmaktadır. Ancak, nötrinolara dair anlayışımızın özellikle kütlelerinin keşfi sonrasında ilerlemesiyle, belirli elektromanyetik özellikler sergileyebildikleri ortaya konmuştur. Bunlar arasında sıfırdan farklı manyetik moment ve yük yarıçapı gibi özellikler bulunmaktadır (Giunti et al., 2024). Ayrıca, deneysel kısıtlamalar, nötrinoların elektrik yükü için üst sınır belirlemiş olup, bu değer yaklaşık olarak $10^{-13}e$ (burada e temel yükü ifade eder) olarak tahmin edilmiştir.

Nötrinolar harici bir manyetik alana (örneğin: yıldızların iç bölgeleri, süpernova çekirdekleri, nötron yıldızları ve muhtemelen erken evren) maruz kaldığında, manyetik momentleri ile alan arasındaki etkileşim nedeniyle spin precesyonu veya spin-flip gösterebilirler. Nötrino spin salınımı , sol elli nötrinoların sağ elli nötrinolara dönüşmesine neden olur (Horvat and Pisk, 1988). Daha önce detaylı olarak açıklandığı üzere, Standart Model yalnızca sol elli nötrinoları içerirken, salınım mekanizması (seesaw mechanism) varsayımsal sağ elli nötrinoların varlığını öne sürer. Bu sağ elli nötrinolar "steril" olarak adlandırılır ve sol elli karşıtlarının aksine zayıf etkileşim aracılığıyla herhangi bir etkileşime girmezler(King, 2004).

Nötrinoların manyetik momenti oldukça küçük olmasına rağmen, harici bir elektromanyetik alanla, özellikle de alan tensörü $F_{\mu\nu} = (E,B)$ üzerinden, anormal manyetik momentler aracılığıyla etkileşimleri mümkündür. Bu tür etkileşimler, klasik Standart Model çerçevesinde açıklanamazken, Minimal Genişletilmiş Standart Model (MESM) gibi bazı genişletilmiş teoriler bu durumu açıklamak için önemli bir temel sunar. MESM, Standart Model'i kütleli nötrinoları da dahil ederek genişleten teorik bir yapıdır ve bu çerçevede nötrinolar için son derece küçük bir manyetik moment değeri μ_ν öngörülmektedir(Lee and Shrock, 1977). Nötrinonun manyetik momenti aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir :

$$\mu_\nu = 3.2 \times 10^{-19}(\frac{m_\nu}{1eV})\mu_B \tag{4.45}$$

Burada m_ν nötrino kütlesini, μ_B ise Bohr magnetonunu ifade eder. Bohr magnetonu $\mu_B = 5.8 \times 10^{-15}\left(\frac{\text{MeV}}{G}\right)$ olarak tanımlanmaktadır. Nötrino flavor-spin salınımı, genel olarak, nötrinonun manyetik momentinin enine manyetik alan ile etkileşimi tarafından değiştirilebilir. Dirac

denklemi, nötrino gibi kütleli fermiyonların davranışını tanımlar:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{mu} - m)\psi = 0 \tag{4.46}$$

Bir elektromanyetik alanın varlığında, Dirac denklemine (4.46) $\mu\delta^{\mu\nu}F_{\mu\nu}$ terimi eklenir. Yeni denklem şu şekilde verilir:

$$(i\gamma^{\mu}\partial_{mu} - m - \mu\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu})\psi = 0 \tag{4.47}$$

burada μ manyetik momenti, $F_{\mu\nu}$ ise elektromanyetik alan şiddet tensörünü ifade eder.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{4.48}$$

Sabit bir manyetik alanın varlığında:

$$\sigma^{\mu\nu}F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \delta^i & 0 \\ 0 & \delta^i \end{pmatrix} \mathbf{B} = \Sigma.\mathbf{B} \tag{4.49}$$

burada Σ, nötrino spin durumlarını (veya manyetik momentlerini) manyetik alana bağlayan etkin manyetik bağlaşım tensörüdür.

İki farklı nötrino flavorunu $(e-\mu)$ ve iki helisite durumunu $(\nu_i^{L(R)}, i = 1,2)$ ele alalım. Sabit bir manyetik alanın varlığında vektör **B** tarafından verilen karışımı göz önünde bulunduralım. Kuantum süreçlerini önemli ölçüde etkilemek için gerekli olan doğal bir manyetik alan ölçeği vardır ve bu, elektron kütlesi m_e ve temel yük e ile tanımlanır:

$$\mathbf{B}_e = \frac{{m_e}^2}{e} = 4.41 \times 10^{13} G.$$

Her ne kadar nötrinoların 10^{16} G'den büyük manyetik alanlarla karşılaşması nadir olsa da, birçok durumda nötrinolar astrofiziksel ortamlarda $\mathbf{B}_e$ mertebesinde veya civarında manyetik alanlarla karşılaşırlar (Erdas and Metzler, 2019). Bu yaklaşım, nötrino spin durumlarının sınıflandırılması için manyetik alandaki tam durağan durumların kullanılması esasına dayanmaktadır (Popov and Studenikin, 2019). İki flavor durumunda nötrino karışımı

şu şekilde verilir:

$$\nu_e^{L(R)} = \nu_1^{L(R)} \cos\theta + \nu_2^{L(R)} \sin\theta \tag{4.50}$$

$$\nu_\mu^{L(R)} = -\nu_1^{L(R)} \sin\theta + \nu_2^{L(R)} \cos\theta \tag{4.51}$$

Bu hem sol elli hem de sağ elli bileşenleri içerecek şekilde tek bir matris denklemi ile aşağıdaki gibi bir biçimde yazmak mümkündür:

$$\begin{pmatrix} \nu_e^L \\ \nu_\mu^L \\ \nu_e^R \\ \nu_\mu^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^L \\ \nu_2^L \\ \nu_1^R \\ \nu_2^R \end{pmatrix} \tag{4.52}$$

Bu adımda, nötrino helisite durumları, nötrino durağan durumları(stationary states) üzerinden açılacaktır.

$$\nu_i^L(t) = c_i^+ \nu_i^+(t) + c_i^- \nu_i^-(t) \tag{4.53}$$

$$\nu_i^R(t) = d_i^+ \nu_i^+(t) + d_i^- \nu_i^-(t) \tag{4.54}$$

burada c_i ve d_i zamandan bağımsızdır. Denklem (4.53) ve Denklem (4.54) ifadelerini Denklem (4.52) içine yerleştirdiğimizde, aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{pmatrix} \nu_e^L \\ \nu_\mu^L \\ \nu_e^R \\ \nu_\mu^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1^+ \cos\theta & c_2^+ \sin\theta & c_1^- \cos\theta & c_2^- \sin\theta \\ -c_1^+ \sin\theta & c_2^+ \cos\theta & -c_1^- \sin\theta & c_2^- \cos\theta \\ d_1^+ \cos\theta & d_2^+ \sin\theta & d_1^- \cos\theta & d_2^- \sin\theta \\ -d_1^- \sin\theta & d_2^+ \cos\theta & -d_1^- \sin\theta & d_2^- \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1^+ \\ \nu_2^+ \\ \nu_1^- \\ \nu_2^- \end{pmatrix} \tag{4.55}$$

Eq.(4.55), her bir nötrino durumunun zamana bağlı evrimini doğrudan elde etmemizi sağlar. Göreli nötrinonun durağan durumlarının zaman (veya uzay) içerisindeki evrimi, aşağıdaki şekilde ifade edilen bir yayılma yasasına uyar:

$$\nu_i^\pm(t) = e^{-iE_i^\pm t} \nu_i^\pm(0) \tag{4.56}$$

$$\nu_e^L(t) = [c_1^+ e^{-iE_1^+ t} \nu_1^+ + c_1^- e^{-iE_1^- t} \nu_1^-] \cos\theta + [c_2^+ e^{-iE_2^+ t} \nu_2^+ + c_2^- e^{-iE_2^- t} \nu_2^-] \sin\theta \tag{4.57}$$

Denklem (4.57), sol elli elektron nötrinosunun zaman evrimini, öz durumların kuantum

süperpozisyonundaki bileşenleri cinsinden tanımlar. Katsayılar $c_i^{+(-)}$ ve $d_i^{+(-)}$'nin ikinci dereceden kombinasyonları, projektör operatörlerinin matris elemanları ile verilir:

$$|c_i^{\pm}|^2 = \langle \nu_i^L | \widehat{P}_i^{\pm} | \nu_i^L \rangle \tag{4.58}$$

$$|d_i^{\pm}|^2 = \langle \nu_i^R | \widehat{P}_i^{\pm} | \nu_i^R \rangle \tag{4.59}$$

Burada bir projektör operatörü tanıtılmaktadır; çünkü spin operatörü doğrudan bir ölçüm sonucu vermez. Spin operatörünün özdeğerleri ($+1$, -1 gibi) olsa da, fiziksel olarak anlamlı olan ölçüm, bir sistemin belirli bir spin yönünde olup olmadığını belirlemektir. Bu tür bir ayrım yalnızca projektör operatörü aracılığıyla gerçekleştirilebilir. Başka bir deyişle, projektör operatörü belirli bir spin durumuna projeksiyon yaparak seçim (ayırma) işlemini gerçekleştirirken, spin operatörü yalnızca spin yönelimini tanımlar.

$$\widehat{P}_i^{\pm} = \frac{1 \pm \widehat{S}_i}{2} \tag{4.60}$$

$\widehat{S}_i$ spin operatörleridir:

$$\widehat{S}_i = \frac{m_i}{\sqrt{m_i^2 B^2 + P^2 B_{\perp}^2}} \left[\Sigma.\mathbf{B} - \frac{i}{m_i} \gamma_0 \gamma_5 \left(\Sigma \times P \right) B \right] \tag{4.61}$$

Manyetik alanın boyuna bileşeni(longitudinal component) ihmal edilmiştir, yani $B_{\parallel} = 0$. Genel spin operatörü denklemi (4.61) iki terim içerir:

- $\Sigma \cdot \mathbf{B} = B_{\perp}$: Bu terim, spin'in manyetik alan doğrultusundaki bileşenini temsil eder. Manyetik alanın şiddeti arttıkça bu terim baskın hale gelir ve spinin alan doğrultusunda hizalanma eğilimi belirginleşir.
- $(\Sigma \times P)B$: Bu terim, spin-yörünge etkileşimi (spin-orbit coupling) olarak bilinir. Fiziksel olarak parçacığın hareketi sırasında spin'in yörüngesel değişimlere nasıl tepki verdiğini gösterir.

Ikinci terim manyetik alanın zayıf olduğu veya parçacığın göreli olmayan rejimde bulunduğu durumlarda önemli hale gelir (Yüksek derecede göreli durumlarda bu terim bastırılır). Bu durumda, nötrino spin-flavor salınım olasılığı $\nu_{\mu}^L \to \nu_e^R$ şu şekilde ifade edilir:

$$P_{\nu_e^L \to \nu_{\mu}^R}(t) = \sin^2 2\theta [\cos(\mu_- B_{\perp} t) \cos(\mu_+ B_{\perp} t) + \sin^2(\mu_1 B_{\perp} t) \sin^2(\mu_2 B_{\perp} t) \sin^2 \frac{\triangle m^2}{4P} t]. \tag{4.62}$$

burada $\mu_{\pm} = \frac{1}{2}[\mu_1 \pm \mu_2]$ ifadesi tanımlanır.

Nötrino kütle öz durumlarının manyetik momentleri eşit olduğunda ($\mu_1 = \mu_2$), spin-flavor salınım olasılığı, iki bağımsız kuantum geçişinin çarpımı olarak sadeleşir. Bu durumda, toplam süreç $\nu_e^L \to \nu_\mu^R$, ardışık iki aşamalı bir evrim olarak yorumlanabilir: İlk olarak, nötrinonun manyetik momenti ile dış manyetik alan $B_\perp$ arasındaki etkileşim sonucunda gerçekleşen bir spin flip $\nu_e^L \to \nu_e^R$ meydana gelir; ardından, karışım açısı θ ve kütle farkı Δm^2 ile tanımlanan standart vakum salınım mekanizması tarafından yönlendirilen bir flavor salınımı $\nu_e^R \to \nu_\mu^R$ gerçekleşir. Bu özel durumda, spin ve flavor dinamikleri birbiriyle ayrışır ve toplam geçiş olasılığı, spin ve flavor katkılarının çarpımı olarak açık bir fiziksel yorum kazanır.

$$P_{\nu_e^L \to \nu_\mu^R} = \sin^2(\mu B_\perp t) \sin^2 2\theta \sin^2(\frac{\Delta m^2}{4P} t). \tag{4.63}$$

Dolayısıyla, nötrino spin-flavor salınım olasılığı, iki bağımsız geçiş olasılığının çarpımı şeklinde temsil edilebilir.

- Nötrino spin salınım olasılığı: $P_{\nu_e{}^L \to \nu_e{}^R} = \sin^2(\mu B_\perp t)$
- Nötrino flavor salınım olasılığı: $P_{\nu_e{}^L \to \nu_\mu{}^L} = \sin^2(2\theta) \sin^2\left(\frac{\Delta m^2}{4P} t\right)$

Bu iki olasılığın ayrılması, teorik hesaplamalarda önemli bir sadeleştirme sağlar ve manyetik momentin yanı sıra karışım açısı ile kütle farklarının da ayrı ayrı gözlenebilir etkiler ürettiğini açıkça ortaya koyar.

Şimdi, sabit bir manyetik alan etkisi altında nötrino spin-flavor salınımlarındaki dolanıklık entropisini inceleyeceğiz. Nötrino spin-flavor salınımlarının kritik bir yönü, manyetik alanın varlığında flavor ve spin geçiş süreçlerinin birbirinden bağımsız olmamasıdır. Flavor salınım dinamikleri spin durumuna bağlı iken, spin precessiyonu dinamikleri flavor durumuna bağlıdır. Bu karşılıklı bağımlılık, spin ve flavor serbestlik dereceleri arasında kuantum dolanıklığına yol açar. Nötrino durumu, hem spin hem de flavor durumlarının süperpozisyonu olarak tanımlanabilir:

$$|\psi(t)\rangle = \alpha|\nu_e\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \beta|\nu_\mu\rangle \otimes |\downarrow\rangle \tag{4.64}$$

Burada $|\nu_e\rangle$ ve $|\nu_\mu\rangle$ sırasıyla e ve μ nötrino flavor durumlarını temsil etmektedir. $|\uparrow\rangle$ ve $|\downarrow\rangle$ ise spin durumlarını (yukarı ve aşağı) temsil eder. Bir nötrino, manyetik alan etkisi altında salınım

yaparken ve sıfır olmayan bir manyetik momente sahip olduğunda, flavor ve spin durumları dolanıklık oluşturabilir. flavor ve spin alt sistemleri arasındaki dolanıklığı hesaplamak için, dolanıklık derecesini belirten von Neumann yöntemini kullanıyoruz. Von Neumann entropisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$S(\rho) = -\mathrm{Tr}(\rho \ln \rho) \tag{4.65}$$

Saf bir durum için, $S(\rho) = 0$ dolanıklığın olmadığını, $S(\rho) > 0$ ise flavor ve spin arasındaki dolanıklığı göstermektedir. ψ durumuna ait yoğunluk matrisi aşağıdaki gibi verilmiştir:

$$\rho = |\psi(t)\rangle\langle\psi(t)| \tag{4.66}$$

Bu, durum vektörünün kendisiyle dış çarpımıdır:

$$\rho = (\alpha|\nu_e\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \beta|\nu_\mu\rangle \otimes |\downarrow\rangle)(\alpha^*|\nu_e\rangle \otimes |\uparrow\rangle + \beta^*|\nu_\mu\rangle \otimes |\downarrow\rangle) \tag{4.67}$$

Bunu açarsak:

$$\begin{aligned}\rho = {} & |\alpha|^2 |\nu_e\rangle\langle\nu_e| \otimes |\uparrow\rangle\langle\uparrow| + \alpha\beta^* |\nu_e\rangle\langle\nu_\mu| \otimes |\uparrow\rangle\langle\downarrow| \\ & + \alpha^*\beta\, |\nu_\mu\rangle\langle\nu_e| \otimes |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\beta|^2 |\nu_\mu\rangle\langle\nu_\mu| \otimes |\downarrow\rangle\langle\downarrow|.\end{aligned} \tag{4.68}$$

Azaltılmış yoğunluk matrisi, spin veya flavor alt sistemlerinden izleme (trace) yapılarak elde edilir; bu da von Neumann entropisi aracılığıyla dolanıklığın nicelendirilebilmesine olanak tanır. Dolanıklık entropisi eşittir:

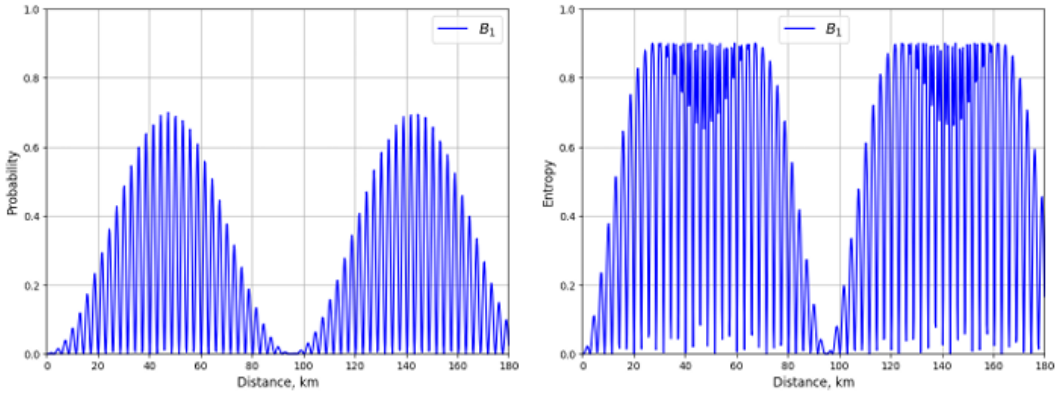
$$S(\rho_\alpha) = S(\rho_\beta) \quad = -(P_{sur}) \log(P_{sur}) - (P_{osc}) \log(P_{osc}) \tag{4.69}$$

$$= -\left(|\alpha|^2 \log(|\alpha|^2) + |\beta|^2 \log(|\beta|^2)\right) \tag{4.70}$$

$|\alpha|^2$ nötrinoyun $|\nu_e\rangle|\uparrow\rangle$ durumunda bulunma olasılığıdır ve $|\beta|^2$ nötrinoyun $|\nu_\mu\rangle|\downarrow\rangle$ durumunda bulunma olasılığıdır.

$$\begin{aligned}S(\rho) = & -\left(\cos^2(2\mu B_\perp t) + \sin^2(2\mu B_\perp t) - 4\sin^2(2\mu B_\perp t)\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2(\frac{\Delta m^2 t}{2E})\right) \\ & \log\left(\cos^2(2\mu B_\perp t) + \sin^2(2\mu B_\perp t) - 4\sin^2(2\mu B_\perp t)\sin^2\theta\cos^2\theta\sin^2(\frac{\Delta m^2 t}{2E})\right) \\ & -\left(\sin^2(\mu B_\perp t)\sin^2 2\theta \sin^2\frac{\Delta m^2}{4P}t\right)\log\left(\sin^2(\mu B_\perp t)\sin^2 2\theta\sin^2\frac{\Delta m^2}{4P}t\right)\end{aligned} \tag{4.71}$$

Bu ilişki, Von Neumann entropisi ile nicelendirilen dolanıklık entropisinin, nötrinoların flavor-spin hayatta kalma ve salınım davranışını tanımlayan olasılıklarla nasıl bağlantılı olduğunu vurgulamaktadır (Blasone et al., 2009).



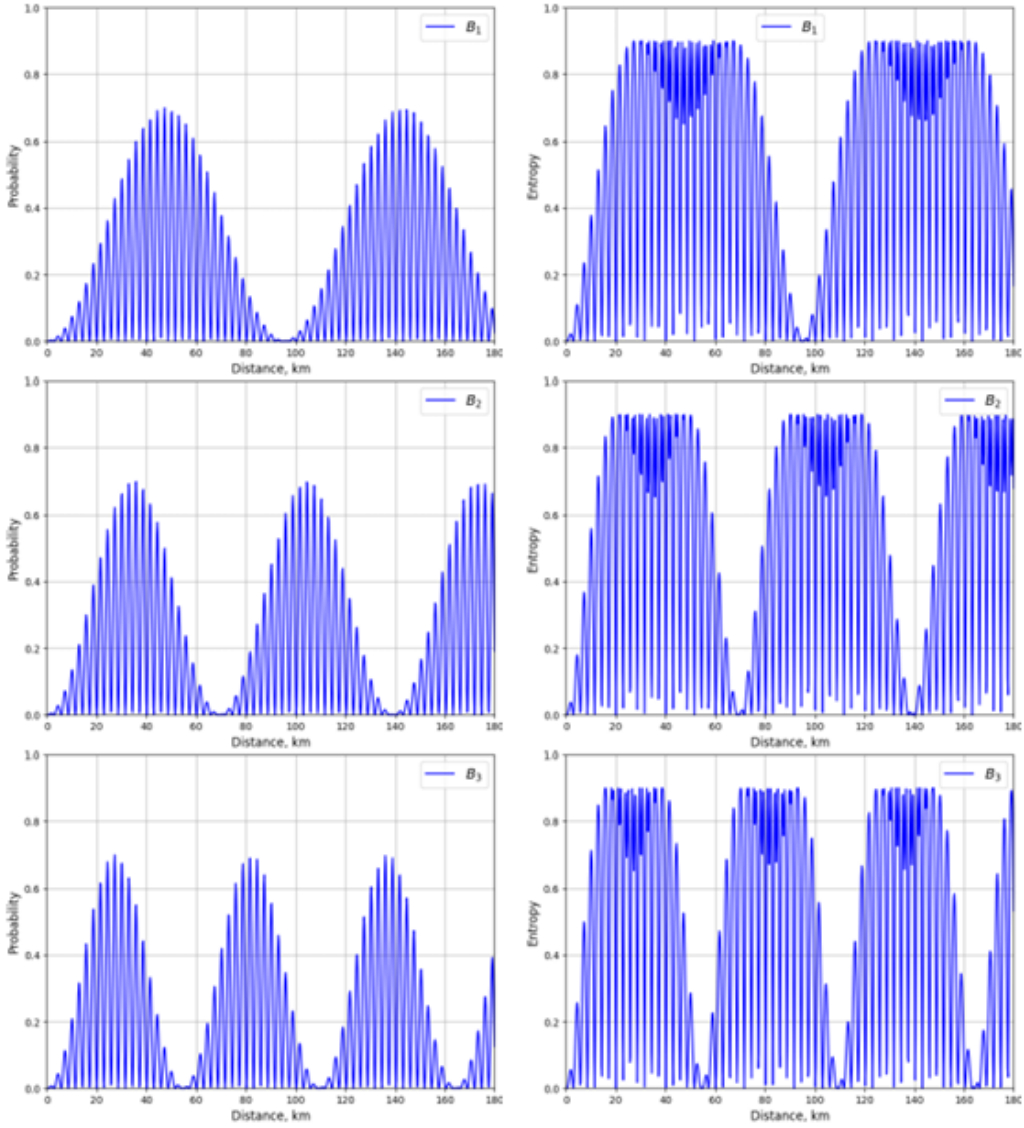
Şekil 4.6: (a) Sabit manyetik alan altında sol-el elektron nötrinodan sağ-el muon nötrinoya geçiş olasılığı $P(\nu_e \to \nu_\mu)$. (b), (a) bölümündeki geçiş olasılığına karşılık gelen dolanıklık entropisi. Belirliyoruz $B_1 \equiv B_\perp = 10^{16}$ G, $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-5}$ eV^2, $\mu_1 = \mu_2 = 10^{-20}$ μB, $P = 1$ MeV.

Şekil 4.6: salınım olasılığı ve entropiyi gösteren, her ikisi de kütle-kare farkı (Δm^2) ve manyetik alan şiddeti ($B_\perp$) tarafından etkilenen iki diyagram içermektedir. Manyetik alanın etkisi altında gerçekleşen nötrino salınım olasılık diyagramı, nötrino spininin dönmesine ve sol-el ile sağ-el durumları arasında geçiş yapmasına neden olmaktadır.

Ayrıca, entropi grafiği, güçlü bir enine manyetik alanın varlığı altında, nötrino spin ve flavor durumları arasındaki dolanıklık derecesini mesafe fonksiyonu olarak göstermektedir. Vakumda nötrino salınımları, kütle özdurumlarının kuantum mekaniksel süperpozisyonu sonucu meydana gelmektedir. Bu süreç, salınım olasılığını belirleyen kütle-kare farkı Δm^2 ve karışım açısı θ tarafından yönetilmektedir. Salınım olasılığı, mesafe L ve nötrino enerjisi E fonksiyonu olarak sinüzoidal bir desen izler. Ancak, bir nötrino dış faktörlerin etkisi altındaki bir ortamda salınım yaptığında, salınım sürecine ek mekanizmalar da katkıda bulunur.

Şimdiye kadar, nötrino salınımlarını etkileyen başlıca dış çevresel faktörlerden biri olarak manyetik alanın etkisi araştırılmıştır. Bu bölümde, farklı manyetik alan değerleri ile nötrino salınımlarının dinamikleri arasındaki ilişki derinlemesine incelenmektedir. Bu amaçla, öncelikle salınım olasılıkları analiz edilecek, ardından değişen manyetik alan şiddetinin etkisi altında salınımların entropisi değerlendirilecektir.

Üç farklı manyetik alan değeri için nötrino salınım olasılıkları ve entropi grafikleri çizilmiştir.



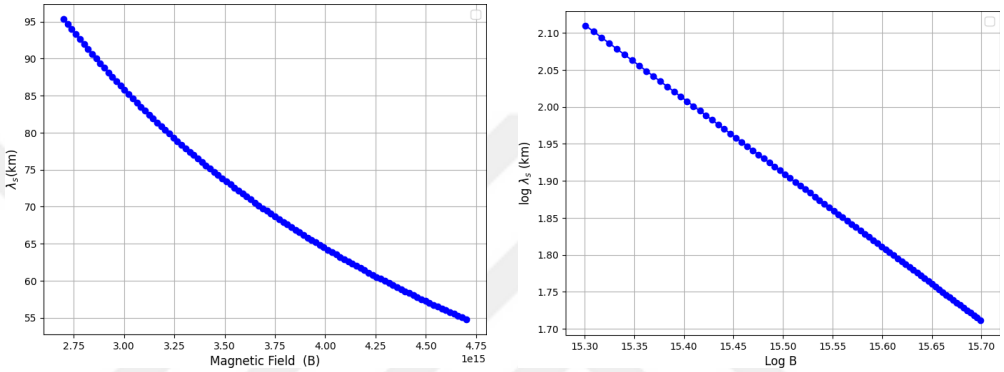
Şekil 4.7: Farklı manyetik alan değerleri için mesafeye bağlı olarak nötrino spin-flavour salınımlarının olasılığı $P(\nu_e \to \nu_\mu)$ ile entropisinin karşılaştırılması $B1 < B2 < B3$, $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-5}$ eV^2, $\mu_1 = \mu_2 = 10^{-20}$ μB, $P = 1$ MeV.

Şekil 4.7:'de gösterildiği gibi, manyetik alan gücü arttıkça ($B1 < B2 < B3$), manyetik alan ile nötrinonun manyetik momenti arasındaki etkileşim güçlenmektedir. Bu durum, salınım periyodunun azalmasına neden olmakta ve salınım dalga boyunun manyetik alan gücüne ters orantılı olduğunu göstermektedir. Sonuç olarak, daha güçlü manyetik alanlar, aynı mesafe aralığında daha sık salınımlara yol açmaktadır; bu durum aşağıdaki denklemle ifade edilmektedir:

$$f = \frac{\mu B}{2\pi} \Longrightarrow f \propto B \tag{4.72}$$

Burada elde edilen sonuçlar, manyetik alan etkisiyle sol el nötrinolarının sağ el nötrinolarına

dönüşümünün hangi mesafede gerçekleştiğini göstermektedir. Ayrıca, bu sonuçlar manyetik alanın nötrino salınım periyotlarını da etkilediğini ortaya koymaktadır. Şekilden görülebileceği üzere, manyetik alan gücü arttıkça salınım periyotları kademeli olarak azalmaktadır. Böyle bir faz kayması ilk kez Aydiner tarafından bildirilmiştir (Aydiner, 2023). Aydiner, deforme Minkowski uzay-zamanında salınım periyodunun zamanla arttığını göstermiştir. Ancak bizim çalışmamızda, dış manyetik alan arttıkça salınım periyotlarının mesafe (yani zaman) ile azaldığı bulunmuştur; bu durum (Aydiner, 2023)'de bildirilen sonuçların aksine gerçekleşmektedir.



Şekil 4.8: Farklı manyetik alan değerleri için artan manyetik alan gücü ile nötrino spin-flavour salınımının yarı periyodunun azalması arasındaki ilişki $B1 < B2 < B3 < \cdots$, $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-5}$ eV^2, $\mu_1 = \mu_2 = 10^{-20}$ μB, $P = 1$ MeV.

Şekil 4.8: (Sol taraf), manyetik alan şiddeti B (x-ekseni) ile nötrino spin-flavor salınımının yarı periyodu λ_s (y-ekseni) arasındaki Deneysel ilişkiyi göstermektedir. Grafikten görüldüğü üzere, λ_s, B arttıkça belirgin şekilde azalmaktadır. Bu eğilim, manyetik alanın güçlenmesiyle birlikte salınım frekansının arttığını göstermektedir. Başka bir deyişle, daha güçlü manyetik etkileşimler spin-flavor geçişlerinin hızını artırmaktadır.

Şekil 4.8: (Sağ taraf) nötrino spin-flavor salınımının yarı periyodu λ_s ile manyetik alan şiddeti B arasındaki kuvvet yasası (power-law) ilişkisini doğrulamak amacıyla logaritmik ölçekli bir grafik sunmaktadır. Log-log düzleminde elde edilen doğrusal davranış, bu iki değişken arasında aşağıdaki gibi bir ilişki olduğunu ortaya koymaktadır:

$$\lambda_s \sim B^{-m} \tag{4.73}$$

Burada m, eğrinin eğimini temsil eder ve deneysel verilerle uyumlu olarak $m = -1$ kabul edildiğinde, yarı periyodun manyetik alan şiddetindeki artışla birlikte ters orantılı olarak azaldığı anlaşılmaktadır. Bu durum, daha güçlü manyetik alanların nötrino salınımlarının

frekansını artırdığını ve dolayısıyla yarı periyodu kısalttığını göstermektedir. Log-log grafikteki doğrusallık, bu ilişkinin incelenen tüm manyetik alan aralığında geçerli olduğunu doğrulamaktadır. Böylece, manyetik alan şiddeti bilindiğinde hem yarı periyot hem de salınım frekansı kesin olarak öngörülebilir hale gelmekte.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, nötrino salınım dinamiği, farklı çevresel koşullar altında kütle çekim ve manyetik alanların etkisi özel olarak incelenmiştir. Bu amaçla, öncelikle nötrino kavramının tarihsel olarak ortaya çıkışı, ardından nötrinoların deneysel olarak tespiti ve elektron, muon ve tau nötrino flavorlerinin keşfi detaylandırılmıştır. Standart Model içindeki nötrinoların yeri, nötrinoların kütlesiz varsayımından kütle kazanmalarına yönelik gelişmeler ve Standart Model'in seesaw mekanizmasıyla nasıl genişletildiği ele alınmıştır. Ayrıca, flavor ve kütle özdurumları arasındaki ilişki PMNS matrisi üzerinden açıklanmış ve flavor karışımının kuantum mekanik temeli ortaya konulmuştur. Devamında, önce vakum ortamında nötrino salınımları incelenmiş ve Schrödinger denkleminin çözümü üzerinden salınım olasılıklarının enerji, kütle farkı ve yol uzunluğuna bağlı olduğu gösterilmiştir. Ardından, nötrinoların madde içerisindeki salınımlarının nasıl değiştiği ele alınmış; özellikle ortamda bulunan elektron yoğunluğunun oluşturduğu etkili potansiyelin, karışım açısı ve etkin kütle farkı gibi salınım parametreleri üzerindeki etkisi detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Son olarak, maddede nötrino salınımı için modifiye edilmiş salınım ifadeleri türetilmiş ve karışım açısı ile etkin kütle farkının yeni tanımları ortaya konulmuştur. Bir sonraki bölümde, ilk olarak genişleyen evreni tanımlayan Friedmann–Robertson–Walker (FRW) metriğinde Dirac denkleminin nasıl değiştiği detaylandırılmış ve nötrino salınımlarının kozmolojik etkilerle zamanla nasıl evrildiği açıklanmıştır. Ardından, Schwarzschild metriğinde—statik ve küresel simetrili bir kütleçekim alanında nötrino salınımlarının nasıl etkilendiği analiz edilmiştir. Radyal ve radyal olmayan yollar için nötrinoların faz değişimleri türetilmiş, özellikle kütleçekim merceklenmesi durumunda farklı yolların girişim etkileri ve kütleçekimsel düzeltmelerin salınım olasılığı üzerindeki etkileri ayrıntılı biçimde hesaplanmıştır. Devamında, kuantum dolanıklık kavramı tanıtılmış ve nötrinoların flavor salınımı sırasında, farklı kütle özdurumlarının faz farklılıkları nedeniyle ortaya çıkan kuantum korelasyonları ile bu korelasyonların dolanık yapılar oluşturduğu gösterilmiştir. Daha sonra, dolanıklık entropisinin özellikle Von Neumann entropisi kullanılarak nasıl ölçüldüğü açıklanmıştır.

Bu temeller doğrultusunda, kütleçekimsel bozulmaların nötrino davranışı üzerindeki etkilerini göstermek amacıyla özellikle Kaluza-Klein metrikleri kullanılarak, eğilmiş ve bozulmuş uzay-zaman yapılarında nötrino salınımları analiz edilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, kütle öz durumları arasında kümülatif ve pozitif yönlü bir faz kaymasının kütleçekimsel alanlar tarafından oluşturulduğunu göstermektedir. Bu birikim, her salınım periyoduyla birlikte giderek artmaktadır; böylece toplam salınım periyodu uzamakta ve nötrino flavor durumları arasındaki dolanıklık desenlerinde belirgin bir zamansal asimetri ortaya çıkmaktadır. Sayısal simülasyonlar, uzay-zamandaki eğrilik ve bozulma derecelerinin artmasının dolanıklık entropusunu da artırdığını ortaya koyarak, kütleçekimsel etkiler ile kuantum bilgi özellikleri arasında önemsiz olmayan bir ilişki olduğunu göstermektedir. Devamında, bu çalışma sabit dış manyetik alanların nötrino salınımları üzerindeki rolünü Dirac çerçevesi kullanarak incelemektedir; burada nötrinoların manyetik momente sahip oldukları varsayılmaktadır. Bu varsayım, elektromanyetik etkiler altındaki spin ve spin-flavor geçişlerinin incelenmesine olanak tanımaktadır ki bu durum, nötron yıldızları, süpernovalar ve erken evren gibi astrofiziksel ortamlar açısından özellikle önemlidir. Nötrino manyetik momenti ile dış manyetik alanın transvers bileşeni arasındaki etkileşim Dirac denklemi içine dâhil edilerek, nötrino spin durumlarının zamanla nasıl evrildiği modellenmiştir.

Güçlü manyetik alanların etkisi altında, salınım periyotlarının belirgin şekilde azaldığı görülmüş; bu durum geçiş dinamiklerini hızlandırmış ve spin ile flavor durumları arasındaki kuantum dolanıklığın derecesini artırmıştır. Özellikle, manyetik alan şiddeti arttıkça von Neumann dolanıklık entropisindeki artış bu durumu açıkça ortaya koymakta; bu da manyetik alan yoğunluğu ile nötrino kuantum durumlarının karmaşıklığı arasında doğrudan bir korelasyon olduğunu göstermektedir.

Bu çalışmanın temel sonuçlarından biri, manyetik alan şiddeti ile salınım yarı-periyodu arasında ters orantılı bir kuvvet kanunu ilişkisi ($\lambda_s \sim B^{-1}$) olduğunun ortaya konmasıdır. Sayısal simülasyonlar ile doğrulanan bu ilişki, manyetik alan yoğunluğundaki küçük artışların dahi salınım davranışında önemli değişikliklere yol açabileceğini göstermektedir. Bu davranış, kütleçekimsel durumla açık bir zıtlık içerisindedir: Kütleçekim alanları zamanla biriken pozitif faz kaymaları üretmekte; bu da salınım periyodunu uzatmakta ve dolanıklık desenlerini daha geniş zaman ölçeklerine yaymaktadır. Öte yandan, manyetik alanlar negatif faz kaymaları üretmekte; bu da salınım döngülerini sıkıştırmakta ve dolanıklığı daha yoğun ve yüksek frekanslı hale getirmektedir. Bu tezin devamında, gelecekteki çalışmalar daha gerçekçi astrofiziksel ortamları simüle etmek amacıyla, zamana bağlı veya dönen kütleçekimsel ve elektromanyetik alanlar altında nötrino salınım dinamiklerinin incelenmesine odaklanabilir.

KAYNAKLAR

Ahluwalia, D. V. and Burgard, C. (1996), 'Gravitationally induced neutrino-oscillation phases.', *Gen. Relativ. Gravit.* **28**, 1161–1170.

Ahluwalia, D. V. and Burgard, C. (1998), 'Interplay of gravitation and linear superposition of different mass eigenstates', *Phys. Rev. D* **57**, 4724–4727.

Akhmedov, E. K., Branco, G. C. and Rebelo, M. N. (2000), 'Seesaw mechanism and structure of neutrino mass matrix', *Phys. Lett. B* **478**, 215–223.

Alavi, S. and Hosseini, S. (2013), 'Neutrino spin oscillations in gravitational fields', *Gravit. Cosmol.* **19**, 129–133.

Alexandre, J. and Clough, K. (2018), 'Black hole interference patterns in flavour oscillations', *Phys. Rev. D* **98**, 043004.

Araki, T., Eguchi, K., Enomoto, S., Furuno, K., Ichimura, K., Ikeda, H., Inoue, K., Ishihara, K., Iwamoto, T., Kawashima, T., Kishimoto, Y., Koga, M., Koseki, Y., Maeda, T., Mitsui, T., Motoki, M., Nakajima, K., Ogawa, H., Owada, K., Ricol, J.-S., Shimizu, I., Shirai, J., Suekane, F., Suzuki, A., Tada, K., Tajima, O., Tamae, K., Tsuda, Y., Watanabe, H., Busenitz, J., Classen, T., Djurcic, Z., Keefer, G., McKinny, K., Mei, D.-M., Piepke, A., Yakushev, E., Berger, B. E., Chan, Y. D., Decowski, M. P., Dwyer, D. A., Freedman, S. J., Fu, Y., Fujikawa, B. K., Goldman, J., Gray, F., Heeger, K. M., Lesko, K. T., Luk, K.-B., Murayama, H., Poon, A. W. P., Steiner, H. M., Winslow, L. A., Horton-Smith, G. A., Mauger, C., McKeown, R. D., Vogel, P., Lane, C. E., Miletic, T., Gorham, P. W., Guillian, G., Learned, J. G., Maricic, J., Matsuno, S., Pakvasa, S., Dazeley, S., Hatakeyama, S., Rojas, A., Svoboda, R., Dieterle, B. D., Detwiler, J., Gratta, G., Ishii, K., Tolich, N., Uchida, Y., Batygov, M., Bugg, W., Efremenko, Y., Kamyshkov, Y., Kozlov, A., Nakamura, Y., Gould, C. R., Karwowski, H. J., Markoff, D. M., Messimore, J. A., Nakamura, K., Rohm, R. M., Tornow, W., Wendell, R., Young, A. R., Chen, M.-J., Wang, Y.-F. and Piquemal, F. (2005), 'Measurement of neutrino oscillation with kamland: Evidence of spectral distortion', *Phys. Rev. Lett.* **94**, 081801.

Aydiner, E. (2023), 'Anomalous cyclic in the neutrino oscillations', *Sci. Rep.* **13**(1), 12651.

Beuthe, M. (2003), 'Oscillations of neutrinos and mesons in quantum field theory', *Phys. Rep.* **375**, 105–218.

Blasone, M., Dell'Anno, F., Siena, S. D. and Illuminati, F. (2009), 'Entanglement in neutrino oscillations', *EPL* **85**, 50002.

Blasone, M., Dell'Anno, F., De Siena, S. and Illuminati, F. (2014), 'A field-theoretical approach to entanglement in neutrino mixing and oscillations', *EPL* **106**(3), 30002.

Capozziello, S., De Laurentis, M. and Verieri, D. (2010), 'Neutrino oscillation phase dynamically induced by $f(r)$ gravity', *Mod. Phys. Lett. B* **25**(14), 1163–1168.

Capozziello, S. and Lambiase, G. (1999), 'Neutrino oscillation in brans-dicke theory of gravity', *Modern Physics Letters A* **14**(31), 2193–2200.

Chakrabarty, H., Chatrabhuti, A., Malafarina, D., Silasan, B. and Tangphati, T. (2023), 'Effects of gravitational lensing by kaluza-klein black holes on neutrino oscillations', *JCAP* **2023**, 13.

Chakraborty, S. (2015), 'Aspects of neutrino oscillation in alternative gravity theories', *JCAP* **10**, 019.

Crocker, R. M., Giunti, C. and Mortlock, D. J. (2004), 'Neutrino interferometry in curved spacetime', *Phys. Rev. D* **69**, 063008.

Danby, G., Gaillard, J. M., Goulianos, K., Lederman, L. M., Mistry, N., Schwartz, M. and Steinberger, J. (1962), 'Observation of high-energy neutrino reactions and the existence of two kinds of neutrinos', *Phys. Rev. Lett.* **9**, 36–44.

Davis, R. (1994), 'A review of the homestake solar neutrino experiment', *Prog. Part. Nucl. Phys.* **32**, 13–32.

Dvornikov, M. (2020), 'Spin effects in neutrino gravitational scattering', *Phys. Rev. D* **101**, 056018.

Erdas, A. and Metzler, Z. (2019), 'Magnetic field effects on neutrino oscillations', *Int. J. Mod. Phys. A* **34**, 23.

Fornengo, N., Giunti, C., Kim, C. W. and Song, J. (1997), 'Gravitational effects on the neutrino oscillation', *Phys. Rev. D* **56**, 1895–1902.

Fukuda, Y., Hayakawa, T., Ichihara, E., Inoue, K., Ishihara, K., Ishino, H., Itow, Y., Kajita, T., Kameda, J., Kasuga, S., Kobayashi, K., Kobayashi, Y., Koshio, Y., Martens, K., Miura, M., Nakahata, M., Nakayama, S., Okada, A., Oketa, M., Okumura, K., Ota, M., Sakurai, N., Shiozawa, M., Suzuki, Y., Takeuchi, Y., Totsuka, Y., Yamada, S., Earl, M., Habig, A., Hong, J. T., Kearns, E., Kim, S. B., Masuzawa, M., Messier, M. D., Scholberg, K., Stone, J. L., Sulak, L. R., Walter, C. W., Goldhaber, M., Barszczak, T., Gajewski, W., Halverson, P. G., Hsu, J., Kropp, W. R., Price, L. R., Reines, F., Sobel, H. W., Vagins, M. R., Ganezer, K. S., Keig, W. E., Ellsworth, R. W., Tasaka, S., Flanagan, J. W., Kibayashi, A., Learned, J. G., Matsuno, S., Stenger, V., Takemori, D., Ishii, T., Kanzaki, J., Kobayashi, T., Nakamura, K., Nishikawa, K., Oyama, Y., Sakai, A., Sakuda, M., Sasaki, O., Echigo, S., Kohama, M., Suzuki, A. T., Haines, T. J., Blaufuss, E., Sanford, R., Svoboda, R., Chen, M. L., Conner, Z., Goodman, J. A., Sullivan, G. W., Mori, M., Hill, J., Jung, C. K., Mauger, C., McGrew, C., Sharkey, E., Viren, B., Yanagisawa, C., Doki, W., Ishizuka, T., Kitaguchi, Y., Koga, H., Miyano, K., Okazawa, H., Saji, C., Takahata, M., Kusano, A., Nagashima, Y., Takita, M., Yamaguchi, T., Yoshida, M., Etoh, M., Fujita, K., Hasegawa, A., Hasegawa, T., Hatakeyama, S., Iwamoto, T., Kinebuchi, T., Koga, M., Maruyama, T., Ogawa, H., Suzuki, A., Tsushima, F., Koshiba, M., Nemoto, M., Nishijima, K., Futagami, T., Hayato, Y., Kanaya, Y., Kaneyuki, K., Watanabe, Y., Kielczewska, D., Doyle, R., George, J., Stachyra, A., Wai, L., Wilkes, J. and Young, K. (1998), 'Measurements of the solar neutrino flux from super-kamiokande's first 300 days', *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1158–1162.

Giunti, C., Kim, C. W., Lee, J. and Lee, U. (1993), 'Treatment of neutrino oscillations without resort to weak eigenstates', *Phys. Rev. D.* **48**, 4310.

Giunti, C., Kouzakov, K., Li, Y.-F. and Studenikin, A. (2024), 'Neutrino electromagnetic properties', *arXiv* .

Gribov, G. and Pontecorvo, B. (1969), 'Neutrino astronomy and lepton charge', *Phys. Lett. B* **28**(7), 493–496.

Grossman, Y. and Lipkin, H. J. (1997), 'Flavor oscillations from a spatially localized source: A simple general treatment', *Phys. Rev. D* **55**(5), 2760.

Guo, X. et al. (2007), 'A precision measurement of the neutrino mixing angle θ_{13} using reactor antineutrinos at daya-bay', *arXiv* **1**, 156.

Horvat, R. and Pisk, K. (1988), 'Neutrino electromagnetic spin-flip interactions in the sun', *Phys. Rev. D;* **38:4**.

Jelley, N., McDonald, A. B. and Robertson, R. G. H. (2009), 'The sudbury neutrino observatory', *Ann. Rev. Nucl. Part. Sci.* **59**, 431–465.

Kayser, B. (2005), 'Neutrino physics', *ECONF C040802:L004,2004* p. 21.

Kim, J. Y. (2015), 'Discovery of neutrino oscillations in the super-kamiokande experiment', *Phys. High Technol.* **24**, 8–17.

King, S. F. (2004), 'Neutrino mass models', *Rept. Prog. Phys.* **67**, 107–158.

King, S. F. (2016), 'Neutrino mass and mixing in the seesaw playground', *Nucl. Phys. B.* **908**, 456–466.

Koranga, B. S. (2012), 'Neutrino oscillation phase shift from quantum gravity', *Int J Theor Phys* **51**, 3688–3693.

Langacker, p., Petcov, S., Steigman, G. and Toshev, s. (1987), 'Implications of the mikheyev-smirnov-wolfenstein (msw) mechanism of amplification of neutrino oscillations in matter', *Nucl. Phys. B.* **282**, 589–609.

Laskin, N. (2000), 'Fractional quantum mechanics', *Phys. Rev. E* **62**, 3135–3145.

Lee, B. W. and Shrock, R. E. (1977), 'Natural suppression of symmetry violation in gauge theories: Muon - lepton and electron lepton number nonconservation', *Phys. Rev. D* **16**, 1444.

Maki, Z., Nakagawa, M. and Sakata, S. (1962), 'Remarks on the unified model of elementary particles', *Prog. Theor. Phys.* **28**(5), 870–880.

Marc, I. and Martin, J. S. (2023), 'Multi-neutrino entanglement and correlations in dense neutrino systems', *Phys. Rev. Lett.* **130**, 221003.

Martin, J. D., Neill, D., Roggero, A., Duan, H. and Carlson, J. (2023), 'Equilibration of quantum many-body fast neutrino flavor oscillations', *Physical Review. D.* **108**, 12.

Metzler, R. and Klafter, J. (2002), 'From stretched exponential to inverse power-law: fractional dynamics, cole–cole relaxation processes, and beyond', *JNCS.* **305**, 81–87.

Miranda, O. and Valle, J. (2016), 'Neutrino oscillations and the seesaw origin of neutrino mass', *Nucl. Phys. B.* **908**, 436–455.

Perlmutter, S., Aldering, G., Goldhaber, G., Knop, R. A., Nugent, P., Castro, P. G., Deustua, S., Fabbro, S., Goobar, A., Groom, D. E. et al. (1999), 'Measurements of ω and λ from 42 high-redshift supernovae', *The Astrophysical Journal* **517**, 565.

Pontecorvo, B. (1957), 'Mesonium and anti-mesonium', *Sov. Phys. JETP* **6**, 429.

Popov, A. and Studenikin, A. (2019), 'Neutrino eigenstates and flavour, spin and spin-flavour oscillations in a constant magnetic field', *Eur. Phys. J. C* **79**, 144.

Raspini, A. (2001), 'Simple solutions of the fractional dirac equation of order 2/3', *Phys. Scr.* **64**, 1.

Ren, J. and Zhang, C.-M. (2010), 'Neutrino oscillations in the kerr–newman spacetime', *Class. Quantum Grav.* **27**(27), 065011.

Riess, A. G., Filippenko, A. V., Challis, P., Clocchiatti, A., Diercks, A., Garnavich, P. M., Gilliland, R. L., Hogan, C. J., Jha, S., Kirshner, R. P. et al. (1998), 'Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant', *The astronomical journal.* **116**, 1009.

Smirnov, A. Y. (2005), 'The msw effect and matter effects in neutrino oscillations', *Phys. Scripta T* **121**, 57–64.

Smirnov, A. Y. (2019), The mikheyev-smirnov-wolfenstein (msw) effect, *in* 'International Conference on History of the Neutrino'.

Sokolov, I. M., Klafter, J. and Blumen, A. (2002), 'Fractional kinetics', *Physics Today* **55**, 48–54.

Suzuki, Y. (2019), 'The super-kamiokande experiment', *Eur. Phys. J. C* **79**, 298.

Swami, H. (2022), 'Neutrino flavor oscillations in a rotating spacetime', *Eur. Phys. J. C* **82**, 974.

Visinelli, L. (2015), 'Neutrino flavor oscillations in a curved space-time', *Gen Relativ Gravit* **47**, 62.

Zhang, C. M. (2000), 'Mass neutrino flavor evolution in space-time with torsion', *Nuovo Cim. B* **115**, 437–444.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Hoda Abdolalizadeh
Dogum Yeri	
Dogum Tarihi	
Uyrugu	☐ T.C. ☒ Diger: Diger
E-Posta Adresi	
Web Adresi	

Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Urmia Üniversitesi
Fakülte	Fen Bilimler Fakültesi
Bölümü	Fizik
Mezuniyet Y l	2007

Yüksek Lisans	
Üniversite	Tahran Bilim ve Araşt rma Üniversitesi
Enstitü Ad	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dal	Fizik Anabilim Dal
Program	Atomik ve moleküler Program
Mezuniyet Tarihi	2011

Doktora	
Üniversite	Istanbul Üniversitesi
Enstitü Ad	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dal	Fizik Anabilim Dal
Program	Yüksek Enerji ve Plazma Fizi Program
Mezuniyet Tarihi	2025

Makale ve Bildiriler

Makaleler

Abdolalizadeh, H. and Aydiner, E. (2024), 'Quantum entanglement between neutrino eigenstates in the presence of the subsequent phase shift of the neutrino oscillations', EPL. 146, 5.