T.C.
İSTANBUL ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DOKTORA TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN POLİHEDRAL OPTİMİZASYON

Sevilay DEMİR SAĞLAM

Matematik Anabilim Dalı

Matematik Programı

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Özkan DEĞER

II. DANIŞMAN
Prof. Dr. Elimhan MAHMUDOV

Nisan, 2017

İSTANBUL

Bu çalışma 21.04.2017 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programında Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Tez Jürisi

Yrd. Doç. Dr. Özkan DEĞER(Danışman)
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Kamuran SAYGILI
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Erhan ÇALIŞKAN
İstanbul Üniversitesi
Fen Fakültesi

Prof. Dr. Ulviye BAŞER ILGAZ
İstanbul Teknik Üniversitesi
Fen-Edebiyat Fakültesi

Doç. Dr. Gülgün KAYAKUTLU
İstanbul Teknik Üniversitesi
İşletme Fakültesi

20.04.2016 tarihli resmi gazetede yayımlanan Lisansüstü Eğitim ve Öğretim Yönetmeliğinin 9/2 ve 22/2 maddeleri gereğince; Bu Lisansüstü teze, İstanbul Üniversitesi'nin abonesi olduğu intihal yazılım programı kullanılarak Fen Bilimleri Enstitüsü'nün belirlemiş olduğu ölçütlere uygun rapor alınmıştır.

ÖNSÖZ

Bu çalışma süresince değerli vaktini ayırıp, bilgi ve tecrübeleri ile beni yönlendiren, her türlü kaynağını, ilgisini, desteğini ve yardımlarını benden esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Prof.Dr. Elimhan MAHMUDOV'a çok teşekkür ederim. Ayrıca genç matematikçilere destek veren, sorduğum her soruya ilgiyle yaklaşan ve bana cesaret veren değerli hocam ve danışmanım Yrd.Doç.Dr. Özkan DEĞER'e de teşekkürlerimi sunmayı bir borç bilirim.

Bu tez çalışmam boyunca Tübitak-Bideb 2211 yurt içi lisansüstü burs programı ile bana maddi destek sağlayan TÜBİTAK'a çok teşekkür ederim.

Bu günlere gelmemi sağlayan, sevgileri ve ilgileri ile hep yanımda olan canım aileme, ilk günden beri göstermiş olduğu sabır ve destek için sevgili eşim Şener SAĞLAM'a sonsuz tesekkürlerimi sunarım.

Nisan, 2017 Sevilay DEMİR SAĞLAM

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

ÖNSÖZ ..... **iv**

İÇİNDEKİLER ..... **v**

ŞEKİL LİSTESİ ..... **vi**

TABLO LİSTESİ ..... **vii**

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ ..... **viii**

ÖZET ..... **ix**

SUMMARY ..... **x**

1. GİRİŞ **1**

2. GENEL KISIMLAR **7**

2.1. BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER 7

2.2. KONVEKS KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER 17

2.3. KONVEKS PROGRAMLAMADA OPTİMALLİK 20

2.4. OPTİMAL KONTROL VE VARYASYON HESABI 22

2.5. DİSKRET VE DİFERANSİYEL İÇERMELİ KONVEKS PROBLEMLER 29

2.5.1. Çalışılan Polihedral Problemlerin Tanıtımı 31

3. MALZEME VE YÖNTEM **33**

4. BULGULAR **34**

4.1. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN POLİHEDRAL DİSKRET VE DİFERANSİYEL İÇERMELİ PROBLEMLER 34

4.1.1. (P_D) Diskret İçermeli Problemin Optimallik Koşulları 34

4.1.2. (P_{DA}) Diskret Yaklaşımlı Problemin Optimallik Koşulları 38

4.1.3. (P_C) Diferansiyel İçermeli Problemin Optimallik Koşulları 42

4.1.4. (P_{C1}) ve (P_{C2}) Diferansiyel İçermeli Sınır-Değer Problemleri 46

4.2. YÜKSEK MERTEBEDEN POLİHEDRAL DİSKRET VE DİFERANSİYEL İÇERMELİ PROBLEMLER 53

4.2.1. (PDs) Diskret İçermeli Problemin Optimallik Koşulları 53

4.2.2. ($PDAs$) Diskret Yaklaşımlı Problemin Optimallik Koşulları 56

4.2.3. (PCs) Diferansiyel İçermeli Problemin Optimallik Koşulları 63

4.3. NÜMERİK UYGULAMA 70

5. TARTIŞMA VE SONUÇ **74**

KAYNAKLAR **78**

ÖZGEÇMİŞ **83**

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No

Şekil 4.1: Örnek 4.3'de verilen ikinci mertebeden polihedral diskret içermeli problemin $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{15}$ optimal yörüngesi. 73

TABLO LİSTESİ

Sayfa No

Tablo 4.1: $\{x_t^*\}_{t=0}^{15}$ eşlenik değişken ve $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{15}$ optimal yörünge değerleri. 73

SİMGE VE KISALTMA LİSTESİ

Simgeler	Açıklama
$\boldsymbol{P(\mathbb{R}^n)}$	: $\mathbb{R}^n$ nin tüm alt kümeleri
$\boldsymbol{\langle \cdot, \cdot \rangle}$	: İç çarpım
$\boldsymbol{int(A)}$	: A kümesinin iç noktaları kümesi
$\boldsymbol{\overline{A}}$	: A kümesinin kapanışı
aff(A)	: A kümesinin afin zarfı
$\boldsymbol{conv(A)}$	: A kümesinin konveks zarfı
$\boldsymbol{\overline{conv}(A)}$	: A kümesinin kapalı konveks zarfı
$\boldsymbol{ri(A)}$	: A kümesinin izafi iç noktaları kümesi
$\boldsymbol{K^*}$	: K konisinin dual konisi
cone (M)	: M kümesinin doğurduğu koni
$\boldsymbol{cone(M - x_0)}$	: M kümesinin x_0 noktasındaki tüm uygun yönler konisi
$\boldsymbol{K_M(x_0)}$	: M kümesinin x_0 noktasındaki teğet konisi
$\boldsymbol{K^0}$	: K konisinin polar konisi
$\boldsymbol{N_K(x_0)}$	: K kümesinin x_0 noktasındaki normal konisi
$\boldsymbol{dom\ f}$	: f fonksiyonunun tanım kümesi
$\boldsymbol{epi\ f}$	: f fonksiyonunun grafiküstü kümesi
$\boldsymbol{\partial f(x_0)}$	: f fonksiyonunun x_0 noktasındaki subdiferansiyel kümesi
$\boldsymbol{W_A(\cdot)}$	: A kümesinin destek fonksiyonu
$\boldsymbol{f^*}$	: f fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu
$\boldsymbol{f^{**}}$	: f fonksiyonunun ikincil eşlenik fonksiyonu
$\boldsymbol{Df(x)(y)}$	: f fonksiyonunun x noktasında y yönündeki yönlü türevi
$\boldsymbol{gphF}$	: F küme değerli dönüşümün grafiği
$\boldsymbol{O^+gphF}$	: F küme değerli dönüşümün resesyon konisi
$\boldsymbol{F^*(\cdot, z)}$	: F küme değerli dönüşümün $z \in gphF$ noktasındaki yerel dual dönüşümü
∎	: İspat bitmiştir

Kısaltmalar	Açıklama
$\mathbf{P_C}$	: Üçüncü Mertebeden Polihedral Diferansiyel İçermeli Problem
$\mathbf{P_{C1}}$	: Üçüncü Mertebeden Polihedral Diferansiyel İçermeli Lagrange Problemi
$\mathbf{P_{C2}}$	: Üçüncü Mertebeden Polihedral Diferansiyel İçermeli Sınır-Değer Bolza Problemi
$\mathbf{P_D}$	: Üçüncü Mertebeden Polihedral Diskret İçermeli Problem
$\mathbf{P_{DA}}$	: Üçüncü Mertebeden Polihedral Diskret Yaklaşım Problemi
$\mathbf{P_L}$	: Üçüncü Mertebeden Polihedral Diferansiyel İçermeli Sınır-Değer Lagrange Problemi
PCs	: Yüksek Mertebeden Polihedral Diferansiyel İçermeli Problem
PDAs	: Yüksek Mertebeden Polihedral Diskret Yaklaşım Problemi
PDs	: Yüksek Mertebeden Polihedral Diskret İçermeli Problem

ÖZET

DOKTORA TEZİ

YÜKSEK MERTEBEDEN POLİHEDRAL OPTİMİZASYON

Sevilay DEMİR SAĞLAM

İstanbul Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Yrd.Doç.Dr. Özkan DEĞER

II. Danışman: Prof.Dr. Elimhan MAHMUDOV

Bu tez çalışmasında, ele alınan diskret ve diferansiyel içermeli bazı özel optimizasyon problemlerinde yörüngenin optimallik koşulları belirlenmiştir. Bu tez çalışmasının ilk kısmında, üçüncü mertebeden (P_D) diskret polihedral problem konveks minimizasyon problemine indirgenerek, (P_D) probleminde $x(t)$ yörüngesinin optimalliği için gerek ve yeter koşullar elde edilmiştir. (P_C) diferansiyel içermeli polihedral problem için yaklaşım metodu kullanılarak diskret yaklaşım probleminin optimallik koşulları verilmiştir. Daha sonra sınır değer kısıtlı polihedral diferansiyel içermeli (P_{C1}) Lagrange probleminde (P_C) probleminin optimallik koşullarının nasıl değiştiği gözlemlenmiştir. Bir uygulama olarak sınır değer koşullu (P_L) probleminde $x(t)$ yörüngesinin optimalliği için, Varyasyon Analizinde önemli bir yere sahip olan Euler-Poisson denklemi elde edilmiştir. Bu tez çalışmasının ikinci kısmında, yüksek mertebeden (PDs) diskret ve (PCs) diferansiyel içermeli polihedral problemlerde optimallik koşulları ifade ve ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda (PDs) diskret polihedral probleminin özel bir hali için nümerik bir örnek verilerek optimal yörünge hesaplanmış ve grafiksel olarak gösterilmiştir.

Nisan 2017, 93 sayfa.

Anahtar kelimeler: Polihedral optimizasyon, diskret içerme, diferansiyel içerme, Euler-Lagrange içermesi, transversallik koşulları.

SUMMARY

Ph.D. THESIS

HIGH ORDER POLYHEDRAL OPTIMIZATION

Sevilay DEMİR SAĞLAM

İstanbul University

Institute of Graduate Studies in Science and Engineering

Department of Mathematics

Supervisor: Asst.Prof.Dr. Özkan DEĞER

Co-Supervisor: Prof.Dr. Elimhan MAHMUDOV

In this thesis, we concern with the necessary and sufficient conditions of optimality for some special polyhedral optimization problems described by polyhedral discrete and differential inclusions. In the first part of the thesis, we reduce third order discrete polyhedral problem (P_D) to convex minimization problem and derive the necessary and sufficient condition for optimality of trajectory $x(t)$. Then we formulate the necessary and sufficient conditions of optimality for discrete-approximation problem by using the approximation method for the continuous polyhedral problem (P_C) described by polyhedral differential inclusions. Then, we observe how to change the optimality conditions of the (P_C) problem in the Lagrange problem (P_{C1}) with boundary value constraint. We demonstrate the applications of these results by solving the problem (P_L) with boundary value constraint and we get the well known Euler-Poisson equation of the Calculus of Variations for optimality of trajectory $x(t)$. In the second part of the thesis, we describe the problems with polyhedral multivalued mappings for higher order(s-th) discrete and differential inclusions and formulate the necessary and sufficient conditions of optimality for these problems. Finally, we develop a numerical approach for solving a polyhedral problem with second order polyhedral discrete inclusions.

April 2017, 93 pages.

Keywords: Polyhedral optimization, discrete inclusion, differential inclusion, Euler-Lagrange inclusion, transversality.

1. GİRİŞ

Optimizasyon, günlük hayattaki problemlerde elde edilebilecek çözüm kümelerinden veya ihtimallerden en iyisini seçmek olarak tanımlanabilir. Matematiksel olarak ise optimizasyon bir reel değerli fonksiyonu minimize ya da maksimize etmek amacı ile reel ya da tamsayı değerlerini, tanımlı bir aralıkta seçip fonksiyona yerleştirerek sistematik olarak bir problemi inceleme veya çözme işlemlerini ifade eder [1].

Optimizasyonda modelleme ve çözümleme iki önemli olgudur. Modelleme gerçek yaşamda karşılaşılan problemin matematiksel olarak ifade edilmesi, çözümleme ise bu modeli sağlayan en iyi çözümün elde edilmesini kapsamaktadır [1]. Optimizasyon teorisinin gelişiminde ilk olarak modellemeyle ilgilenen araştırmacılar, optimizasyon problemlerini çözmek için ise çeşitli metodları tarihten bugüne kadar geliştirmeye çalışmışlardır [2]. Bu metodlardan ilki Newton ve Leibniz tarafından 17. yüzyılda geliştirilen Kalkülüs olmuştur. Daha sonra J.L. Lagrange'ın 1788 yılında Lagrange çarpanları yöntemi olarak bilinen ünlü metodu, optimizasyon problemlerinin çözülmesi için önemli bir atılım başlatmıştır. 1939'da W. Karush'un kısıtlandırılmış problemler için optimallik koşullarını bulması optimizasyon teorisine yeni bir yön kazandırmıştır [3].

1947'de George Dantzig'in özel araştırma ekibinin ortaya koyduğu simpleks algoritması, doğrusal programlama problemlerinin pratik olarak çözümlenmesi için kullanılan ilk algoritmadır. Bu algoritma uygun çözümler kümesi denilen kısıtların oluşturduğu polihedral bölgenin köşelerinin birer uygun çözüm noktası olduğu fikrini benimsemektedir [4]. 1951'de H. Kuhn ve A. Tucker daha önce Karush'un önerdiği kısıtlandırılmış problemler için optimallik koşullarını tekrar formüle ederek doğrusal olmayan programlama modelleri üzerinde çalışmalar yapmışlardır [3]. Amaç fonksiyonu kuadratik fonksiyon olan bir doğrusal olmayan programlama çeşiti olarak bilinen Kuadratik programlama ise 1956'da M. Frank ve P. Wolfe tarafından geliştirilmiştir [5]. 1960'lı yıllar boyunca, diferansiyellenebilir olmayan fonksiyonları da içeren bir çok optimizasyon problemleri ile karşılaşılmıştır. Rockafellar'ın 1972 yılında yayınladığı "Convex Analysis" adlı kitabı optimizasyon teorisinde bugüne

kadarki gelişmelere temel oluşturan ilk etkili yayın olmuştur [6].

Tüm optimizasyon problemlerini çözmek için tek bir metot mevcut değildir. Örneğin lineer programlama için geliştirilen Simpleks yöntem tüm lineer modelleri çözme potansiyeline sahipken lineer olmayan programlama modellerinin hepsini çözebilen genel bir çözüm yolu değildir. Ya da eşitlik kısıtlı lineer olmayan modellere Lagrange çarpanları metodu kullanılırken, eşitsizlik kısıtlı problemlere de Kuhn-Tucker koşulları uygulanmaktadır. Ayrıca bu metodlardan bir kısmı türevi temel alırken diğer kısmı türeve dayalı değildir. Genel olarak türeve dayalı algoritmalar diğerlerine göre optimum sonuca ulaşmada daha başarılı metodlar olsa da, düzgün olmayan analiz yapıları literatürde diferansiyellenebilirliğin geçerli olmadığı durumları da kapsayacağı şekliyle klasik diferansiyel analiz özelliklerinin genişletildiği yapılar olarak karşımıza çıkar. Tüm bu gelişmeler dikkate alındığında genel olarak optimizasyon problemleri doğrusal, doğrusal olmayan programlama problemleri, varyasyon problemleri, optimal kontrol problemleri gibi alt sınıflandırmaları altında incelenir [7].

Varyasyon hesabı, matematiksel analizin bir bölümü olup tümü ile matematiksel olan problemlerle beraber, varyasyonel temel prensiplerle fizik alanında ilişkisi olan problemlere ve birçok mühendislik problemlerinin çözümüne uygulanmaktadır [8]. Bir veya daha fazla değişkene bağlı fonksiyonların maksimum veya minimum değerlerinin bulunması diferansiyel hesabın konusu iken, varyasyon hesabında fonksiyonelleri maksimum veya minimum yapan fonksiyonlar aranır [8]. 1687'de Newton ve 1696'da Johann Bernoulli kardeşler varyasyon hesabının ilk problemi olan Brakistokron probleminin çözümleri ile uğraşmışlardır. Bu problemde iki noktayı birleştiren en kısa zaman eğrisinin belirlenmesi amaçlanmıştır [9]. Daha sonra Euler'in bu konudaki esas çalışmaları ile varyasyon hesabı, kendine mahsus inceleme metotları olan, matematiğin bağımsız bir bölümü haline gelmiştir [10].

Optimal kontrol teorisi, bir dinamik sistemin kontrolü ile ilgili optimal yollar bulmak için geliştirilen matematiğin bir dalıdır [11]. Optimal kontrol teorisinin en güçlü teoremlerinden biri olarak kabul edilen "Pontryagin'in Maksimum Prensibi" optimal kontrol problemlerin çözümü ile ilgili gerek koşulların belirlendiği bir takım sonuçlardan oluşur [9, 12, 13]. Pontryagin'in Maksimum Prensibi ilk olarak 1956 yılında Pontryagin tarafından formüle edilmiş, daha sonra Pontryagin ve öğrencileri

tarafından geliştirilerek bir çok uygulamaları ile optimal kontrol teorisinde önemli bir kilometre taşı olmuştur [14]. Özellikle klasik varyasyon analizindeki sonuçlar başta olmak üzere, optimallik gerek koşulların belirlenmesi süreçlerinin de temel dayanağını oluşturmuştur. Bu prensibin sonuçlarının genelleştirilmesi, farklı problemlere uygulanması ve farklı yöntemler ile ispatlanması gibi bir çok çalışma yapılmış ve yapılmaya devam etmektedir [15, 16, 17].

Mordukhovich'in genelleştirilmiş diferansiyelin temel terimlerinden biri olan subdiferansiyel kavramının tanımını verdiği ve kısıtlı optimizasyon, varyasyon hesabı, optimal kontrol teorisinin çeşitli konularına değindiği, varyasyon analizinde ve uygulama alanında önemli bir yere sahip olan son zamanlarda yayınlanan [18] kitabı bu konuda çalışmalar yapan araştırmacılara hem teori hem uygulama açısından önemli bir kaynak olmuştur.

Küme değerli analiz teorisi, optimal kontrol, diferansiyel oyun teorisi gibi matematiğin bir çok dalında kullanılır [19, 20]. Geniş bir uygulama alanına sahip olan ve bu tez çalışmasında sıklıkla adı geçen diferansiyel içermeler, sağ tarafı küme değerli dönüşüm olan yani küme değerli analizde belirli bir uzayın her bir elemanına diğer bir uzayın belirli bir alt kümesini karşılık getiren diferansiyel denklemlerdir [21]. 1960'lı yıllarda diferansiyel içermeler yardımıyla Cauchy probleminin çözümünün varlığı ve uygun çözüm kümesinin çeşitli topolojik özellikleri incelenmiştir [21, 22].

Küme değerli analiz kavramları yardımı ile, 1970'li yıllarda matematiksel modeli diferansiyel içerme olarak verilen kontrol sistemlerde optimallik koşulları araştırılmıştır [19]. Sonraki yıllarda ise kontrol sistemler için "viability" özellikleri araştırılmıştır ve diferansiyel içermeler diferansiyel oyun teorisinin problemlerinin incelenmesinde kullanılmıştır [21]. Viability problemi, verilen kısıtları sağlayan geçerli (viable) diferansiyel içermenin yörüngesini bulmak olarak ifade edilir [21]. Konveks olmayan durum için ikinci mertebeden diferansiyel içermeli problemlerin ilk viability sonuçları Cernea tarafından sonlu boyutlu durum için çalışılmıştır [23].

Bir çok matematikçi değişik diskret ve diferansiyel içermeli optimizasyon problemleri için optimallik gerek ve yeter koşullarını belirlemek hususunda çeşitli çalışmalar yapmıştır [9, 22, 23, 24]. Bu konuda önde gelen çalışmalar yapan uygu-

lamalı matematiğin büyük ustalarından Ukrayna'lı matematikçi Pshenichnyi'nin [25, 26] kitapları konveks analiz ve ekstremal (minimum, maksimum) problemler için önemli bir kaynak niteliğindedir. Ayrıca [25] kitabında konveks programlama ve küme değerli dönüşümlerle verilen optimal kontrol problemleri için dual dönüşüm kavramını tanımlayarak yeni bir çözüm metodu geliştirmiştir. Diferansiyel içermeli problemlerin optimallik gerek koşullarını 1976'da yayınladığı [27] çalışmasında vermiştir. Daha sonra tanımladığı yerel dual dönüşüm sayesinde optimalliğin gerek koşullarını konveks küme değerli dönüşüm için oluşturmuştur [27].

Pshenichnyi sonlu diskret yaklaşımlar yöntemini kullanarak sürekli problemin optimallik koşullarını oluşturmuştur. Bu yöntemde diferansiyel zamanlı optimizasyon problemine göre belirlenen diskret zamanlı optimizasyon problemi için optimallik koşulları bulunduktan sonra yaklaşım parametreleri üzerinden formal limite geçerek sürekli problemin optimallik koşulları oluşturulmaktadır [25]. Varyasyon problemlerine uygulanan böyle bir yaklaşım yöntemine benzer direkt metodu ilk olarak Leibnitz kullanmıştır. Daha sonra Euler, 1744 yılında varyasyon analizin klasik Euler-Lagrange denklemini bu metodu kullanarak ispatlamıştır [10].

Pshenichnyi'nin doktora öğrencisi olan optimal kontrol teorisinin önemli isimlerinden Azeri matematikçi Elimhan Mahmudov konveks diferansiyel içermeli optimal kontrol problemlerinde dual dönüşüm kavramını kullanarak özel olarak durum kısıtları Goursat-Darboux tipinde, eliptik, hiperbolik ve parabolik diferansiyel içermeli olanları üzerinde ayrı ayrı çalışmalar yapmış ve bu problemlerin optimallik koşullarını vermiştir [28]-[33]. Mahmudov'un ikinci mertebeden diferansiyel içermeli Bolza probleminde yörüngenin optimallik yeter koşulları ve elde edilen sonuçların bir lineer konveks probleme uygulaması Kayakutlu ile beraber [34] çalışmasında mevcuttur. Ayrıca 2011 yılında yayınladığı "Approximation and Optimization of Discrete and Differential Inclusions" adlı kitabı diskret ve diferansiyel içermeli optimizasyon problemleri üzerinde çalışmalar yapan bir çok araştırmacıya yön gösterici niteliktedir [35]. Mahmudov bu kitabında konveks analizin temel kavramları dışında yerel dual küme değerli dönüşümleri, diskret ve diferansiyel içermelerle verilen konveks programlama problemler için ve hatta konveks olmayan problemler için optimallik koşullarını vermiştir [35]. Son zamanlarda ise Mahmudov yüksek mertebeden konveks hatta konveks olmayan problemler için yörüngenin optimallik koşullarını araştırmaktadır

[36, 37, 38].

Bu tez çalışmasında diskret ve diferansiyel içermeli problemler için çözümün varlığı ile ilgilenilmediğinden, optimal çözümün var olduğu kabul edilmektedir. Varlık problemleri için Smirnov'un [21] kitabına ve onun referanslarına bakılabilir. Haddad ve Yarou'nun [39] çalışmasında ise sonsuz boyutlu uzayda ikinci mertebeden konveks olmayan diferansiyel içermeli problemler için varlık problemleri araştırılmıştır.

Bu çalışmada amaç ele aldığımız bazı özel polihedral problemlerin optimallik gerek ve yeter koşullarını belirlemektir. Çalıştığımız problemlerdeki sistemler küme değerli, özel olarak polihedral olan, bir dönüşüm yardımı ile verilmiştir. Polihedral fonksiyon ve polihedral küme değerli dönüşümlerle çalışmak, özel olarak dönüşüm kapalı ve konveks olacağı için konveks analizde önemli bir yere sahiptir [40, 41, 42].

Genel kısımlar bölümünde çalışmanın daha iyi anlaşılması için öncelikle konveks analize ait gerekli tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca konveks küme değerli dönüşümlerin temel özellikleri incelendikten sonra konveks programlamada kullanılan optimallik teoremleri [5, 6, 35, 43, 44] kaynaklarından faydalanılarak ifade edilmiştir. Daha sonra optimal kontrol teorisinin önemli bir ilkesi olan Pontryagin Maksimum Prensibi Teoremi, varyasyon hesabının en sade problemi için Euler denklemi ve Pontryagin'in Maksimum İlkesini kullanılarak Weierstrass eşitsizliğinin ispatı verilmiştir [8]. Son olarak bu kısımda çalıştığımız problemlere temel olan bazı diskret ve diferansiyel içermeli polihedral problemler tanıtılmıştır.

Bulgular kısmında çalıştığımız üçüncü mertebeden (P_D) diskret ve (P_C) diferansiyel içermeli polihedral optimizasyon problemlerinin optimallik koşullarını belirlemek hususunda, bu tip problemleri geometrik kısıtlı polihedral minimizasyon problemlerine indirgeyerek ilk kez Clarke tarafından kullanılan Mayer problemi için verilen polihedral Euler-Lagrange içermeleri ve transversallik koşulları, ele alınan problemler için ayrı ayrı bulunarak ispat edilmiştir [45]. Bu problemlerde hem diskret ve hem de diferansiyel içermesini sağlayan Cauchy başlangıç koşulları altında Bolza fonksiyonelini minimum yapan yörüngenin optimallik koşulları ifade edilmiştir.

(P_C) problemlerinde kısıt koşullarından olan Cauchy koşulları yerine sınır-değer

koşulları ve Bolza fonksiyoneli yerine Lagrange fonksiyoneli alındığında elde edilen üçüncü mertebeden polihedral diferansiyel içermeli (P_{C1}) probleminde optimallik yeter koşulları verilmiştir. Sınır değer koşulları altında Bolza fonksiyonelli amaç doğrultusunda değişen transversallik koşulları belirlenmiştir. Elde edilen tüm bu sonuçlar doğrultusunda iki uygulama yapılmıştır. İlk olarak sınır değer koşullu (P_L) problemi için varyasyon analizinde önemli bir yere sahip olan Euler-Poisson denklemi yörüngenin optimalliği için gerek koşul olduğu gösterilmiştir. Ayrıca üçüncü mertebeden lineer diferansiyel içermeli kontrol parametreli problem için transversallik ve Weierstrass-Pontryagin koşulları verilmiştir.

Ele aldığımız problemlerin bir genellemesi olarak, keyfi s. mertebeden, yüksek mertebeden polihedral diskret ve diferansiyel içermeli problemlerle çalışılmıştır. (PDs) ve (PCs) şeklinde gösterdiğimiz yüksek mertebeden polihedral diskret ve diferansiyel içermeli Cauchy problemlerinde yörüngenin optimallik koşulları ispatlanmıştır. Ayrıca sınır değer problemi için transversallik koşulları elde edilmiştir.

Son olarak çalışılan yüksek mertebeden diskret içermeli problemler için bazı özel değerler alarak ikinci mertebeden diskret içermeli nümerik bir örnekle optimal yörünge hesaplanmış ve grafiksel olarak gösterilmiştir.

Böylece çalıştığımız yüksek mertebeden polihedral optimizasyon problemleri için optimallik koşulları belirlenmiş ve ispat edilmiştir. Elde edilen bulguların daha sonraki aşamalarda kullanılması ve literatüre katkısı hakkındaki görüş ve yorumlar Tartışma ve Sonuç başlığı altında verilmiştir.

2. GENEL KISIMLAR

2.1. BAZI TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde konveks küme ve fonksiyonların bu tez çalışması için gerekli olan bazı temel tanım ve özellikleri verilecektir. Bu kısımdaki bilgiler [5, 6, 35, 43, 44, 46] kaynaklarından alınmıştır.

$\mathbb{R}^n$ uzayındaki $x_1, \ldots, x_m$ vektörlerinin *afin kombinasyonu* $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ skalerler ve $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ olmak üzere $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ şeklinde tanımlanır. Herhangi iki elemanının afin kombinasyonunu içeren kümeye *afin küme* denir, açıkca

$$\forall\, x_1, x_2 \in A, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ için } \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$$

gerçekleniyorsa A kümesi bir afin kümedir [44, s.5]. Boş küme afin küme olarak kabul edilir. Herhangi sayıda afin kümenin kesişimi yine bir afin küme olduğu açıktır [44, Theorem 1.2.3, s.7]. Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesini kapsayan tüm afin kümelerin arakesitine A kümesinin *afin zarfı* denir ve aff(A) ile gösterilir. Ayrıca aff(A) kümesi A kümesini içeren en küçük afin kümedir. $\mathbb{R}^n$, A kümesini kapsayan bir afin küme olduğu için aff$(A) \neq \emptyset$ dır [44, s.7].

Herhangi iki noktası arasındaki doğru parçasını kapsayan, yani

$$x_1, x_2 \in A,\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \text{ için } \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in A$$

gerçekleyen $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine *konveks küme* denir. $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0,\ \lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$ olmak üzere $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ toplamına $x_1, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$ noktalarının *konveks kombinasyonu* denir [43, s.35].

Teorem 2.1. [6, Theorem 2.2, s.11] A konveks bir küme ve $x_1, \ldots, x_m \in A$ ise bu noktaların her konveks kombinasyonu A kümesine aittir.

Herhangi bir $A \subseteq R^n$ kümesini kapsayan tüm konveks kümelerin arakesitine A kümesinin *konveks zarfı* denir ve $conv(A)$ ile gösterilir. Benzer şekilde A kümesini kapsayan tüm kapalı konveks kümelerin arakesitine A kümesinin *kapalı konveks zarfı* denir ve $\overline{conv}(A)$ ile gösterilir. Açıktır ki $conv(A)$ ve $\overline{conv}(A)$ kümeleri konvekstir [6, s.12].

Lemma 2.1. [6, Theorem 2.3, s.12] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesinin konveks zarfı olan $conv(A)$ kümesi A kümesine ait olan noktaların tüm konveks kombinasyonlarını içerir.

Herhangi bir kümenin konveks zarfının her bir noktasının bu kümenin noktalarının konveks kombinasyonu olarak yazılabildiği Lemma 2.1'den anlaşılmaktadır [44, s.55]. n boyutlu bir kümenin konveks zarfının her bir noktası, bu kümenin en fazla $n+1$ noktasının konveks kombinasyonu olarak ifade edilebildiği aşağıdaki ünlü Caratheodory Teoremi'nde verilmektedir.

Teorem 2.2. [44, Caratheodory's Theorem 2.2.4, s.55] r-boyutlu A kümesi verildiğinde her $x \in conv(A)$ için öyle $x_1, \ldots, x_m \in A$ noktaları vardır ki her $i = 1, \ldots, m$ için $\lambda_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ ve $m \leq r+1$ olmak üzere $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_m x_m$ dir.

Diğer bir ifade ile $conv(A)$ konveks kümesinin her bir elemanı r-boyutlu A kümesinin en fazla $r+1$ noktasının konveks kombinasyonu olarak ifade edilir [44, s.55].

A kümesinin tüm iç noktaları kümesi olan $int(A)$, A kümesinin hangi uzayın alt kümesi olarak düşünüldüğüne göre değişmektedir [44, s.37]. Bu nedenle konveks kümelerde kümenin içi kavramı yerine daha uygun olan izafi iç kavramı kullanılmaktadır. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere, izafi iç noktalardan oluşan kümeye A kümesinin *izafi içi* denir ve $ri(A)$ ile gösterilir. Açıkça,

$$ri(A) = \{x \in \text{aff}A : \exists\, \delta > 0 \text{ için } B(x, \delta) \cap \text{aff}A \subseteq A\}$$

olarak tanımlanır. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ise $ri(A) \neq \emptyset$ dır [44, Theorem 2.3.1, s.61].

$0 \neq a \in \mathbb{R}^n$ ve $b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $H = \{x : \langle x, a\rangle = b\}$ hiperdüzlemi verilsin. Bu durumda,

$$H^+ = \{x : \langle x, a\rangle \geq b\} \quad , \quad H^- = \{x : \langle x, a\rangle \leq b\}$$

kümelerine H hiperdüzlemine karşılık gelen sırasıyla *pozitif ve negatif kapalı yarı-uzaylar*,

$$int(H^+) = \{x : \langle x, a\rangle > b\}, \quad int(H^-) = \{x : \langle x, a\rangle < b\}$$

kümelerine ise H hiperdüzlemine karşılık gelen *açık yarı-uzaylar* denir [5, s.27].

Tanım 2.1. [35, Definition 1.17, s.22] Bir $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi, eğer sonlu sayıdaki kapalı yarı-uzayın kesişimi olarak ifade edilebiliyorsa ya da denk olarak $i = 1, \ldots, m$ için

$b_i \in \mathbb{R}^n$ ve $\alpha_i \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\langle x, b_i \rangle \leq \alpha_i \tag{2.1}$$

biçimdeki sonlu sayıda eşitsizlikler sisteminin çözümü ise A kümesine *polihedral küme* denir.

Polihedral kümeler konveks kümelerin önemli bir alt sınıfıdır. Polihedral kümeler kapalı ve konveks olduğu için konveks optimizasyon teorisinde önemli özelliklere sahiptir. $\emptyset$ ve $\mathbb{R}^n$ birer polihedral kümedir. Sınırlı bir polihedral kümeye ya da eşdeğer olarak sonlu noktalı bir kümenin konveks zarfına *politop* denir [35, s.22].

$K \subseteq \mathbb{R}^n$, her $x \in K$ ve her $\lambda > 0$ için $\lambda x \in K$ ise K kümesine *koni* denir. Eğer $\forall\ x_1, x_2 \in K$, $\forall\ \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ için $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 \in K$ ise $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesine *konveks koni* denir. K bir koni olmak üzere her $x \in K$ için $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ gerçekleyen $x^* \in \mathbb{R}^n$ vektörlerinin kümesine K konisinin *dual konisi* denir ve K^* ile gösterilir. Açıkça dual koni

$$K^* = \{x^* \in \mathbb{R}^n :\ \langle x, x^* \rangle \geq 0\ , \quad \forall\ x \in K\}$$

şeklinde tanımlanır [35, s.15]. Dual koniler daima kapalıdır [35, Lemma 1.12, s.15].

Lemma 2.2. [35, Lemma 1.13, s.15] Bir K konisi ve onun $\overline{K}$ kapanış konisi aynı dual koniye sahiptir.

Lemma 2.3. [35, Lemma 1.14, s.15] Bir K kapalı konisi verildiğinde her $x^* \in K^*$ için $\langle x, x^* \rangle \geq 0$ gerçekleniyorsa $x \in K$ olur.

Dual koniler daima kapalı olduğundan, kapalı olmayan bir koninin dual konisinin duali kendisine eşit olamaz. Bu sebeple dualinin duali kendisine eşit olabilecek koniler yalnızca kapalı konilerdir. Bu gerçek aşağıdaki lemma ile verilmektedir.

Lemma 2.4. [35, Lemma 1.15, s.16] K konisi kapalı ise $K^{**} = K$ eşitliği geçerlidir.

$K^* = (\overline{K})^*$ eşitliğinde her iki tarafın duali alınırsa $K^{**} = (\overline{K})^{**} = \overline{K}$ olup $K^{**} = \overline{K}$ eşitliği tüm K konileri için gerçeklenir [35, s.16].

Lemma 2.5. [35, Lemma 1.16, s.16] K_1 ve K_2 herhangi iki konveks koni olsun. $K_1 + K_2$ toplamı da konveks konidir ve $(K_1 + K_2)^* = K_1^* \cap K_2^*$ dir.

Lemma 2.6. [35, Lemma 1.17, s.17] K_1 ve K_2 kapalı koniler olmak üzere $(K_1 \cap K_2)^* = \overline{K_1^* + K_2^*}$ dir.

Tanım 2.2. $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ olmak üzere M kümesinin elemanlarının tüm negatif olmayan kombinasyonlarının kümesine, yani $cone(M) = \{\lambda x \in R^n : \forall x \in M, \forall \lambda \geq 0\}$ kümesine M kümesinin *doğurduğu koni*, $x_0 \in M$ olmak üzere $cone(M - x_0)$ kümesine M kümesinin x_0 noktasındaki *tüm uygun yönler kümesi*, $K_M(x_0)$ ile gösterilen $K_M(x_0) = cl(cone(M - x_0))$ şeklinde tanımlanan koniye ise M kümesinin x_0 noktasındaki *teğet konisi* denir [46, s.65].

$K_M(x_0)$ orijini içeren konveks bir konidir [46, s.65].

Tanım 2.3. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ bir konveks koni olmak üzere $K^0 = \{x^* \in \mathbb{R}^n : \forall x \in K \text{ için } \langle x^*, x\rangle \leq 0\}$ kümesine *polar koni* denir. $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kapalı bir küme ve $x_0 \in K$ olmak üzere $N_K(x_0) = (cone(K - x_0))^0$ konisine, K kümesinin x_0 noktasındaki *normal konisi* denir. Başka bir ifade ile normal koni

$$N_K(x_0) = \{v \in \mathbb{R}^n : \forall x \in K \text{ için } \langle v, x - x_0\rangle \leq 0\}$$

şeklinde tanımlanır [46, s.65].

İç çarpımın sürekliliğinden ötürü polar koni konveks kapalı bir konidir [6, s.222]. Normal koni teğet koninin, teğet koni normal koninin polarıdır. Bu önemli özellik aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.3. [46, Proposition 5.2.4, s.66] $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $x_0 \in M$ olsun. O halde

$$N_M(x_0) = \big(K_M(x_0)\big)^0$$

gerçeklenir.

Konveks konilerin duallerini hesaplarken kullanacağımız bazı önemli teoremler aşağıda verilmektedir.

Teorem 2.4. [35, Theorem 1.10, s.17] $K_1, K_2, \ldots, K_m$ konveks koni olmak üzere $K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_m = \emptyset$ olması için gerek ve yeter koşul hepsi birden sıfır olmayan $x_1^* + x_2^* + \cdots + x_m^* = 0$ eşitliğini sağlayan öyle bir $x_i^* \in K_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ vektörlerinin var olmasıdır.

Teorem 2.5. [35, Theorem 1.11, s.18] $K_1, K_2, \ldots, K_m$ konveks koni ve $K = K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_m$ olsun. Eğer $K_1 \cap intK_2 \cap \cdots \cap intK_m \neq \emptyset$ ise

$$K^* = K_1^* + K_2^* + \cdots + K_m^*$$

gerçeklenir.

Teorem 2.6. [35, Theorem 1.12, s.20] $K_1, K_2, \ldots, K_m$ konveks koni ve $K = K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_m$ olsun. O halde ya $K^* = K_1^* + K_2^* + \cdots + K_m^*$ eşitliği ya da hepsi birden sıfır olmayan öyle $x_i^* \in K_i^*$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ vektörleri vardır ki $x_1^* + x_2^* + \cdots + x_m^* = 0$ eşitliği sağlanır.

Polihedral küme tanımında verilen (2.1) sonlu sayıdaki eşitsizlikler sistemi homojen yani $i = 1, \ldots, m$ için $b_i \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\langle x, b_i \rangle \leq 0$ ise bu formdaki sonlu sayıda homojen eşitsizlik sisteminin çözüm kümesine *polihedral konveks koni* denir [35, s.22].

Teorem 2.7. [35, Farkas's Theorem 1.13, s.22] K polihedral konisi $x_i^* \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\langle x, x_i^* \rangle \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$ şeklindeki lineer homojen eşitsizlik sistemi ile verilsin. O halde K^* dual konisi polihedraldir ve

$$x^* = \sum_{i=1}^{m} \gamma_i x_i^* \ , \ \gamma_i \geq 0$$

şeklinde elemanlardan oluşur.

Teorem 2.8. [35, Lemma 1.22, s.23] $K_1, K_2, \ldots, K_m$ polihedral koniler ise

$$(K_1 \cap K_2 \cap \cdots \cap K_m)^* = K_1^* + K_2^* + \cdots + K_m^* \quad \text{dır.}$$

Konilerin temel özelliklerine değindikten sonra çalışmanın iyi anlaşılması için konveks fonksiyonlarla ilgili gerekli bazı tanım ve teoremler aşağıda verilmektedir.

$f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ fonksiyonunun *tanım kümesi* $domf = \{x : \ f(x) < +\infty\}$ ile verilir. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f(x) \leq \alpha$ gerçekleyen tüm $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$ nokta çiftlerinden oluşan kümeye f fonksiyonunun *grafiküstü kümesi* denir ve $epif = \{(x, \alpha) : \ f(x) \leq \alpha\}$ ile gösterilir. Burada $x \in domf$ olduğunda $(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1}$ noktası $epif$ kümesine ait olur. Ancak $f(x) = +\infty$ ise $f(x) \leq \alpha$ gerçekleyen α noktası yoktur. f fonksiyonunun grafiküstü kümesi ile f fonksiyonu belirlenebilir, şöyleki

$$f(x) = \inf_{\alpha} \{\alpha : \ (x, \alpha) \in epif\} \tag{2.2}$$

dir. (2.2) formülünden görülebileceği üzere R^{n+1} uzayındaki kümeler ile R^n uzayındaki fonksiyonlar arasında yakın bir ilişki vardır [35, s.25].

f fonksiyonunun $epif$ kümesi konveks ise f fonksiyonuna *konveks fonksiyon* denir [35, Definition 1.18, s.25]. $-\infty$ değerini almayan ve özdeş olarak da $+\infty$ değerine eşit

olmayan bir f fonksiyonuna *proper* ya da *has fonksiyon* denir [35, Definition 1.19, s.25]. Eğer $-f$ fonksiyonu konveks bir fonksiyon ise f fonksiyona *konkav fonksiyon* denir [43, Definition 1.2, s.88].

Lemma 2.7. [35, Lemma 1.23, s.25] f has fonksiyonunun konveks olabilmesi için gerek ve yeter koşul her x_1, x_2 için $\lambda_1 \geq 0$ ve $\lambda_2 \geq 0,\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1$ olmak üzere

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) \tag{2.3}$$

olmasıdır.

A konveks kümesinin bir $x^* \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki *destek fonksiyonu*

$$W_A(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle :\ x \in A\} \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. A konveks kümesinin bir $x^* \in \mathbb{R}^n$ noktasındaki destek fonksiyonu konveks bir fonksiyondur [6, s.28].

$\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümesinin indikatör fonksiyonu

$$\delta_M(x) = \begin{cases} 0 & ,\ x \in M \\ +\infty & ,\ x \notin M \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır ve $\delta_M(x)$ indikatör fonksiyonu konveks bir fonksiyondur [6, s.28].

Tanım 2.4. [35, Definition 1.26, s.36] $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere $f^*(x^*) = \sup_x \{\langle x, x^* \rangle - f(x)\}$ şeklinde tanımlanan $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun *eşlenik fonksiyonu* denir.

Lemma 2.8. [35, Lemma 1.31, s.36] $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eşlenik fonksiyonu daima kapalı ve konvekstir.

f^* eşlenik fonksiyonunun da eşlenik fonksiyonundan bahsetmek mümkündür. İkincil eşlenik fonksiyon denilen ve f^{**} ile gösterilen bu fonksiyon da daima konvekstir ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.5. $f^{**} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere $f^{**}(x) = \sup_{x^*} \{\langle x^*, x \rangle - f^*(x^*)\}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun *ikincil eşlenik fonksiyonu* denir.

Tanım 2.4 'den her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f(x) \geq \langle x, x^* \rangle - f^*(x^*)$ olduğundan x^*'lar üzerinden supremum alınırsa

$$f(x) \geq f^{**}(x) \tag{2.5}$$

eşitsizliği bulunur [35, s.37]. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu daima kapalı ve konveks fonksiyon olduğu Lemma 2.8 'de verilmişti. Her $x \in \mathbb{R}^n$ için $f^{**}(x) = f(x)$ olabilmesi için f fonksiyonunun kapalı ve konveks olması gerekmektedir [35, Theorem 1.21, s.37].

Her konveks fonksiyon sürekli değildir. Ancak konveks fonksiyonun tanım kümesi açık küme ise bu küme içerisindeki her noktada fonksiyon süreklidir. Bu önemli özellik ise aşağıdaki teorem ile verilmektedir.

Teorem 2.9. [44, Theorem 5.5.1, s.224] Boştan farklı her açık konveks küme üzerinde tanımlı her konveks fonksiyon süreklidir.

Böylece $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks küme olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonu A kümesinin her izafi iç noktasında süreklidir [43, Remark 1.4, s.99].

$A \subseteq \mathbb{R}^n$ bir küme ve $f : A \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bir fonksiyon olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ gerçekleyen her (x_n) dizisi için

$$f(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna $x_0 \in A$ noktasında *alttan yarı sürekli* denir [6, s.51].

Teorem 2.10. [6, Theorem 7.1, s.51] f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de tanımlı herhangi bir fonksiyon olmak üzere aşağıdakiler denktir:

i) f, R^n uzayında alttan yarı sürekli bir fonksiyondur.

ii) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $L_\alpha(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \leq \alpha\}$ şeklinde tanımlanan seviye kümesi kapalıdır.

iii) $epif = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ f(x) \leq \alpha\}$ grafiküstü kümesi kapalıdır.

$\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olmak üzere $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu A üzerinde ne zaman konveks ve türevlenebilirdir ve gradienti ∇f hakkında ne söylenebileceğini ve ayrıca f fonksiyonu A üzerinde türevlenebilir ise, fonksiyonun konveksliği ∇f ile nasıl karakterilize edilebileceği aşağıda yer alan iki teoremde verilmektedir.

Teorem 2.11. [46, Theorem 4.4.1, s.110] $A \subseteq \Omega$ konveks bir küme olmak üzere f fonksiyonu bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde türevlenebilir olsun. f fonksiyonunun

A üzerinde konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall\, x, x_0 \in A$ için

$$f(x) \geq f(x_0) + \langle \nabla f(x_0),\ x - x_0 \rangle$$

eşitsizliğinin gerçeklenmesidir.

Teorem 2.12. [46, Theorem 4.1.4, s.112] $A \subseteq \Omega$ konveks bir küme olmak üzere f fonksiyonu bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde türevlenebilir olsun. f fonksiyonunun A üzerinde konveks olması için gerek ve yeter koşul ∇f gradient vektörünün monoton olmasıdır.

Burada ∇f gradient vektörünün monoton olması $\forall\ x, x_0 \in A$ için $\langle f(x) - f(x_0), x - x_0 \rangle \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanması anlamına gelmektedir [46, s.112].

Yukarıda verilen teoremlerden de anlaşılacağı üzere bir konveks fonksiyon etkin tanım kümesinin iç noktalarının çoğu üzerinde türevlenebilir olsa da bu kümenin tamamı üzerinde türevlenebilir olmak zorunda değildir. Bir fonksiyonunun üzerinde türevlenebilir olduğu en geniş küme tanım kümesinin içidir. Aslında bir Ω açık kümesi üzerinde yerel Lipschitz olan bir fonksiyon Ω açık kümesinin hemen hemen her noktasında türevlenebilirdir [46, s.115]. Konveks fonksiyonlar Lipschitz sürekli olduklarından aşağıdaki teorem yazılabilir.

Teorem 2.13. [46, Theorem 4.2.3, s.115] f konveks fonksiyonu için $intdom f$ kümesinin, fonksiyonun türevlenemediği noktalardan oluşan alt kümesinin Lebesgue ölçümü sıfırdır.

Türevlenebilir bir fonksiyonun konveks olup olmadığını belirlemenin en kullanışlı yollarından biri ikinci türevini kullanmaktır.

Tanım 2.6. $Q_{n\times n}$ simetrik matrisine her $x \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ için $\langle x,\ Qx \rangle > 0$ koşulunu sağlıyorsa *pozitif tanımlı matris* eğer $x \in \mathbb{R}^n$ için $\langle x,\ Qx \rangle \geq 0$ koşulunu sağlıyorsa *pozitif yarı tanımlı matris* denir. Benzer şekilde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonu açık bir $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ kümesi üzerinde ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$H(x) = \Big(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x)\Big), \quad i, j = 1, 2, \ldots, n$$

şeklinde tanımlanan Hessian matrisinin asal minör değerleri negatif değil ise H matrisine *pozitif yarı tanımlı*, asal minör değerlerinin hepsi pozitif ise H matrisine *pozitif tanımlı* denir [43, s.110].

Teorem 2.14. [43, Theorem 3.3, s.110] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks küme, $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olsun ve $Q_{n\times n}$ reel simetrik matrisi verilsin.

i) Her $x \in A$ için $H(x)$ Hessian matrisi pozitif yarı tanımlı ise f, A kümesi üzerinde konveks fonksiyondur. Benzer şekilde her $x \in A$ için $H(x)$ Hessian matrisi pozitif tanımlı ise f, A kümesi üzerinde kesin konvekstir.

ii) $A = \mathbb{R}^n$ ve f konveks ise, her $x \in A$ için $H(x)$ Hessian matrisi pozitif yarı tanımlıdır.

iii) $f(x) = \langle x, Qx\rangle$ kuadratik fonksiyon ve Q simetrik matris olmak üzere f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul Q simetrik matrisinin pozitif yarı tanımlı olmasıdır. Benzer şekilde f fonksiyonunun kesin konveks olması için gerek ve yeter koşul Q simetrik matrisinin pozitif tanımlı olmasıdır.

Yukarıda verilen teoremde türevli fonksiyonlar için konvekslik kriterleri verilmiştir. Konveks fonksiyon her zaman türevli olmayabilir ancak yöne göre türevi daima vardır [21, Theorem 1.12, s.24] .

Tanım 2.7. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme üzerinde tanımlı reel değerli f fonksiyonu verilsin. f fonksiyonu $x \in \Omega$ noktasında i. *kısmi türevi* $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ile gösterilir ve e_i birim vektör olmak üzere

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x + \lambda e_i) - f(x)}{\lambda}$$

şeklinde tanımlanır.

e_i birim vektör yerine keyfi $y \in \mathbb{R}^n$ vektörü alınırsa f fonksiyonunun x noktasında y yönündeki *yönlü türevi* elde edilir ve

$$Df(x)(y) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} \tag{2.6}$$

ile tanımlanır. Bu tanımdan hareketle f fonksiyonunun e_i birim vektör yönünde x noktasındaki yönlü türevi, f fonksiyonun i. kısmi türevi olduğu sonucu elde edilir [44, s.225].

Teorem 2.15. [21, Theorem 1.12, s.24] f has konveks fonksiyon ve $x \in domf$ olsun. O halde her $y \in \mathbb{R}^n$ için $Df(x)(y)$ yönlü türevi vardır ve $Df(x)(y)$ yönlü türevi pozitif homojen konveks fonksiyondur.

Tanım 2.8. $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık küme üzerinde tanımlı reel değerli f fonksiyonu için öyle $x^* \in \mathbb{R}^n$ vektörü vardır öyle ki

$$\lim_{u \to 0} \frac{f(x+u) - f(x) - \langle x^*, u \rangle}{||u||} = 0$$

denklemi sağlanıyorsa f fonksiyonu $x \in \Omega$ noktasında *diferansiyellenebilirdir* denir. Burada x^* vektörü, f fonksiyonunun x noktasındaki gradient vektörüdür [44, s.227].

Teorem 2.16. [44, Theorem 5.5.3, s.228] $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ açık konveks küme üzerinde tanımlı f fonksiyonu konveks bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu $x \in \Omega$ noktasında tüm kısmi türevlere sahip ise x noktasında f fonksiyonu diferansiyellenebilirdir.

Tanım 2.9. f has konveks fonksiyon olmak üzere, her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(x) - f(x_o) \ \geq \ \langle x - x_0, \ x^* \rangle$$

eşitsizliğini gerçekleyen x^* vektörüne f fonksiyonunun $x_0 \in domf$ noktasındaki *subgradienti* denir. f has konveks fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki subgradientlerinin kümesine f fonksiyonunun x_0 noktasındaki *subdiferansiyeli* denir ve

$$\partial f(x_0) = \{x^* : f(x) - f(x_o) \ \geq \ \langle x - x_0, x^* \rangle \ , \forall \ x \in \mathbb{R}^n\}$$

ile gösterilir. Eğer $\partial f(x_0)$ kümesi boştan farklı ise f fonksiyonuna x_0 noktasında *subdiferansiyellenebilir* denir [21, s.25].

f fonksiyonunun x_0 noktasındaki subdiferansiyeli $\partial f(x_0)$ kümesi kapalı konveks bir kümedir ve ayrıca f konveks ise $\partial f(x_0) \neq \emptyset$ dır [21, s.27].

Teorem 2.17. [21, Theorem 1.14, s.26] $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks küme üzerinde tanımlı f konveks fonksiyon ve $x \in int(A)$ olsun. O halde f fonksiyonunun x noktasında diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun x noktasında *tek bir* subgradient vektörüne sahip olmasıdır.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konveks bir küme olmak üzere subdiferansiyel tanımından

$$\partial\big(\alpha f\big)(x) = \alpha \partial f(x) \ , \quad \forall \ \alpha > 0$$

eşitliği gerçeklenir. Ayrıca $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ve $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ iki konveks fonksiyon olmak üzere

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) \subset \partial\big(f_1 + f_2\big)(x) \ , \quad \forall \ x \in \mathbb{R}^n$$

kapsaması sağlanır. Eşitlik her zaman doğru değildir ancak bazı ek koşullar altında eşitliğin sağlandığı gerçeği aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 2.18. [21, Moreau-Rockafellar's Theorem 1.16, s.28] $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ve $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ konveks fonksiyonlar olmak üzere $\overline{x} \in domf_1 \cap domf_2$ noktası için f_1 fonksiyonu $\overline{x}$ noktasında sürekli olsun. O halde

$$\partial f_1(x) + \partial f_2(x) = \partial\big(f_1 + f_2\big)(x)$$

eşitliği herhangi bir $x \in domf_1 \cap domf_2$ noktasında gerçeklenir.

2.2. KONVEKS KÜME DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER

X ve Y sonlu boyutlu Öklid uzayları olmak üzere $F(\cdot) : X \to Y$ ile X uzayından Y uzayına küme değerli dönüşümler, yani $\forall\, x \in X$ için $F(x) \subset Y$ kümesini karşılık getiren dönüşümler gösterilsin. $f : X \to Y$ fonksiyonu $F(x) = \{f(x)\}$ şeklinde tanımlanırsa özel bir küme değerli dönüşümdür. Konveks fonksiyonlar için verilen subdiferansiyel dönüşümü küme değerli bir dönüşüm örneğidir.

$F(\cdot) : X \to Y$ küme değerli dönüşümünün tanım kümesi $domF = \{x : F(x) \neq \emptyset\}$, grafiği $gphF = \{(x, y) \in X \times Y : \ y \in F(x)\}$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca $F(x)$ kümesinin normu $||F(x)|| = \sup_y\{||y|| : y \in F(x)\}$ fonksiyonu ile verilir ve $||F(x)|| \leq C(1 + ||x||)$ eşitsizliğini gerçekleyen öyle bir $C > 0$ sayısı varsa F küme değerli dönüşümüne *sınırlı* denir [35, s.56] .

Tanım 2.10. $F : X \to Y$ küme değerli dönüşümü verilsin.

i) $\forall\, x \in X$ için $F(x)$ kümesi Y de kapalı (açık) bir küme ise F dönüşümüne *kapalı değerli (açık değerli)* denir. Ayrıca her $x \in X$ için $F(x)$ kümesi Y de konveks bir küme ise F dönüşümüne *konveks değerli* denir.

ii) $gphF$ kümesi $X \times Y$ de kapalı (açık) bir küme ise F dönüşümüne *kapalı (açık) küme değerli dönüşüm* denir. $gphF$ kümesi $X \times Y$ de konveks ise yani herhangi $x_1, x_2 \in X$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$\lambda F(x_1) + (1 - \lambda)F(x_2) \subseteq F\big(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2\big)$$

gerçekleniyorsa F dönüşümüne *konveks küme değerli dönüşüm* denir [35, s.56].

Tanım 2.11. $F : X \to Y$ küme değerli bir dönüşüm ve $domF \neq \emptyset$ verilsin. $U \subset Y$ sıfırın herhangi bir komşuluğu olmak üzere

$$F(x) \subseteq F(x_0) + U\ , \quad \forall\, x \in x_0 + V$$

sağlayan öyle bir sıfırın $V \subset X$ komşuluğu varsa $x_0 \in X$ noktasında F dönüşümüne *üstten yarı sürekli* denir. Benzer şekilde

$$F(x_0) \subseteq F(x) + U \ , \quad \forall\, x \in x_0 + V$$

gerçekleyen öyle bir sıfırın $V \subset X$ komşuluğu varsa $x_0 \in X$ noktasında F dönüşümüne *alttan yarı sürekli* denir. F hem üstten hem de alttan yarı sürekli ise F *dönüşümüne sürekli* denir [35, s.56].

Örnek 2.1. [19, s.39] Aşağıda verilen F küme değerli dönüşümü

$$F(x) = \begin{cases} \{0\} & , \ x \neq 0 \\ [-1,1] & , \ x = 0 \end{cases}$$

$x_0 = 0$ noktasında üstten yarı sürekli ancak alttan yarı sürekli değildir. Diğer taraftan

$$F(x) = \begin{cases} [-1,1] & , \ x \neq 0 \\ \{0\} & , \ x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan küme değerli dönüşüm $x_0 = 0$ noktasında alttan yarı sürekli iken üstten yarı sürekli değildir.

Her $x_1, x_2 \in M \subseteq X$ için $d\big(F(x_1), F(x_2)\big) \leq L||x_1 - x_2||$ olacak şekilde öyle bir $L > 0$ sayısı varsa F dönüşümü M kümesi üzerinde *Lipschitz koşulunu* sağlar. Burada $A, B \subseteq Y$ kümeleri arasındaki uzaklık fonksiyonu

$$d(A,B) = \max\Big\{ \sup_{y_1 \in A} \inf_{y_2 \in B} ||y_1 - y_2|| \ , \ \sup_{y_2 \in B} \inf_{y_1 \in A} ||y_1 - y_2|| \Big\}$$

dır [35, s.57].

Lemma 2.9. [35, Lemma 2.1, s.57] F kapalı konveks küme değerli dönüşüm ve $x_0 \in domF$ noktasında $F(x_0)$ kümesi sınırlı olsun. O halde F dönüşümü sınırlıdır.

Lemma 2.10. [35, Lemma 2.2, s.58] F küme değerli dönüşümü için $gphF$ kapalı konveks koni olsun. O halde F dönüşümünün sınırlı olması için gerek ve yeter koşul $F(0) = \{0\}$ olmasıdır.

Tanım 2.12. F konveks küme değerli dönüşümün resesyon konisi 0^+gphF yani,

$$0^+gphF = \{(\overline{x}, \overline{y}) : \ (x + \lambda\overline{x}, y + \lambda\overline{y}) \in gphF, \ \lambda \geq 0, \ \forall (x,y) \in gphF\}$$

olsun. O halde

$$F^*(y^*) = \{x^* : \ (x^*, -y^*) \in (0^+gphF)^*\}$$

ile tanımlanan F^* dönüşümüne F konveks dönüşümün *dual dönüşümü* denir [35, s.58].

Tanım 2.13. F küme değerli dönüşüm olmak üzere

$$H(x,y^*)=\sup_y\big\{\langle y,y^*\rangle:\ y\in F(x)\big\},\quad y^*\in R^n$$

fonksiyonuna *Hamilton fonksiyonu* denir [35, s.60].

Konveks fonksiyonlar için gradiyent kavramı yerine daha uygun olan subdiferansiyel kavramını kullanılmıştı. Küme değerli dönüşümler için benzer rol oynayan yerel dual dönüşüm kavramına geçmeden önce bazı tanımlar verelim.

Bir $gphF$ kümesi için $z=(x,y)\in gphF$ noktasındaki teğet yönler konisi tanımından

$$K_F(z)=cone(gphF-z)=\big\{\overline{z}:\ \overline{z}=\lambda(z_1-z),\ \ z_1\in gphF,\ \lambda>0\big\}$$

yazılabilir. Dikkat edilirse bu ifadeden $\overline{z}\in K_F(z)$ olması için gerek ve yeter koşulun yeterince küçük $\lambda>0$ için $z+\lambda\overline{z}\in gphF$ içermesinin gerçeklenmesi gerektiği elde edilir [35, s.61].

Tanım 2.14. Konveks küme değerli bir F dönüşümünün bir $z=(x,y)\in gphF$ noktasındaki *yerel dual dönüşümü*

$$F^*(y^*;z)=\big\{x^*:\ (x^*,-y^*)\in K^*_{gphF}(z)\big\}$$

kümesi ile tanımlanır, burada $K^*_{gphF}(z)$ konisi, $K_{gphF}(z)$ konisinin dual konisidir [35, s.62].

Teorem 2.19. [35, Theorem 2.1, s.62] $F:X\to Y$ konveks küme değerli dönüşüm olsun. O halde

$$F^*(y^*;(x,y))=\begin{cases}\partial_x H(x,y^*) & ,\ y\in F(x,y^*)\\ \emptyset & ,\ y\notin F(x,y^*)\end{cases}$$

gerçeklenir. Burada $F(x,y^*)=\{y\in F(x):\langle y,y^*\rangle=H(x,y^*)\}$ şeklindedir.

Teorem 2.20. [35, Theorem 2.5, s.66] F kapalı konveks küme değerli bir dönüşüm olsun. O halde

$$F^*(y^*)=\overline{\bigcup_{z\in gphF}F^*(y^*;z)}\quad ,\ y\in F(x;y^*)$$

eşitliği gerçeklenir.

2.3. KONVEKS PROGRAMLAMADA OPTİMALLİK

Tanım 2.15. $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}$ herhangi bir fonksiyon ve $a \in A$ olsun. $\exists\ \varepsilon > 0,\ \forall\ x \in B(a,\varepsilon) \cap A$ için $f(a) \leq f(x)\ \big(f(x) \leq f(a)\big)$ ise a noktasına f fonksiyonunun *yerel minimum(yerel maksimum) noktası* denir. Benzer şeklilde $a \in A$, her $x \in A$ için $f(a) \leq f(x)$ gerçekleniyorsa $a \in A$ noktasına *minimum nokta* her $x \in A$ için $f(x) \leq f(a)$ ise $a \in A$ noktasına *maksimum nokta* denir [43, s.128].

Konvekslik kavramı altında yerel minimum nokta ile minimum nokta arasında fark olmadığı aşağıdaki teorem ile gösterilmektedir.

Teorem 2.21. [43, Theorem 3.1, s.137] A konveks küme üzerinde tanımlı f konveks fonksiyon için aşağıdakiler gerçeklenir:

i) f, x_0 noktasında yerel minimuma erişirse, f fonksiyonu x_0 noktasında minimuma ulaşır.

ii) f fonksiyonunun minimuma eriştidiği noktalar kümesi ya $\emptyset$ ya da konvekstir.

iii) Eğer f kesin konveks fonksiyonu bir x^* noktasında minimuma ulaşırsa, x^* noktası tektir.

iv) Eğer f sabit fonksiyon değil ve bir maksimum değerine $x \in A$ noktasında ulaşırsa x noktası A kümesinin sınırda olmalıdır.

Teorem 2.3'da verilen özellik optimizasyon problemleri için optimal çözümün karakterizasyonu ile ilgili önemli sonuçlar ortaya koyar. Örneğin aşağıda verilen genel bir konveks optimizasyon problemini düşünelim:

$$\min f(x)$$
$$x \in X$$

Bu problemde x^* noktasının optimal çözüm olması için gerek ve yeter koşul

$$\forall\ x \in X \text{ için } \langle \nabla f(x^*),\ x - x^* \rangle \geq 0$$

olmasıdır. Bu eşitsizlik ise $-\nabla f(x^*) \in \big(K_X(x^*)\big)^0$ yani $-\nabla f(x^*) \in N_X(x^*)$ sağlanması anlamına gelir. Başka bir ifade ile $0 \in \nabla f(x^*) + N_X(x^*)$ gerçeklenir. Bu sonuç konveks optimizasyon problemleri için genel bir optimallik koşuludur.

Kısıtsız konveks optimizasyon problemleri için yani $\min f(x)$, $X = \mathbb{R}^n$ için $N_{R^n}(x^*) = \{0\}$ olduğu için x^* noktasının optimal çözüm olması için gerek ve yeter koşul $0 \in \nabla f(x^*) + \{0\}$ yani $\nabla f(x^*) = 0$ olmasıdır.

Aşağıdaki teorem f konveks fonksiyonuna minimum değer veren nokta ile subdiferansiyel kavramının ilişkisini ortaya koyar.

Teorem 2.22. [43, Theorem 3.2, s.138] $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasının bir has konveks fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul $0 \in \partial f(x_0)$ olmasıdır.

Daha sonra tanıtılacak olan çalıştığımız problemlerde yörüngenin optimallik koşullarını bulmak için çalışmaya temel oluşturan aşağıda verilen teoremlerin ispatları Mahmudov'un [35] kitabından alınmıştır.

Teorem 2.23. [35, Theorem 3.2, s.98] $M \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks küme ve bir $x_1 \in M$ noktasında f konveks fonksiyonu sürekli olsun. Bu durumda bir $x_0 \in M$ noktasının f fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul

$$\partial f(x_0) \cap K_M^*(x_0) \neq \emptyset$$

gerçeklenmesidir.

İspat. $\emptyset \neq M \subseteq \mathbb{R}^n$ konveks kümesinin indikatör fonksiyonu δ_M için $\min\limits_{x \in M} f(x) = \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n}(f + \delta_M)(x)$ olduğu açıktır. Ayrıca Moreau-Rockaffellar Teoremi 2.18'den $\partial(f + \delta_M) = \partial f + \partial(\delta_M)$ sağlanır. Diğer taraftan $\partial(\delta_M(x_0)) = -(cone(M - x_0))^* = -K_M^*(x_0)$ olduğundan $\partial(f + \delta_M)(x_0) = \partial f(x_0) - K_M^*(x_0)$ gerçeklenir. O halde Teorem 2.22 nedeniyle $x_0 \in M$ noktasının f fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul $0 \in \partial f(x_0) - K_M^*(x_0)$ olup istenen elde edilir. ∎

Teorem 2.24. [35, Theorem 3.3, s.98] Yukarıdaki teoremin koşulları sağlansın ve teoremin ifadesindeki M kümesi $i = 1, 2, \ldots, k$ olmak üzere $M = \bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$ olsun. Ayrıca $int(M_1) \cap int(M_2) \cap \ldots \cap int(M_{k-1}) \cap M_k \neq \emptyset$ olsun. O halde bir $x_0 \in M$ noktasının f fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul $x^* = x_1^* + x_2^* + \cdots + x_k^*$ gerçeklenecek biçimde $x_i^* \in K_{M_i}^*(x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ve $x^* \in \partial f(x_0)$ noktalarının var olmasıdır.

İspat. $M = \bigcap\limits_{i=1}^{k} M_i$ olsun. O halde $K_M(x_0) = \bigcap\limits_{i=1}^{k} K_{M_i}(x_0)$ olduğu kolayca görülebilir. $int(M_1) \cap int(M_2) \cap \ldots \cap int(M_{k-1}) \cap M_k \neq \emptyset$ olduğu için eğer $x_2 \in intM_i$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ ise $x_2 \in M_k$ ve $\overline{x}_2 = x_2 - x_0 \in intK_{M_i}(x_0)$ olup $\overline{x}_2 \in K_{M_k}(x_0)$

bulunur. Dolayısıyla $intK_{M_1}(x_0) \cap intK_{M_2}(x_0) \cap \ldots \cap intK_{M_{k-1}}(x_0) \cap K_{M_k}(x_0) \neq \emptyset$ olduğu için Teorem 2.5'den

$$K^*_M(x_0) = K^*_{M_1}(x_0) + K^*_{M_2}(x_0) + \cdots + K^*_{M_k}(x_0)$$

elde edilir. Teorem 2.23 nedeniyle $x_0 \in M$ noktasının f fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul $x^* = x^*_1 + x^*_2 + \cdots + x^*_k$ gerçeklenecek biçimde $x^*_i \in K^*_{M_i}(x_0)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ ve $x^* \in \partial f(x_0)$ noktalarının var olmasıdır. ∎

Teorem 2.25. [35, Theorem 3.4, s.99] f has konveks fonksiyon ve $i = 1, 2, \ldots m$ için M_i konveks kümeler olmak üzere $M = \bigcap_{i=1}^{m} M_i$ olsun. $x_1 \in M$ noktasında f fonksiyonu sürekli olsun. O halde $x_0 \in M$ noktasının f fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek koşul

$$\lambda x^* = x^*_1 + x^*_2 + \cdots + x^*_m$$

olacak şekilde, hepsi birden sıfır olmayan $x^* \in \partial f(x_0)$, $x^*_i \in K^*_{M_i}(x_0)$ vektörlerinin ve $\lambda \in \{0, 1\}$ sayısının var olmasıdır. Eğer $\lambda = 1$ ise bu koşullar aynı zamanda yeter koşuldur.

İspat. M_i konveks kümeler olmak üzere $M = \bigcap_{i=1}^{m} M_i$ olsun. $x_1 \in M$ noktasında f fonksiyonu sürekli olsun. Teorem 2.23'den öyle $x^* \in \partial f(x_0)$ vektörü vardır ki $x^* \in K^*_M(x_0)$ dır. Teorem 2.6 nedeniyle ya $K^*_M = K^*_{M_1} + K^*_{M_2} + \cdots + K^*_{M_m}$ eşitliği gerçeklenir ya da hepsi birden sıfır olmayan öyle $x^*_i \in K^*_{M_i}(x_0)$ vektörleri vardır ki $x^*_1 + x^*_2 + \cdots + x^*_m = 0$ sağlanır. Eğer $K^*_M = K^*_{M_1} + K^*_{M_2} + \cdots + K^*_{M_m}$ ise Teorem 2.24 nedeniyle $\lambda = 1$ olup $x_0 \in M$ noktasının f fonksiyonuna minimum değer verebilmesi için gerek ve yeter koşul $x^* = x^*_1 + x^*_2 + \cdots + x^*_m$ olmasıdır. Eğer öyle $x^*_i \in K^*_{M_i}(x_0)$ vektörleri vardır ki $x^*_1 + x^*_2 + \cdots + x^*_m = 0$ ise $\lambda = 0$ için bir gerek koşuldur. ∎

2.4. OPTİMAL KONTROL VE VARYASYON HESABI

Bu kısımda adi diferansiyel denklemlerle ifade edilen süreçlerin optimal kontrol problemleri genel manada incelenecektir. Ayrıca varyasyon hesabının en sade problemi için Euler denklemi ve Pontryagin'in maksimum ilkesi kullanılarak Weierstrass eşitsizliği Azimli'nin [8] kitabı referans alınarak ispatlanacaktır. Ayrıca optimal kontrol teorisini daha kapsamlı incelemek ve bu kısımda yer alan teoremlerin ispatları için [14] ve [17] kitaplarına bakılabilir.

Optimal kontrol teorisinde kontrol edilen sürecin

$$\dot{x} = F(x, u, t),\ t \in [t_0, t_1] \tag{2.7}$$

diferansiyel denklemle tanımlandığını kabul edelim. Burada $F = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ vektör fonksiyonu, $x \in R^n$ nesnenin koordinatları, $u \in \mathbb{R}^r$ kontrol vektörüdür. $u(t) \in U \subset \mathbb{R}^r$, $t \in [t_0, t_1]$ sağlayan parçalı sürekli $u(t)$ fonksiyonuna *uygun kontrol* denir. Genel olarak optimal kontrol problemlerinde optimal kontrol sürekli olmadığı için uygun kontrol sürekli fonksiyon yerine parçalı sürekli fonksiyon alınır. Varsayalım ki uygun kontrol her süreksiz noktada sağdan sürekli ve son t_1 noktasında sürekli olsun. Uygun $u(t)$ kontrolü ve keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ noktası için (2.7) diferansiyel denklemin $x(t)$ yörüngesini tanımlayalım.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F\big(x(t), u(t), t\big),\ t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) &= x_0, \end{aligned} \tag{2.8}$$

Cauchy problemini ele alaım. Eğer $F(x(t), u(t), t)$ ve $u(t)$ sürekli fonksiyonlar olsaydı (2.8) probleminin çözümü $[t_0, t_1]$ aralığında verilen ve her $t \in [t_0, t_1]$ için başlangıç koşulunu sağlayan sürekli diferansiyellenen $x(t)$ fonksiyonu olurdu. Ancak $u(t)$ parçalı sürekli fonksiyonu için probleminin çözümü sürekli diferansiyellenen olamayacağından (2.8) probleminin çözümünün tanımını verelim.

Tanım 2.16. $F : R^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon olsun. $t_0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k < t_1$ olmak üzere $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_k$ noktaları $u(t)$ uygun kontrolünün tüm süreksiz olduğu noktalar olsun. (2.8) probleminin $[t_0, \tau_1]$ aralığında çözümü var ve $x(\tau_1) = x_1$ olsun.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t), u(t), t),\ t \in [\tau_1, \tau_2] \\ x(\tau_1) &= x_1, \end{aligned}$$

Cauchy probleminin $[\tau_1, \tau_2]$ de çözümü var ve $x(\tau_2) = x_2$ olsun. Sonra

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(x(t), u(t), t),\ t \in [\tau_2, \tau_3] \\ x(\tau_2) &= x_2, \end{aligned}$$

problemini alıp bu şekilde devam edelim. Eğer $x(t)$ fonksiyonu bu yöntemle $[t_0, t_1]$ aralığında belirlenebilirse, $x(t)$ yörüngesine (2.8) probleminin $u(t)$ kontrolüne karşılık gelen *çözümü* denir.

Teorem 2.26. [8, Theorem 27.1, s.256] $F : R^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ sürekli bir fonksiyon ve x değişkenine göre Lipschitz koşulunu sağlasın, yani her $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n,\ u \in$

$\mathbb{R}^r$ ve $t \in [t_0, t_1]$ için $||F(x_1, u, t) - F(x_2, u, t)|| \leq L||x_1 - x_2||$ eşitsizliğini sağlayan $L > 0$ var olsun. Keyfi $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ve keyfi $u(t)$ uygun kontrolü için (2.8) probleminin $[t_0, t_1]$ aralığında tayin olunmuş tek çözümü vardır.

Optimal kontrol problemlerinde t_0 ve t_1 zamanları sabit ise probleme *sabit zaman aralıklı problem* denir. $u(t)$ uygun kontrolüne karşılık (2.7) denkleminin çözümü olan ve verilen koşulları sağlayan $x(t)$ yörüngesi için $(x(t), u(t))$ çiftine *uygun süreç* denir. Optimal kontrol teorisinde esas amaç $(x(t), u(t))$ mümkün süreçleri içinde optimali bulmaktır [8, s.257].

Şimdi $f_0 : R^n \times \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ve $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} \min G(x,u) &= \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t), u(t), t)dt + \phi(x(t_1), t_1) \\ &\dot{x}(t) = F\big(x(t), u(t), t\big), \\ &x(t_0) \in X_0,\ x(t_1) \in X_1\ , \quad X_0, X_1 \subseteq \mathbb{R}^n \\ &x(t) \in X \subset \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{2.9}$$

probleminde optimal sürecin tanımı verelim.

Tanım 2.17. [8, Tanım 27.3, s.257] Tüm mümkün (x, u) süreçleri için $G(x^*, u^*) \leq G(x, u)$ eşitsizliğini sağlayan mümkün (x^*, u^*) sürecine (2.9) probleminin *minimum çözümü* veya *optimal süreci* denir. $u^*(t)$ kontrolüne *optimal kontrol*, $x^*(t)$ yörüngesine ise *optimal yörünge* denir.

Optimal süreci bulmak için yapılan çalışmalar kapsamında daha önce değindiğimiz gibi optimal kontrol teorisinde önemli gelişmelere yol açan L.S.Pontryagin ve öğrencileri tarafından ifade edilen Maksimum Prensibi Teoremini (2.9) probleminin özel hali olan aşağıdaki problem için verelim [8, s.257].

$$\begin{aligned} \min G(x,u) &= \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(x(t), u(t), t\big)dt \\ &\dot{x}(t) = F\big(x(t), u(t), t\big),\ t \in [t_0, t_1] \\ &x(t_0) = x_0\ ,\ x(t_1) = x_1\ , \\ &u(t) \in U, \end{aligned} \tag{2.10}$$

x_0, x_1 sabit noktalar ve $F(x, u, t) = \big(f_1(x, u, t), \ldots, f_n(x, u, t)\big)$ olmak üzere $f_0, f_1, \ldots, f_n$ fonksiyonları $x_1, x_2, \ldots, x_n$ değişkenlerine göre kısmi türevleri mevcut olduğunu kabul

edelim.

$$\frac{\partial F}{\partial x} = F_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad , \qquad \frac{\partial f_0}{\partial x} = f_{0x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_0}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \\ \vdots \\ \frac{\partial f_0}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$j = 0, 1, \ldots, n$ için $f_j(x, u, t)$ ve $F_x(x, u, t)$, $f_{0x}(x, u, t)$ fonksiyonları (x, u, t) değişkenlerine göre sürekli ve $\psi = (\psi_1, \ldots, \psi_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun.

$$\begin{aligned} H(x, u, t, \psi, \psi_0) &= \psi_0 f_0(x, u, t) + \psi_1 f_1(x, u, t) + \cdots + \psi_n f_n(x, u, t) \\ &= \psi_0 f_0(x, u, t) + \langle \psi, F(x, u, t) \rangle \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $H : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r \times [t_0, t_1] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyona *Hamilton-Pontryagin fonksiyonu* denir.

$\big(x(t), u(t)\big)$, $t \in [t_0, t_1]$, uygun süreci için $\psi(t) = \big(\psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\big)$ değişkenlerinin sağladığı aşağıda verilen lineer diferansiyel denklem sistemine

$$\dot{\psi}(t) = -H_x\big(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0\big) \tag{2.11}$$

$\big(x(t), u(t)\big)$ sürecine karşılık gelen *eşlenik sistem* denir.

Bu tanımlardan sonra (2.10) probleminde optimal kontrolü bulmak için gerek koşulları veren Maksimum Prensibi Teoremi aşağıda verilmiştir.

Teorem 2.27. [14, Theorem 8, s.81] $t \in [t_0, t_1]$ için $\big(x(t), u(t)\big)$ süreci (2.10) probleminde optimal süreç olsun. O halde

(i) $\psi_0 \leq 0$ ve $|\psi_0| + ||\psi(t)|| \neq 0$ dır.

(ii) $\psi(t)$ eşlenik sistemi (2.11) denkleminin çözümüdür.

(iii) Her $t \in [t_0, t_1]$ için

$$H\big(x(t), u(t), t, \psi(t), \psi_0\big) = \max_{u \in U} H\big(x(t), u, t, \psi(t), \psi_0\big)$$

gerçekleyen ψ_0 sayısı ve $t \in [t_0, t_1]$ aralığında belirlenmiş sürekli bir $\psi(t)$ fonksiyonu vardır.

Bu teoremden anlaşılacağı üzere $(x(t), u(t))$ optimal çözüm ise Hamilton-Pontryagin fonksiyonunun her t zamanında maksimumunu optimal kontrolün $u = u(t)$ değerinde alır [8, s.259].

Örnek 2.2. [8, s.260] Aşağıda verilen örnek problemin optimal sürecini bulalım:

$$\begin{aligned} \min G(x,u) &= \int_0^4 (u^2 + x)dt \\ \dot{x} &= u \ , \ |u| \leq 1, \\ x(0) &= x(4) = 0 \ , \end{aligned}$$

problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu $H = \psi_0(u^2+x)+\psi u$ ve eşlenik sistem $\dot{\psi} = -\psi_0$ dır. Dikkat edilirse $\psi_0 = 0$ olamaz. Çünkü eğer $\psi_0 = 0$ olsaydı $(\psi_0, \psi) \neq 0$ koşulundan $\psi \neq 0$ elde edilir. O halde $H = \psi u$ fonksiyonunun $|u| \leq 1$ kümesinde maksimumu $u(t) \equiv 1$ veya $u(t) \equiv -1$ olduğunda elde edilir. Bu halde ise $\dot{x} = u$ denkleminin $x(0) = x(4) = 0$ koşulunu sağlayan çözümü olmaz. O halde $\psi_0 < 0$ olduğu için $\psi_0 = -1$ kabul edelim. $H = -(u^2+x)+\psi u$ fonksiyonu $u = \frac{\psi}{2}$ noktasında maksimum değerini alır. Dolayısıyla sistemin çözümü $x^*(t) = \frac{1}{4}t(t-4)$ ve $u^*(t) = \frac{1}{2}(t-2)$ olarak elde edilir. Teorem gerek koşul olduğundan bu çözümün optimal olup olmadığını ayrıca inceleyelim. Bunun için x^*+x herhangi mümkün eğri olmak üzere $x(0) = x(4) = 0$ ve $|\dot{x}^* + \dot{x}| \leq 1$ koşulları sağlansın. $G(x^*) \leq G(x^* + x)$ eşitsizliğinin sağlandığı gözlemlenirse x^* çözümünün minimum çözüm olduğu ispatlanır. O halde $x^*(t)$ ve $u^*(t)$ optimal çözümdür.

Tanım 2.18. [8] (2.10) probleminde $f_0(x(t), u(t), t) \equiv 1$ olsun ve t_0 ve t_1 zamanları da bilinmeyen olmak üzere

$$\begin{aligned} \min G(x,u) &= t_1 - t_0 \\ \dot{x}(t) &= F(x(t),u(t),t), \ t \in [t_0, t_1] \\ x(t_0) &= x_0, x(t_1) = x_1 \\ u(t) &\in U \end{aligned}$$

problemine *zamana göre optimal kontrol(time optimal control) problemi* denir.

Bu problemde amaç başlangıç ve son noktalarını en kısa zamanda birleştiren $x(t)$ yörüngesini ve $u(t)$ kontolünü bulmaktır.

$f_0 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon ve $C^1[t_0, t_1]$ tüm sürekli diferansiyellenen fonksiyonlar uzayı ve t_0, t_1, x_0, x_1 sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \min & \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt \\ & x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1 \end{aligned} \tag{2.12}$$

problemini gözönüne alalım. Amaç x_0 ve x_1 noktalarını birleştiren ve yukarıda verilen integrale minimum değer veren eğriyi bulmaktır. Varyasyon hesabı teorisinde *en sade problem* denilen (2.12) problemini çözmek için Euler denklemi ve Weierstrass eşitsizliğinden yararlanılır [8, s.265].

$x(t) \in C^1[t_0, t_1]$, (2.12) probleminin minimum çözümü olsun, yani sınır koşullarını sağlayan her $\tilde{x}(t) \in C^1[t_0, t_1]$ için

$$\int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)dt \leq \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, \tilde{x}(t), \dot{\tilde{x}}(t)\big)dt$$

olsun. $\dot{x} = u$ yazarak (2.12) problemini optimal kontrol problemine dönüştürelim:

$$\begin{aligned} \min & \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(t, x(t), u(t)\big)dt \\ & \dot{x}(t) = u(t),\ u(t) \in \mathbb{R},\ t \in [t_0, t_1] \\ & x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1. \end{aligned} \tag{2.13}$$

(2.13) probleminde (x, u) optimal süreç olacaktır. Bu problem (2.10) probleminin özel bir hali olduğu için Teorem 2.27'yi uygulayalım. (2.13) problemi için Hamilton-Pontryagin fonksiyonu

$$H = y_0 f_0(t, x, u) + yu$$

ve eşlenik sistemi

$$\dot{y}(t) = -y_0 f_{0x}\big(t, x(t), u(t)\big)$$

olur. Teorem 2.27'nin (iii) koşulundan $\max_{u \in \mathbb{R}} \Big(y_0 f_0(t, x, u) + yu\Big)$ sonludur ve maksimumu optimal u kontrolünün t anındaki $u(t)$ değerinde alır. f_0 fonksiyonu diferansiyellenebilir olduğu için $y_0 f_{0u}(t, x, u) + y = 0$ olur. Burada $y_0 = 0$ olamayacağı için $y_0 < 0$ olur, kabul edelim ki $y_0 = -1$ olsun.

$$\dot{y}(t) = f_{0x}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big) = \frac{d}{dt} f_{0\dot{x}}\big(t, x(t), \dot{x}(t)\big)$$

elde edilir. Bu denkleme *Euler denklemi* denir. (2.12) probleminin $x(t)$ çözümü Euler denklemini sağlamaktadır. Euler denklemini sağlayan her $x(t)$ fonksiyonuna

(2.12) probleminin *ekstremali* denir. Demek ki (2.12) probleminin her optimal çözümü onun ekstremalidir. Ancak tersinin her zaman doğru olmadığı Örnek 2.3'de anlaşılmaktadır.

Teorem 2.27'nin (iii) koşulundan

$$\max_{u\in\mathbb{R}}\Big(- f_0(t,x(t),u) + y(t)u\Big) = -f_0\big(t,x(t),u(t)\big) + y(t)u(t)$$

olur. Burada $u(t)$ optimal kontroldür. Yani her $t\in[t_0,t_1]$, $u\in\mathbb{R}$ için

$$-y(t)u + f_0(t,x(t),u) + y(t)u(t) - f_0\big(t,x(t),u(t)\big) \geq 0$$

olur. $u(t)=\dot{x}(t)$ ve $y_0=-1$ olduğundan her $t\in[t_0,t_1]$, $u\in\mathbb{R}$ için

$$f_0\big(t,x(t),u\big) - f_0\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) - \big(u-\dot{x}(t)\big)f_{0\dot{x}}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) \geq 0$$

olur. Bu eşitsizlik *Weierstrass eşitsizliği* olarak adlandırılır. Böylece aşağıdaki teorem (2.12) problemi için ispat edilir [8, s.267].

Teorem 2.28. $x(t)\in C^1[t_0,t_1]$ yörüngesi (2.12) probleminin optimal çözümü ise

(i) $-\dfrac{d}{dt}f_{0\dot{x}}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) + f_{0x}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) = 0\ , \quad t\in[t_0,t_1]$

(ii) $x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1\ ,$

(iii) Her $t\in[t_0,t_1]$ ve $u\in\mathbb{R}$ için

$$f_0\big(t,x(t),u\big) - f_0\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) - \big(u-\dot{x}(t)\big)f_{0\dot{x}}\big(t,x(t),\dot{x}(t)\big) \geq 0$$

sağlanmaktadır.

Örnek 2.3. [8, s.268] Aşağıda verilen örnek problemi ele alalım:

$$\begin{aligned}&\min \int_0^1 tx\dot{x}dt\\ &x(0)=x(1)=0\ ,\end{aligned}$$

problemi için Euler denkleminden $x(t)\equiv 0$ tek ekstremal elde edilir. Şimdi bu ekstremalin optimal çözüm olmadığını gösterelim.

$$\int_0^1 tx\dot{x}dt = -\frac{1}{2}\int_0^1 x^2dt$$

olur. $x_n(t)=nt(1-t)$ fonksiyonu her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n(0)=x_n(1)=0$ sınır koşullarını sağlıyor. Ancak $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 {x_n}^2(t)dt=+\infty$ olduğu için $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 tx\dot{x}dt=-\infty$ elde edilir. Bu ise optimal çözümün olmadığını gösterir.

2.5. DİSKRET VE DİFERANSİYEL İÇERMELİ KONVEKS PROBLEMLER

Bu kısımda en sade diskret içermeli ve diferansiyel içermeli konveks optimizasyon problemleri tanıtılacaktır.

$F : R^n \to P(R^n)$ konveks küme değerli dönüşüm, $g(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonları konveks ve $N, M \subseteq \mathbb{R}^n$ kümeleri konveks olmak üzere

$$\min \sum_{t=1}^{T} g(x_t, t), \tag{2.14}$$

$$x_{t+1} \in F(x_t) \quad , \ t = 0, 1, \ldots, T-1, \tag{2.15}$$

$$x_0 \in N, x_T \in M, \tag{2.16}$$

probleminde (2.15) içermesine *diskret içermeli sistem* denir. Burada amaç (2.15) diskret içermeli sistemini sağlayan, $\sum_{t=1}^{T} g(x_t, t)$ toplamını minimum yapan N kümesinde başlayıp M kümesinde son bulan $\{x_t\}_{t=1}^{T}$ yörüngesini bulmaktır.

Diferansiyel içermeler sağ tarafı küme değerli dönüşüm olan diferansiyel denklemlerdir yani F küme değerli dönüşüm ve $x \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\dot{x} \in F(x)$ içermesine *diferansiyel içerme* denir. Açıktır ki $\dot{x} = f(x)$ diferansiyel denklemi $F(x) = \{f(x)\}$ şeklinde tanımlanırsa bir diferansiyel içermedir. Bu sebeple diferansiyel içermeleri adi diferansiyel denklemlerin bir genellemesi olarak düşünebiliriz [21, s.xiii]. Dolayısıyla diferansiyel denklemler için düşünülen tüm problemler, çözümlerin varlığı, çözümün sürekliliği, başlangıç koşullarına ve parametreye bağlılık, diferansiyel içerme teorisinde de vardır. Diferansiyel içermeler genellikle verilen bir noktadan başlayan bir çok çözüme sahiptir ve diferansiyel içerme teknikleri optimal kontrol teorisinde varlık teoremlerini ispatlamak için kullanılır [21, s.xv]. Ancak bu tez çalışmasında diferansiyel içermelerin çözümlerinin varlığı ile ilgili problemlerle uğraşmayacağız. Biz bu çalışmada kontrol teorisinde önemli bir yer sahip diferansiyel içermeleri belli koşullar altında verilen problemlerin optimallik koşullarını belirlemek için kullanacağız.

$F : R^n \to P(R^n)$ konveks küme değerli dönüşüm, $x : [0, 1] \to \mathbb{R}^n$ mutlak sürekli fonksiyon, $\varphi_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ve $g(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konveks fonksiyonlar ve $N, M \subseteq \mathbb{R}^n$

kümeleri konveks olsunlar.

$$\min J(x(\cdot)) = \int_0^1 g(x(t),t)dt + \varphi_0(x(1)), \tag{2.17}$$

$$x'(t) \in F(x(t)) \ , \ t \in [0,1], \tag{2.18}$$

$$x(0) \in N, \ x(1) \in M \tag{2.19}$$

probleminde (2.18) bağıntısına *diferansiyel içermeli sistem* denir. Burada amaç verilen diferansiyel içermeli sistemi ve (2.19) sınır koşullarını sağlayan tüm $x(t), t \in [0,1]$ yörüngeleri arasında $J(x(\cdot))$ fonksiyonuna minimum değer veren $x(t)$ yörüngesini bulmaktır.

Mahmudov'un [36] çalışmasında yer alan ve aşağıda verilen problemde, üçüncü mertebeden diferansiyel içermeyi sağlayan Cauchy probleminin çözümü olan $J_1(x(\cdot))$ Bolza fonksiyonelini minimum yapan $\widetilde{x}(t)$ optimal yörüngesinin optimallik koşulları bulunmuştur:

$$\begin{aligned} \min \ J_1(x(\cdot)) &= \int_0^1 g(x(t),t)dt + \varphi_0(x(1),x'(1),x''(1)), \\ x'''(t) &\in F(x(t),x'(t),x''(t)) \quad \text{h.h.} \quad t \in [0,1], \\ x(0) &= \alpha_0, \ x'(0) = \alpha_1, \ x''(0) = \alpha_2, \end{aligned}$$

burada $g(\cdot,t)$, $\varphi_0 : (\mathbb{R}^n)^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ve F küme değerli dönüşümü konveks bir dönüşümdür.

Biz bu çalışmada, farklı olarak, fonksiyonların ve küme değerli dönüşümün konveksliğin özel bir hali olan polihedral dönüşümlerle verildiği bazı problemlerin optimallik koşullarını belirlemek istiyoruz. Elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak değişen optimallik koşullarını tespit etmeyi hedefliyoruz. Diğer taraftan sadece üçüncü mertebe için değil, keyfi yüksek mertebeden hem diskret hem de diferansiyel içermeli problemlerin ayrı ayrı optimallik koşullarını ifade etmek istiyoruz.

Tüm bu amaçlar doğrultusunda ve yukarıda verilen problemleri tanıttık sonra bu çalışmanın konusu olan ele aldığımız üçüncü mertebeden ve yüksek mertebeden polihedral diskret ve diferansiyel içermeli optimizasyon problemleri aşağıdaki kısımda tanıtılmaktadır.

2.5.1. Çalışılan Polihedral Problemlerin Tanıtımı

$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to P(\mathbb{R}^n)$ polihedral küme değerli dönüşüm ve P_0, P_1, P_2 ve Q satırları sırasıyla $P_0^i, P_1^i, P_2^i, Q_i,\ i = 1, \ldots, m$ olan $m \times n$ boyutlu matrisler ve d bileşenleri $d_i,\ i = 1, \ldots, m$ olan m boyutlu bir sütun matris ve $\tilde{\alpha}_0, \tilde{\alpha}_1, \tilde{\alpha}_2$ sabit vektörler olsun. $g(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polihedral bir fonksiyon, yani epi $g(\cdot, t)$ kümesi $\mathbb{R}^{n+1}$ de polihedral küme olmak üzere

$$\min \sum_{t=3}^{T-1} g(x_t, t), \tag{2.20}$$

$$(P_D) \qquad x_{t+3} \in F(x_t, x_{t+1}, x_{t+2}) \quad t = 0, 1, \ldots, T-3, \tag{2.21}$$

$$x_0 = \tilde{\alpha}_0, x_1 = \tilde{\alpha}_1, x_2 = \tilde{\alpha}_2,$$

$$F(x, v_1, v_2) = \{v_3 : P_0 x + P_1 v_1 + P_2 v_2 - Q v_3 \leq d\} \tag{2.22}$$

şeklinde verilen (P_D) ile göstereceğimiz üçüncü mertebeden polihedral diskret içermeli problemi ele alalım. Buradaki amacımız $\sum_{t=3}^{T-1} g(x_t, t)$ toplamını minimize eden (2.21) − (2.22) koşullarını sağlayan $\{\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_T\} \equiv \{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{T}$ yörüngesinin optimallik koşullarını bulmaktır. Ayrıca $g(x_T, T) \neq 0$ yani amaç fonksiyoneli $\sum_{t=3}^{T} g(x_t, t)$ olması halinde, üçüncü mertebeden polihedral diskret içermeli problemde değişen transversallik koşulunu belirlemektir.

Diğer taraftan aşağıda verilen (P_C) ile göstereceğimiz üçüncü mertebeden diferansiyel içermeli polihedral optimizasyon probleminde

$$\min J_1(x(\cdot)) = \int_0^1 g(x(t), t)dt + \varphi_0(x(1), x'(1), x''(1)), \tag{2.23}$$

$$(P_C) \qquad x'''(t) \in F(x(t), x'(t), x''(t)) \quad \text{h.h.} \quad t \in [0, 1], \tag{2.24}$$

$$x(0) = \alpha_0,\ x'(0) = \alpha_1,\ x''(0) = \alpha_2, \tag{2.25}$$

$g(\cdot, t)$ ve $\varphi_0 : (\mathbb{R}^n)^3 \to \mathbb{R}$ fonksiyonları, küme değerli F dönüşümü polihedral olmak üzere [0,1] kapalı aralığı üzerinde (2.25) başlangıç koşulunu ve (2.24) üçüncü mertebeden diferansiyel içermeyi sağlayan Cauchy probleminin çözümü olan $J_1(x(\cdot))$ Bolza fonksiyonelini minimum yapan $\widetilde{x}(t)$ optimal yörüngeyi bulmak amaçlanmaktadır.

Bu tez çalışmasındaki temel amacımız üçüncü mertebeden polihedral diskret ve diferansiyel içermeli optimizasyon problemlerinde yörüngenin optimalliği için gerek ve yeter koşulları belirledikten sonra yüksek mertebeden ($s.$ mertebeden) diskret ve

diferansiyel içermeli polihedral optimizasyon problemlerinin optimalliği için gerek ve yeter koşulları verebilmektir. Bu sebeple (PDs) ile göstereceğimiz aşağıda verilen yüksek mertebeden (s. mertebeden) polihedral diskret içermeli problem ele alınacaktır:

$$\min \sum_{t=s}^{T-1} g(x_t, t), \tag{2.26}$$

$$(PDs) \quad x_{t+s} \in F(x_t, x_{t+1}, \ldots, x_{t+s-1}) \ , \ t = 0, 1, \ldots, T-s, \tag{2.27}$$

$$x_k = \tilde{\theta}_k, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1,$$

$$F(x, v_1, v_2, \ldots, v_{s-1}) = \{v_s : P_0 x + \sum_{r=1}^{s-1} P_r v_r - Q v_s \leq d\}. \tag{2.28}$$

Burada $F : (\mathbb{R}^n)^s \to P(\mathbb{R}^n)$ polihedral küme değerli dönüşüm, $P_0, P_1, \ldots, P_{s-1}, Q$ satırları sırasıyla $P_0^i, P_1^i, \ldots, P_{s-1}^i, Q_i$, olan $m \times n$ boyutlu matrisler ve d bileşenleri d_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ olan m-boyutlu bir sütun vektör, $\tilde{\theta}_k$, $k = 0, 1, \ldots, s-1$, sabit vektörler ve $g(\cdot, t) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polihedral bir fonksiyon olmak üzere $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{T}$ yörüngesinin optimalliği için gerek ve yeter koşullar belirlenecektir. Daha sonra (PCs) ile göstereceğimiz aşağıda verilen yüksek mertebeden polihedral diferansiyel içermeli problem incelenecektir:

$$\min \quad J_4(x(\cdot)) = \int_0^1 g(x(t), t)dt + \varphi_0\big(x(1), x'(1), \ldots, x^{(s-1)}(1)\big), \tag{2.29}$$

$$(PCs) \qquad x^{(s)}(t) \in F\big(x(t), x'(t), \ldots, x^{(s-1)}(t)\big) \quad \text{h.h.} \quad t \in [0, 1], \tag{2.30}$$

$$x^{(k)}(0) = \theta_k, \quad k = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{2.31}$$

Burada F küme değerli bir dönüşüm, $g(\cdot, t) : R^n \to \mathbb{R}$ ve $\varphi_0 : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}$ polihedral fonksiyonlardır. (PCs) probleminde $\widetilde{x}(t)$ yörüngesinin optimalliği için yeter koşullar ispat edilecektir. (PCs) diferansiyel içermeli Bolza probleminde (2.31) başlangıç koşulu yerine G_k ve H_k polihedral kümeler olmak üzere

$$x^{(k)}(0) \in G_k \quad x^{(k)}(1) \in H_k \ , \ k = 0, 1, \ldots, s-1,$$

sınır değer koşullarını sağlayan ve (2.29) amaç fonksiyonelini minimum yapan $\tilde{x}(t)$ optimal yörüngesinin $t = 0$ ve $t = 1$ anındaki transversallik koşulları verilecektir.

Ele aldığımız üçüncü mertebeden ve yüksek mertebeden polihedral diskret ve diferansiyel içermeli optimizasyon problemlerin bulunan optimallik koşulları Bulgular başlığı altında verilmiştir.

3. MALZEME VE YÖNTEM

Bu tez çalışmasında, ele alınan diskret ve diferansiyel içermeli bazı özel optimizasyon problemlerinde yörüngenin optimallik koşulları incelenmiştir. İlk olarak çalışılan üçüncü mertebeden (P_D) diskret ve (P_C) diferansiyel içermeli polihedral Cauchy problemlerde yörüngenin optimallik koşulları verilmiştir. Elde edilen tüm bu sonuçlar doğrultusunda, bir uygulama olarak sınır değer koşullu (P_L) problemi için varyasyon analizinde önemli bir yere sahip olan Euler-Poisson denkleminin yörüngenin optimalliği için gerek koşul olduğu gösterilmiştir. Çalışmanın bu kısmı için konveks analiz, küme değerli analiz, varyasyon analizi yöntemlerinin yanı sıra klasik diferansiyel hesabı yöntemleri kullanılmıştır.

İkinci olarak incelenen problemlerin bir genellemesi olarak, keyfi s. mertebeden, yüksek mertebeden (PDs) diskret ve (PCs) diferansiyel içermeli polihedral problemlerde optimallik koşulları ifade ve ispat edilmiştir. Elde edilen sonuçlar doğrultusunda ikinci mertebeden diskret polihedral problem için nümerik bir örnek verilerek optimal yörünge belirlenmiştir. Çalışmanın bu kısmı için ise konveks analiz, varyasyon analizi ve optimal kontrol teorisinin yöntemlerinden yararlanılmıştır.

Kullanılan yöntem ve sonuçlar ile ilgili kitap ve makalelerin künyeleri Kaynaklar bölümünde belirtilmiştir.

4. BULGULAR

4.1. ÜÇÜNCÜ MERTEBEDEN POLİHEDRAL DİSKRET VE DİFERANSİYEL İÇERMELİ PROBLEMLER

Bu bölümde öncelikle üçüncü mertebeden polihedral diskret (P_D) ve diferansiyel içermeli (P_C) problemlerde yörüngenin optimallik koşulları ifade ve ispat edilecektir. Daha sonra üçüncü mertebeden polihedral diferansiyel içermeli (P_C) problemin kısıt koşullarında $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sabit vektörler yerine M_0, M_1, M_2 ve N_0, N_1, N_2 polihedral kümeler olmak üzere

$$x(0) \in M_0,\ x'(0) \in M_1,\ x''(0) \in M_2 \text{ ve } x(1) \in N_0,\ x'(1) \in N_1,\ x''(1) \in N_2$$

koşulu alındığında ve verilen diğer koşullar altında (P_{C1}) Lagrange ve (P_{C2}) Bolza problemlerinde optimallik koşullarının nasıl değişiklik gösterdiği incelenecektir. (P_{C2}) probleminin optimallik koşullarının bir uygulaması olarak varyasyon hesabında önemli bir yere sahip Euler-Poisson denkleminin gerçeklendiği gösterilecektir. Son olarak incelediğimiz yüksek mertebeden ($s.$ mertebeden) (PDs) diskret ve (PCs) diferansiyel içermeli polihedral optimizasyon problemlerinin optimalliği için gerek ve yeter koşullar verilecektir.

Elde edilen sonuçların bir kısmı " Optimization of Third-Order Discrete and Differential Inclusions Described by Polyhedral Set-Valued Mappings" başlığı altında Applicable Analysis dergisinde yayınlanmıştır [45].

Bu amaçlar doğrultusunda çalıştığımız (P_D) diskret içermeli problemin optimallik koşulları aşağıda verilmektedir.

4.1.1. (P_D) Diskret İçermeli Problemin Optimallik Koşulları

Bu kısımda (P_D) problemi bazı dönüşümler aracılığı ile polihedral geometrik kısıtlı minimizasyon problemine dönüştürülerek, yörüngenin optimalliği için gerek ve yeter koşullar verilecektir.

L matrisi, $m \times n$ boyutlu $P_0, P_1, P_2, -Q$ ve 0 blok matrislerinden oluşan $m(T-2) \times n(T+1)$ boyutlu bir matris ve G, $m(T-2)$ boyutlu bir sütun vektör

$$L = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & P_2 & -Q & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_0 & P_1 & P_2 & -Q & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & P_0 & P_1 & P_2 & -Q \end{pmatrix} \ , \ G = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$$

olsun. $M = \{w = (x_0, \ldots, x_T) : Lw \leq G\}$, $N_0 = \{w = (x_0, \ldots, x_T) : x_0 = \tilde{\alpha}_0\}$, $N_1 = \{w = (x_0, \ldots, x_T) : x_1 = \tilde{\alpha}_1\}$ ve $N_2 = \{w = (x_0, \ldots, x_T) : x_2 = \tilde{\alpha}_2\}$ şeklinde verilen kümeler için (P_D) problemini lineer eşitsizlik kısıtlı konveks optimizasyon problemine indirgeyebiliriz:

$$\begin{aligned} \min f(w) &= \sum_{t=3}^{T-1} g(x_t, t) \ , \quad w = (x_0, x_1, \ldots, x_T) \in \mathbb{R}^{n(T+1)} \\ & w \in M \cap N_0 \cap N_1 \cap N_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Eğer (2.20)-(2.22) probleminin optimal çözümü $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{T}$ ise, $\tilde{w} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_T)$ vektörü (4.1) problemin optimal çözümüdür. Ayrıca $M_t = \big\{w = (x_0, \ldots, x_T) : P_0 x_t + P_1 x_{t+1} + P_2 x_{t+2} - Q x_{t+3} \leq d\big\}$, $t = 0, \ldots, T-3$ olmak üzere $M = \bigcap_{t=0}^{T-3} M_t$ eşitliğinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir.

$\tilde{w} \in M \cap N_0 \cap N_1 \cap N_2$ vektörü için teğet yönler konisi $K_M(\tilde{w}) = \big\{\overline{w} = (\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_T) : \tilde{w} + \mu\overline{w} \in M \ , \ \mu \geq 0\big\}$ olup teğet yönler konisinin dual konisi $K_M^*(\tilde{w}) = \big\{w^* : \langle \overline{w}, w^* \rangle \geq 0, \ \forall \ \overline{w} \in K_M(\tilde{w})\big\}$ şeklinde tanımlandığını biliyoruz. $K_{M_t}(\tilde{w})$, $t = 0, \ldots, T-3$, teğet yönler konisi polihedral bir konidir ve Teorem 2.8'den $K_M^*(\tilde{w}) = \sum_{t=0}^{T-3} K_{M_t}^*(\tilde{w})$ sağlanır. Teorem 2.25'den öyle bir $w_f^* \in \partial_w f(\tilde{w})$ ve $w_M^* \in K_M^*(\tilde{w})$, $w_0^* \in K_{N_0}^*(\tilde{w})$, $w_1^* \in K_{N_1}^*(\tilde{w})$, $w_2^* \in K_{N_2}^*(\tilde{w})$ vektörleri vardır ki $w_f^* = w_0^* + w_1^* + w_2^* + w_M^*$ eşitliği gerçeklenir. Açıkca

$$w_f^* = w_0^* + w_1^* + w_2^* + \sum_{t=0}^{T-3} w_{M_t}^*, \quad w_{M_t}^* \in K_{M_t}^*(\tilde{w}) \tag{4.2}$$

dır, yani (4.1) probleminin optimal çözümünün $\tilde{w}$ olması denk olarak (4.2) denkleminin sağlanması ile mümkündür. Ayrıca $w_f^* \in \partial_w f(\tilde{w})$ olması için gerek ve yeter koşul $w_f^* = (x_{f0}^*, x_{f1}^*, \ldots, x_{fT}^*)$, $x_{ft}^* \in \partial_x g(\tilde{x}_t, t)$, $t = 3, \ldots, T$ olmasıdır.

Lemma 4.1. M_t polihedral kümenin $\tilde{w}$ noktasındaki dual teğet yönler konisi

$$\begin{aligned} K_{M_t}^*(\tilde{w}) = \Big\{ & w^*(t) : \ x_t^*(t) = -P_0^* \lambda_t, \ x_{t+1}^*(t) = -P_1^* \lambda_t, \ x_{t+2}^*(t) = -P_2^* \lambda_t, \\ & x_{t+3}^*(t) = Q^* \lambda_t, \ x_k^* = 0, \ k \neq t, t+1, t+2, t+3, \ \lambda_t \geq 0, \ \lambda_t \in \mathbb{R}^m, \\ & \big\langle P_0 \tilde{x}_t + P_1 \tilde{x}_{t+1} + P_2 \tilde{x}_{t+2} - Q \tilde{x}_{t+3} - d, \ \lambda_t \big\rangle = 0, \ t = 0, \ldots, T-3 \Big\} \text{ dır.} \end{aligned}$$

İspat. $\widetilde{x}_{t+3} \in F(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}, \widetilde{x}_{t+2})$ için teğet yönler konisi tanımından

$$K_{M_t}(\tilde{w}) = \Big\{\overline{w} : P_0(\tilde{x}_t + \mu\overline{x}_t) + P_1(\tilde{x}_{t+1} + \mu\overline{x}_{t+1}) + P_2(\tilde{x}_{t+2} + \mu\overline{x}_{t+2}) \\ -Q(\tilde{x}_{t+3} + \mu\overline{x}_{t+3}) \leq d \text{ yeterince küçük } \mu > 0,\ t = 0, \ldots, T-3\Big\}, \qquad (4.3)$$

yazılabilir.

$$P_0^i\overline{x}_t + P_1^i\overline{x}_{t+1} + P_2^i\overline{x}_{t+2} - Q_i\overline{x}_{t+3} \leq 0, \qquad (4.4)$$

$$i \in I(\tilde{w}) = \Big\{i : P_0^i\tilde{x}_t + P_1^i\tilde{x}_{t+1} + P_2^i\tilde{x}_{t+2} - Q_i\tilde{x}_{t+3} = d_i\ ,\ i = 1, \ldots, m\Big\}$$

için (4.3) formülünden

$$P_0^i(\tilde{x}_t + \mu\overline{x}_t) + P_1^i(\tilde{x}_{t+1} + \mu\overline{x}_{t+1}) + P_2^i(\tilde{x}_{t+2} + \mu\overline{x}_{t+2}) \\ -Q_i(\tilde{x}_{t+3} + \mu\overline{x}_{t+3}) \leq d_i\ ,\ t = 0, \ldots, T-3$$

elde edilir. $i \notin I(\tilde{w})$ ise (4.4) eşitsizliği yeterince küçük $\mu > 0$ için $(\overline{x}_t, \overline{x}_{t+1}, \overline{x}_{t+2}, \overline{x}_{t+3})$ seçiminden bağımsız olarak sağlanır. $\overline{x}_k$, $k \neq t, t+1, t+2, t+3$ keyfi vektör olduğu için Farkas Teoremi 2.7 uygulanırsa, (4.4) eşitsizliğinden $w^*(t) = (x_0^*(t), x_1^*(t), \ldots, x_T^*(t))$ $\in K_{M_t}^*(\tilde{w})$ olması için gerek ve yeter koşul

$$x_t^*(t) = -\sum_{i \in I(\tilde{w})} P_0^{i*}\lambda_i^t \quad , \quad x_{t+1}^*(t) = -\sum_{i \in I(\tilde{w})} P_1^{i*}\lambda_i^t, \\ x_{t+2}^*(t) = -\sum_{i \in I(\tilde{w})} P_2^{i*}\lambda_i^t \quad , \quad x_{t+3}^*(t) = \sum_{i \in I(\tilde{w})} Q_i^*\lambda_i^t, \quad \lambda_i^t \geq 0, \qquad (4.5)$$

gerçeklenmesidir, burada $P_0^{i*}, P_1^{i*}, P_2^{i*}, Q_i^*$ vektörleri, P_0^i, P_1^i, P_2^i, Q_i vektörlerinin sırası ile transpoze vektörleridir. Sonuç olarak, $i \notin I(\tilde{w})$ için λ_t vektörünün bileşenleri $\lambda_i^t = 0$ alınırsa istenen elde edilir. Ayrıca

$$\left\langle P_0\tilde{x}_t + P_1\tilde{x}_{t+1} + P_2\tilde{x}_{t+2} - Q\tilde{x}_{t+3} - d\ ,\ \lambda_t\right\rangle = 0,\ \lambda_t \geq 0\ ,\ \lambda_t \in \mathbb{R}^m,\ t = 0, \ldots, T-3,$$

olduğundan ispat tamamlanır. ∎

Üçüncü mertebeden polihedral diskret içermeli (P_D) probleminin optimalliği için gerek ve yeter koşullar aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.1. (P_D) probleminin optimal yörüngesinin $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^T$ olması için gerek ve yeter koşul hepsi birden sıfır olmayan ve Euler-Lagrange diskret içermesini

$$x_t^* = P_0^*\lambda_t + P_1^*\lambda_{t-1} + P_2^*\lambda_{t-2} + u_t^*, \quad u_t^* \in \partial g(\tilde{x}_t, t),\ \ t = 0, \ldots, T-3, \\ \partial g(\tilde{x}_0, 0) = \partial g(\tilde{x}_1, 1) = \partial g(\tilde{x}_2, 2) = \{0\},\ x_{t+3}^* = Q^*\lambda_t,\ \lambda_t \geq 0, \\ \lambda_{-1} \equiv \lambda_{-2} \equiv 0\ ,\ \ \left\langle P_0\tilde{x}_t + P_1\tilde{x}_{t+1} + P_2\tilde{x}_{t+2} - Q\tilde{x}_{t+3} - d,\ \lambda_t\right\rangle = 0,$$

ve transversallik koşullarını

$$x^*_{T-2} - P^*_2\lambda_{T-4} - P^*_1\lambda_{T-3} \in \partial g(\tilde{x}_{T-2}, T-2),$$
$$x^*_{T-1} - P^*_2\lambda_{T-3} \in \partial g(\tilde{x}_{T-1}, T-1),$$
$$x^*_T = 0,$$

sağlayan $x^*_t,\ t = 0, \ldots, T-1$ vektörlerinin var olmasıdır.

İspat. $t = 0, 1, 2$ için $w + \lambda\overline{w} \in N_t$ olması ancak $\overline{x}_t = 0$ ile mümkündür, açıkca $K_{N_t}(w) = \{\overline{w} = (\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_T) : \overline{x}_t = 0\},\ t = 0, 1, 2$ dır. $w^*_0 \in K^*_{N_0}(w), w^*_1 \in K^*_{N_1}(w)$, $w^*_2 \in K^*_{N_2}(w)$ için dual teğet yönler koniler hesaplanırsa

$$K^*_{N_0}(w) = \{w^*_0 = (x^*_{00}, \ldots, x^*_{0T}) :\ x^*_{0t} = 0, t \neq 0\},$$
$$K^*_{N_1}(w) = \{w^*_1 = (x^*_{10}, \ldots, x^*_{1T}) :\ x^*_{1t} = 0, t \neq 1\},$$
$$K^*_{N_2}(w) = \{w^*_2 = (x^*_{20}, \ldots, x^*_{2T}) :\ x^*_{2t} = 0, t \neq 2\}$$

elde edilir. O halde Lemma 4.1'den,

$$w^*_0 = (x^*_{00}, 0, \ldots, 0),\ w^*_1 = (0, x^*_{11}, 0 \ldots, 0),\ w^*_2 = (0, 0, x^*_{22}, 0 \ldots, 0),$$
$$w^*(t) = (0, \ldots, 0, x^*_t(t), x^*_{t+1}(t), x^*_{t+2}(t), x^*_{t+3}(t), 0, \ldots, 0),\ t = 0, \ldots, T-3, \quad (4.6)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.6) kullanarak (4.2) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 &= x^*_{00} + x^*_0(0), \\ 0 &= x^*_{11} + x^*_1(0) + x^*_1(1), \\ 0 &= x^*_{22} + x^*_2(0) + x^*_2(1) + x^*_2(2), \end{aligned} \quad (4.7)$$

$$x^*_{ft} = x^*_t(t-3) + x^*_t(t-2) + x^*_t(t-1) + x^*_t(t)\ , \quad t = 3, \ldots, T-3, \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} x^*_{f(T-2)} &= x^*_{T-2}(T-5) + x^*_{T-2}(T-4) + x^*_{T-2}(T-3), \\ x^*_{f(T-1)} &= x^*_{T-1}(T-4) + x^*_{T-1}(T-3), \\ 0 &= x^*_T(T-3), \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Lemma 4.1'den

$$x^*_t(t) = -P^*_0\lambda_t,\ x^*_{t+1}(t) = -P^*_1\lambda_t,\ x^*_{t+2}(t) = -P^*_2\lambda_t,\ x^*_{t+3}(t) = Q^*\lambda_t\ ,\ \lambda_t \geq 0$$

olduğunu biliyoruz. O halde $x^*_{t+3}(t) \equiv x^*_{t+3},\ t = 0, \ldots, T-3,\ x^*_{ft} \equiv u^*_t$ ile gösterilirse (4.8) denkleminden

$$\left\langle P_0\tilde{x}_t + P_1\tilde{x}_{t+1} + P_2\tilde{x}_{t+2} - Q\tilde{x}_{t+3} - d\ ,\ \lambda_t \right\rangle = 0$$

eşitliği ve ayrıca

$$x_t^* = P_0^*\lambda_t + P_1^*\lambda_{t-1} + P_2^*\lambda_{t-2} + u_t^*, \quad u_t^* \in \partial g(\tilde{x}_t, t),$$
$$x_{t+3}^* = Q^*\lambda_t \quad , \ \lambda_t \geq 0 \ , \quad t = 0, \ldots, T-3,$$

polihedral Euler-Lagrange diskret içermesi elde edilir. Diğer taraftan $g(\tilde{x}_0, 0) = g(\tilde{x}_1, 1) = g(\tilde{x}_2, 2) = \{0\}$, $x_{00}^* = x_0^*$, $\lambda_{-1} \equiv \lambda_{-2} \equiv 0$, $x_{11}^* \equiv x_1^*$, $x_{22}^* \equiv x_2^*$ alınırsa ve (4.7) bağıntısı kullanılırsa, (4.8) formülü $t = 0, 1, 2$ için de sağlanır. $x_{ft}^* \equiv u_t^*$ gösterimini kullanarak (4.9) denklemlerinin ilk eşitliğinden,

$$x_{T-2}^* - P_2^*\lambda_{T-4} - P_1^*\lambda_{T-3} \in \partial g(\tilde{x}_{T-2}, T-2)$$

elde edilir. Benzer şekilde $x_{T-1}^* - P_2^*\lambda_{T-3} \in \partial g(\tilde{x}_{T-1}, T-1)$ içermesi ve $\partial g(\tilde{x}_T, T) \equiv 0$ olduğu için $x_T^* = 0$ bulunur. ∎

Sonuç 4.1. Kabul edelim ki üçüncü mertebeden polihedral diskret içermeli (P_D) probleminde amaç fonksiyoneli $\sum_{t=3}^{T} g(x_t, t)$, yani $g(x_T, T) \not\equiv 0$ olsun. Bu ise $x_T^* \neq 0$ ve $x_T^* \in \partial g(x_T, T)$ olduğunu gösterir. O halde $t = T-2,\ T-1,\ T$ anında transversallik koşulları

$$x_{T-2}^* - P_2^*\lambda_{T-4} - P_1^*\lambda_{T-3} \in \partial g(\tilde{x}_{T-2}, T-2),$$
$$x_{T-1}^* - P_2^*\lambda_{T-3} \in \partial g(\tilde{x}_{T-1}, T-1),$$
$$x_T^* \in \partial g(\tilde{x}_T, T),$$

olur. Ayrıca (P_D) probleminde, amaç fonksiyoneli $\overline{g}(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ olmak üzere $\sum_{t=3}^{T-3} g(x_t, t) + \overline{g}(x_{T-2}, x_{T-1}, x_T)$ olsaydı, bu durumda Teorem 4.1'de verilen transversallik koşulu

$$\left(x_{T-2}^* - P_2^*\lambda_{T-4} - P_1^*\lambda_{T-3} \ , \ x_{T-1}^* - P_2^*\lambda_{T-3} \ , \ x_T^*\right) \in \partial\overline{g}(\tilde{x}_{T-2} \ , \ \tilde{x}_{T-1}, \tilde{x}_T)$$

olarak elde edilirdi.

4.1.2. (P_{DA}) Diskret Yaklaşımlı Problemin Optimallik Koşulları

Birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden diferansiyel operatörler, $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde aralık uzunlukları δ olmak üzere,

$$\Delta x(t) = \frac{x(t+\delta) - x(t)}{\delta},$$
$$\Delta^2 x(t) = \frac{x(t+2\delta) - 2x(t+\delta) + x(t)}{\delta^2},$$
$$\Delta^3 x(t) = \frac{x(t+3\delta) - 3x(t+2\delta) + 3x(t+\delta) - x(t)}{\delta^3},$$

şeklinde tanımlansın. (P_C) sürekli problemine göre belirlenen diskret yaklaşım problemini (P_{DA}) ile gösterelim:

$$
\begin{aligned}
& \min \sum_{t=0}^{1-3\delta} \delta g(x(t),t) + \varphi_0\big(x(1-2\delta), \Delta x(1-2\delta), \Delta^2 x(1-2\delta)\big), \\
(P_{DA}) \qquad & P_0 x(t) + P_1 \Delta x(t) + P_2 \Delta^2 x(t) - Q\Delta^3 x(t) \le d, \quad t = 0, \delta, \ldots, 1-3\delta \\
& x(0) = \alpha_0, \\
& \Delta x(0) = \alpha_1, \qquad (4.10) \\
& \Delta^2 x(0) = \alpha_2.
\end{aligned}
$$

Üçüncü mertebeden polihedral diskret yaklaşım (4.10) probleminin optimallik koşullarını belirleyebilmek için aşağıda verilen teoremi ispatlayalım.

Teorem 4.2. Kabul edelim ki $\phi(\cdot,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ polihedral fonksiyonu $\phi(x, v_1, v_2) \equiv \varphi_0\Big(x, \dfrac{v_1 - x}{\delta}, \dfrac{v_2 - 2v_1 + x}{\delta^2}\Big)$ şeklinde tanımlansın ve $(x^0, v_1^0, v_2^0) \in dom\phi$ ve $\Big(x^0, \dfrac{v_1^0 - x^0}{\delta}, \dfrac{v_2^0 - 2v_1^0 + x^0}{\delta^2}\Big) \in dom\varphi_0$ olsun. O halde aşağıda verilen içermeler denktir:

(1) $\Big(\overline{x}^*,\ \overline{v}_1{}^*,\ \overline{v}_2{}^*\Big) \in \partial\phi\big(x^0, v_1^0, v_2^0\big)$,

(2) $\Big(\overline{x}^* + \overline{v}_1{}^* + \overline{v}_2{}^*,\ \delta\overline{v}_1{}^* + 2\delta\overline{v}_2{}^*,\ \delta^2\overline{v}_2{}^*\Big) \in \partial\varphi_0\Big(x^0, \dfrac{v_1^0 - x^0}{\delta}, \dfrac{v_2^0 - 2v_1^0 + x^0}{\delta^2}\Big)$.

İspat. $z_0 = (x^0, v_1^0, v_2^0)$ ve $w_0 = \Big(x^0, \dfrac{v_1^0 - x^0}{\delta}, \dfrac{v_2^0 - 2v_1^0 + x^0}{\delta^2}\Big)$ olsun. $\partial_z\phi(z_0)$ kapalı konveks ve $z_0 \in ri(dom\phi)$ noktasında sınırlı bir kümedir. Subdiferansiyel küme tanımından

$$
\begin{aligned}
\partial_z\phi(z_0) = \Big\{ \big(\overline{x}^*, \overline{v}_1{}^*, \overline{v}_2{}^*\big) : \phi\big(z\big) - \phi\big(z_0\big) \ge\ & \Big\langle \overline{x}^*, x - x^0 \Big\rangle + \Big\langle \overline{v}_1{}^*, v_1 - v_1^0 \Big\rangle \\
& + \Big\langle\ \overline{v}_2{}^*, v_2 - v_2^0 \Big\rangle,\ \forall z = (x, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{3n}, z_0 = (x^0, v_1^0, v_2^0)\ \Big\} \quad (4.11)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\partial\varphi_0\big(w_0\big) = \Big\{ \big(x^*, v_1{}^*, v_2{}^*\big) : \varphi_0\big(w\big) - \varphi_0\big(w_0\big) \ge\ & \Big\langle x^*, x - x^0 \Big\rangle + \Big\langle v_1{}^*, \frac{v_1 - x}{\delta} - \frac{v_1^0 - x^0}{\delta} \Big\rangle \\
& + \Big\langle v_2{}^*, \frac{v_2 - 2v_1 + x}{\delta^2} - \frac{v_2^0 - 2v_1^0 + x^0}{\delta^2} \Big\rangle,\ \forall\ w = \Big(x, \frac{v_1 - x}{\delta}, \frac{v_2 - 2v_1 + x}{\delta^2}\Big) \in \mathbb{R}^{3n}\ \Big\},
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Bu bağıntı tekrar düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
\partial\varphi_0\big(w_0\big) = \Big\{ \big(x^*, v_1{}^*, v_2{}^*\big) : \varphi_0\big(w\big) - \varphi_0\big(w_0\big) \ge\ & \Big\langle x^* - \frac{v_1{}^*}{\delta} + \frac{v_2{}^*}{\delta^2},\ x - x^0 \Big\rangle \\
& + \Big\langle \frac{v_1^*}{\delta} - 2\frac{v_2^*}{\delta^2}\ ,\ v_1 - v_1^0 \Big\rangle + \Big\langle \frac{v_2^*}{\delta^2}\ ,\ v_2 - v_2^0 \Big\rangle,\ \forall w \in \mathbb{R}^{3n}\ \Big\}, \qquad (4.12)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.11) ve (4.12) tanımlarını kullanarak

$$\overline{x}^* = x^* - \frac{{v_1}^*}{\delta} + \frac{{v_2}^*}{\delta^2}, \quad {\overline{v}_1}^* = \frac{v_1^*}{\delta} - 2\frac{v_2^*}{\delta^2}, \quad {\overline{v}_2}^* = \frac{v_2^*}{\delta^2}$$

ya da denk olarak

$$x^* = \overline{x}^* + {\overline{v}_1}^* + {\overline{v}_2}^*, \quad {v_1}^* = \delta{\overline{v}_1}^* + 2\delta{\overline{v}_2}^*, \quad {v_2}^* = \delta^2{\overline{v}_2}^*$$

elde edilir. Açıkca

$$\big(\overline{x}^*, {\overline{v}_1}^*, {\overline{v}_2}^*\big) \in \partial\phi\big(z_0\big) \Leftrightarrow \Big(\overline{x}^* + {\overline{v}_1}^* + {\overline{v}_2}^*,\ \delta{\overline{v}_1}^* + 2\delta{\overline{v}_2}^*,\ \delta^2{\overline{v}_2}^*\Big) \in \partial\varphi_0(w_0)$$

olup ispat tamamlanır. ∎

Teorem 4.3. Üçüncü mertebeden polihedral diskret yaklaşımlı (P_{DA}) probleminde $\{\tilde{x}(t)\}_{t=0}^{1}$ yörüngesinin optimalliği için gerek ve yeter koşul hepsi birden sıfır olmayan Euler-Lagrange diskret içermesini ve transversallik koşulunu sağlayan $\{x^*(t)\}_{t=0}^{1}$ eşlenik vektör yörüngesinin var olmasıdır:

$$(1)\ -\Delta^3 x^*(t) \in P_0^*\lambda(t) - P_1^*\Delta\lambda(t-\delta) + P_2^*\Delta^2\lambda(t-2\delta) + \partial g(\tilde{x}(t), t),$$

$$(2)\ \Big(\Delta^2 x^*(1-2\delta) - P_1^*\lambda(1-3\delta) + P_2^*\Delta\lambda(1-4\delta),\ -\Delta x^*(1-\delta) - P_2^*\lambda(1-3\delta),\ x^*(1)\Big)$$
$$\in \partial\varphi_0\big(\tilde{x}(1-2\delta),\ \Delta\tilde{x}(1-2\delta),\ \Delta^2\tilde{x}(1-2\delta)\big),$$

$$(3)\ \Big\langle P_0\tilde{x}(t) + P_1\Delta\tilde{x}(t) + P_2\Delta^2\tilde{x}(t) - Q\Delta^3\tilde{x}(t) - d, \lambda(t)\Big\rangle = 0, \quad \lambda(t) \geq 0,\ t = 3\delta, \ldots, 1-3\delta.$$

İspat. Öncelikle (4.10) probleminin optimallik gerek ve yeter koşullarını belirlemek için, bu problemi (P_D) problemi formunda tekrar düzenleyelim:

$$\min \sum_{t=0}^{1-3\delta} \delta g\big(x(t), t\big) + \varphi_0\big(x(1-2\delta),\ \Delta x(1-2\delta),\ \Delta^2 x(1-2\delta)\big),$$

$$\begin{aligned}
\Big[\delta^3 P_0 - \delta^2 P_1 + \delta P_2 + Q\Big]x(t) + \Big[\delta^2 P_1 - 2\delta P_2 - 3Q\Big]x(t+\delta) \\
+ \Big[\delta P_2 + 3Q\Big]x(t+2\delta) - Qx(t+3\delta) \leq \delta^3 d\ ,\ \ t = 0, \delta, \ldots, 1-3\delta, \\
x(0) = \alpha_0, \\
x(\delta) = \alpha_0 + \delta\alpha_1, \\
x(2\delta) = \alpha_0 + 2\delta\alpha_1 + \delta^2\alpha_2.
\end{aligned} \tag{4.13}$$

Kabul edelim ki (4.13) probleminin optimal çözümü $\{\tilde{x}(t)\},\ t = 0, \delta, \ldots, 1$ olsun. Teorem 4.1'de verilen Euler-Lagrange diskret içermesi, (4.13) problemi için

$$\begin{aligned}
x^*(t) \in \Big[\delta^3 P_0 - \delta^2 P_1 + \delta P_2 + Q\Big]^*\lambda(t) + \Big[\delta^2 P_1 - 2\delta P_2 - 3Q\Big]^*\lambda(t-\delta) \\
+ \Big[\delta P_2 + 3Q\Big]^*\lambda(t-2\delta) + \delta\partial g(\tilde{x}(t), t)\quad ,\ t = 0, \delta, \ldots, 1-\delta,
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$x^*(t+3\delta) = Q^*\lambda(t) \quad , \ \lambda(t) \geq 0,$$

$$\begin{aligned} \Big\langle \big(\delta^3 P_0 - \delta^2 P_1 + \delta P_2 + Q\big)\tilde{x}(t) + \big(\delta^2 P_1 - 2\delta P_2 - 3Q\big)\tilde{x}(t+\delta) \\ + \big(\delta P_2 + 3Q\big)\tilde{x}(t+2\delta) - Q\tilde{x}(t+3\delta) - \delta^3 d, \ \lambda(t)\Big\rangle = 0 \end{aligned} \tag{4.15}$$

olur. (4.14) içermesini düzenlersek

$$\begin{aligned} x^*(t) - Q^*\lambda(t) + 3Q^*\lambda(t-\delta) - 3Q^*\lambda(t-2\delta) \ \in \ \Big(\delta^3 P_0^* - \delta^2 P_1^* + \delta P_2^*\Big)\lambda(t) \\ + \Big(\delta^2 P_1^* - 2\delta P_2^*\Big)\lambda(t-\delta) + \delta P_2^*\lambda(t-2\delta) + \delta\partial g(\tilde{x}(t), t) \end{aligned}$$

bulunur. $x^*(t+3\delta) = Q^*\lambda(t)$ olduğu için,

$$\begin{aligned} x^*(t) - x^*(t+3\delta) + 3x^*(t+2\delta) - 3x^*(t+\delta) \ \in \ \delta^3 P_0^*\lambda(t) + \delta^2 P_1^*(\lambda(t-\delta) - \lambda(t)) \\ + \delta P_2^*\big(\lambda(t) - 2\lambda(t-\delta) + \lambda(t-2\delta)\big) + \delta\partial g(\tilde{x}(t), t) \end{aligned}$$

elde edilir. Son bağıntıda her tarafı δ^3 e bölersek ve $\delta^2 x^*(t)$, $\delta^2\lambda(t)$ yerine sırasıyla $x^*(t)$ ve $\lambda(t)$ notasyonunu kullanırsak, teoremin polihedral Euler-Lagrange diskret içermesini elde ederiz:

$$-\Delta^3 x^*(t) \in P_0^*\lambda(t) - P_1^*\Delta\lambda(t-\delta) + P_2^*\Delta^2\lambda(t-2\delta) + \partial g(\tilde{x}(t), t).$$

(4.15) denklemi düzenlenirse

$$\Big\langle P_0\tilde{x}(t) + P_1\Delta\tilde{x}(t) + P_2\Delta^2\tilde{x}(t) - Q\Delta^3\tilde{x}(t) - d \ , \ \lambda(t)\Big\rangle = 0 \quad , \ t = 3\delta, \ldots, 1-3\delta$$

bulunur. (4.13) probleminin transversallik koşulunu yazabilmek için Teorem 4.1'i uygularsak,

$$\begin{aligned} x^*(1-2\delta) - \Big[\delta P_2 + 3Q\Big]^*\lambda(1-4\delta) - \Big[\delta^2 P_1 - 2\delta P_2 - 3Q\Big]^*\lambda(1-3\delta) \ \in \ \delta\partial g(\tilde{x}(1-2\delta)), \\ x^*(1-\delta) - \Big[\delta P_2 + 3Q\Big]^*\lambda(1-3\delta) \ \in \ \delta\partial g(\tilde{x}(1-\delta), 1-\delta), \\ x^*(1) \ \in \ \delta\partial g(\tilde{x}(1), 1) \end{aligned} \tag{4.16}$$

olup $x^*(t+3\delta) = Q^*\lambda(t)$ eşitliğini kullanırsak

$$\begin{aligned} x^*(1-2\delta) - 3x^*(1-\delta) + 3x^*(1) - \delta P_2^*\lambda(1-4\delta) - \delta^2 P_1^*\lambda(1-3\delta) \\ + 2\delta P_2^*\lambda(1-3\delta) \ \in \ \delta\partial g(\tilde{x}(1-2\delta), 1-2\delta), \\ x^*(1-\delta) - 3x^*(1) - \delta P_2^*\lambda(1-3\delta) \ \in \ \delta\partial g(\tilde{x}(1-\delta), 1-\delta), \\ x^*(1) \in \delta\partial g(\tilde{x}(1), 1) \end{aligned} \tag{4.17}$$

transversallik koşullarını elde ederiz. (4.13) problemindeki φ_0 fonksiyonu

$$\varphi_0\Big(\tilde{x}(1-2\delta)\ ,\ \Delta\tilde{x}(1-2\delta)\ ,\ \Delta^2\tilde{x}(1-2\delta)\Big) \equiv \phi\Big(\tilde{x}(1-2\delta)\ ,\tilde{x}(1-\delta)\ ,\tilde{x}(1)\Big)$$
$$= \delta\Big(g(\tilde{x}(1-2\delta),1-2\delta) + g(\tilde{x}(1-\delta),1-\delta) + g(\tilde{x}(1),1)\Big)$$

formunda olup (4.17) transversallik koşulu düzenlenirse

$$\Big(x^*(1-2\delta) - 3x^*(1-\delta) + 3x^*(1) - \delta P_2^*\lambda(1-4\delta) + 2\delta P_2^*\lambda(1-3\delta) - \delta^2 P_1^*\lambda(1-3\delta)\ ,$$

$$x^*(1-\delta) - 3x^*(1) - \delta P_2^*\lambda(1-3\delta)\ ,\ x^*(1)\Big) \in \partial\phi\big(\tilde{x}(1-2\delta)\ ,\tilde{x}(1-\delta)\ ,\tilde{x}(1)\big)$$

elde edilir. Bu bağıntıda her tarafı δ^2 ye bölersek,

$$\Big(\frac{x^*(1-2\delta) - 3x^*(1-\delta) + 3x^*(1)}{\delta^2} - \frac{P_2^*\lambda(1-4\delta) - 2P_2^*\lambda(1-3\delta)}{\delta} - P_1^*\lambda(1-3\delta),$$

$$\frac{x^*(1-\delta) - 3x^*(1)}{\delta^2} - \frac{P_2^*\lambda(1-3\delta)}{\delta}\ ,\ \frac{x^*(1)}{\delta^2}\Big) \in \partial\phi\big(\tilde{x}(1-2\delta)\ ,\tilde{x}(1-\delta)\ ,\tilde{x}(1)\big)$$

gerçeklenir. Bu içermeyi φ_0 fonksiyonunun subdiferansiyeli cinsinden ifade etmek için, Teorem 4.2'de verilen denk içermeyi kullanırsak

$$\Big(\frac{x^*(1-2\delta) - 2x^*(1-\delta) + x^*(1)}{\delta^2} - \frac{P_2^*\lambda(1-4\delta) - P_2^*\lambda(1-3\delta)}{\delta} - P_1^*\lambda(1-3\delta),$$
$$\delta\Big(\frac{x^*(1-\delta) - 3x^*(1)}{\delta^2} - \frac{P_2^*\lambda(1-3\delta)}{\delta}\Big) + 2\delta\frac{x^*(1)}{\delta^2}\ ,\ \delta^2\frac{x*(1)}{\delta^2}\Big)$$

$$\in \partial\varphi_0\Big(\tilde{x}(1-2\delta), \Delta\tilde{x}(1-2\delta), \Delta^2\tilde{x}(1-2\delta)\Big)$$

bulunur. O halde (4.13) probleminin transversallik koşulu

$$\Big(\Delta^2 x^*(1-2\delta) - P_1^*\lambda(1-3\delta) + P_2^*\Delta\lambda(1-4\delta)\ ,\ -\Delta x^*(1-\delta) - P_2^*\lambda(1-3\delta)\ ,\ x^*(1)\Big)$$

$$\in \partial\varphi_0\Big(\tilde{x}(1-2\delta), \Delta\tilde{x}(1-2\delta), \Delta^2\tilde{x}(1-2\delta)\Big)$$

formunda elde edilir. ∎

4.1.3. (P_C) Diferansiyel İçermeli Problemin Optimallik Koşulları

Teorem 4.3 ile verilen optimallik koşullarında $\delta \to 0$ için limit alınırsa, elde edilen koşullar üçüncü mertebeden polihedral diferansiyel içermeli (P_C) probleminde $\tilde{x}(t),\ t \in [0,1]$ optimalliği için yeter koşullar olacaktır.

Teorem 4.4. (P_C) probleminde $\tilde{x}(t),\ t \in [0,1]$ yörüngesinin optimal olması için yeter koşul, Euler-Lagrange diferansiyel içermesini

$$(a) -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3} \in P_0^*\lambda(t) - P_1^*\frac{d\lambda(t)}{dt} + P_2^*\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2} + \partial g(\tilde{x}(t),t)\ ,\ \text{h.h.}\ \ t \in [0,1],$$

$$x^*(t) = Q^*\lambda(t),$$

$$(b)\ \Big\langle P_0\tilde{x}(t) + P_1\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + P_2\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} - Q\frac{d^3\tilde{x}(t)}{dt^3} - d\ ,\ \lambda(t)\Big\rangle = 0\ ,\ \text{h.h. } t \in [0,1],$$

ve transversallik koşulunu

$$(c)\ \Big(\frac{d^2x^*(1)}{dt^2} + P_2^*\frac{d\lambda(1)}{dt} - P_1^*\lambda(1)\ ,\ -\frac{dx^*(1)}{dt} - P_2^*\lambda(1)\ ,\ x^*(1)\Big) \in \partial\varphi_0\big(\tilde{x}(1), \tilde{x}'(1), \tilde{x}''(1)\big),$$

sağlayan mutlak sürekli bir $x^*(t)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İspat. (a) koşulunda verilen Euler-Lagrange diferansiyel içermesi ve (c) koşulu tüm uygun çözümler için subdiferansiyel tanımından,

$$g(x(t),t) - g(\tilde{x}(t),t) \geq \Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3} - P_0^*\lambda(t) + P_1^*\frac{d\lambda(t)}{dt} - P_2^*\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}\ , x(t) - \tilde{x}(t)\Big\rangle \quad (4.18)$$

ve

$$\varphi_0\big(x(1), x'(1), x''(1)\big) - \varphi_0\big(\tilde{x}(1), \tilde{x}'(1), \tilde{x}''(1)\big) \geq \Big\langle \frac{d^2x^*(1)}{dt^2} + P_2^*\frac{d\lambda(1)}{dt} - P_1^*\lambda(1)\ ,$$

$$x(1) - \tilde{x}(1)\Big\rangle + \Big\langle -\frac{dx^*(1)}{dt} - P_2^*\lambda(1)\ ,\ x'(1) - \tilde{x}'(1)\Big\rangle + \Big\langle x^*(1)\ ,\ x''(1) - \tilde{x}''(1)\Big\rangle \quad (4.19)$$

şeklinde yazılabilir. (4.18) eşitsizliğinin sağ tarafını düzenlersek

$$\Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3} - P_0^*\lambda(t) + P_1^*\frac{d\lambda(t)}{dt} - P_2^*\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2},\ x(t) - \tilde{x}(t)\Big\rangle = \Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3},\ x(t) - \tilde{x}(t)\Big\rangle$$

$$-\Big\langle \lambda(t), P_0\big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)\Big\rangle + \Big\langle \frac{d\lambda(t)}{dt}, P_1\big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)\Big\rangle - \Big\langle \frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}, P_2\big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)\Big\rangle \quad (4.20)$$

elde edilir. Tüm uygun $x(\cdot)$ çözümleri ve $\lambda(t) \geq 0\ ,\ t \in [0,1]$ için

$$\Big\langle P_0x(t) + P_1\frac{dx(t)}{dt} + P_2\frac{d^2x(t)}{dt^2}, \lambda(t)\Big\rangle \leq \Big\langle Q\frac{d^3x(t)}{dt^3} + d, \lambda(t)\Big\rangle \text{ dır.}$$

Diğer taraftan (b) koşulundan

$$\Big\langle P_0\tilde{x}(t) + P_1\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + P_2\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2}, \lambda(t)\Big\rangle = \Big\langle Q\frac{d^3\tilde{x}(t)}{dt^3} + d, \lambda(t)\Big\rangle$$

yazılabilir. Elde edilen son iki ifade birbirinden çıkarılırsa ve $x^*(t) = Q^*\lambda(t)$ eşitliği kullanılırsa,

$$\Big\langle P_0\big(x(t) - \tilde{x}(t)\big) + P_1\frac{d\big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)}{dt} + P_2\frac{d^2\big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)}{dt^2}\ ,\ \lambda(t)\Big\rangle$$

$$\leq \Big\langle \frac{d^3\big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)}{dt^3}\ ,\ x^*(t)\Big\rangle \quad (4.21)$$

eşitsizliği gerçeklenir. (4.20) denklemi ve (4.21) eşitsizliğinden,

$$\Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3} - P_0^*\lambda(t) + P_1^*\frac{d\lambda(t)}{dt} - P_2^*\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle \geq \Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle$$

$$-\Big\langle\frac{d^3\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^3}, x^*(t)\Big\rangle + \Big\langle P_1\frac{d\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt}, \lambda(t)\Big\rangle + \Big\langle P_2\frac{d^2\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^2}, \lambda(t)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle\frac{d\lambda(t)}{dt}, P_1\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)\Big\rangle - \Big\langle\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}, P_2\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)\Big\rangle$$

bulunur. Bu eşitsizlik tekrar düzenlenirse

$$\begin{aligned}\Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3} - P_0^*\lambda(t) + P_1^*\frac{d\lambda(t)}{dt} - P_2^*\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle &\geq \Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle \\ -\Big\langle\frac{d^3\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^3}, x^*(t)\Big\rangle &+ \frac{d}{dt}\Big[\Big\langle P_1\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big), \lambda(t)\Big\rangle\Big] \\ +\frac{d}{dt}\Big[\Big\langle P_2\frac{d\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt}, \lambda(t)\Big\rangle\Big] &- \frac{d}{dt}\Big[\Big\langle\frac{d\lambda(t)}{dt}, P_2\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)\Big\rangle\Big] \qquad (4.22)\end{aligned}$$

sağlanır. (4.18) ve (4.22) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}g(x(t),t) - g(\tilde{x}(t),t) &\geq \Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle - \Big\langle\frac{d^3\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^3}, x^*(t)\Big\rangle \\ +\frac{d}{dt}\Big[\Big\langle P_1^*\lambda(t) - P_2^*\frac{d\lambda(t)}{dt}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle\Big] &+ \frac{d}{dt}\Big[\Big\langle P_2^*\lambda(t), \frac{d\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt}\Big\rangle\Big] \qquad (4.23)\end{aligned}$$

elde edilir. $x(\cdot)$, $\tilde{x}(\cdot)$ uygun çözüm olduğu dikkate alınarak, (4.23) eşitsizliğinde integral alınırsa

$$\int_0^1 \Big(g(x(t),t) - g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt \geq \int_0^1 \Big[\Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle - \Big\langle\frac{d^3\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^3}, x^*(t)\Big\rangle\Big]dt$$

$$+\Big\langle P_1^*\lambda(1) - P_2^*\frac{d\lambda(1)}{dt}, x(1)-\tilde{x}(1)\Big\rangle + \Big\langle P_2^*\lambda(1), x'(1)-\tilde{x}'(1)\Big\rangle \qquad (4.24)$$

olur. Burada

$$\int_0^1 \Big[\Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle - \Big\langle\frac{d^3\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^3}, x^*(t)\Big\rangle\Big]dt \qquad (4.25)$$

integralini hesaplamak için

$$\Big[\Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle - \Big\langle\frac{d^3\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^3}, x^*(t)\Big\rangle\Big] = -\frac{d}{dt}\Big\langle\frac{d^2x^*(t)}{dt^2}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle$$

$$-\frac{d}{dt}\Big\langle\frac{d^2(x(t)-\tilde{x}(t))}{dt^2}, x^*(t)\Big\rangle + \frac{d}{dt}\Big\langle\frac{dx^*(t)}{dt}, \frac{d(x(t)-\tilde{x}(t))}{dt}\Big\rangle,$$

eşitliğini kullanırsak (4.25) formülünde verilen integral

$$\int_0^1 \Big[\Big\langle -\frac{d^3x^*(t)}{dt^3}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle - \Big\langle \frac{d^3\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^3}, x^*(t)\Big\rangle\Big]dt = -\Big\langle \frac{d^2x^*(1)}{dt^2}, x(1)-\tilde{x}(1)\Big\rangle$$

$$-\Big\langle \frac{d^2\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^2}, x^*(1)\Big\rangle + \Big\langle \frac{dx^*(1)}{dt}, \frac{d\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt}\Big\rangle \qquad (4.26)$$

olur. Dolayısıyla (4.24) eşitsizliğinde (4.26) ifadesi integral yerine yazılırsa

$$\int_0^1 \Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt \geq \Big\langle -\frac{d^2x^*(1)}{dt^2} - P_2^*\frac{d\lambda(1)}{dt} + P_1^*\lambda(1),\ x(1)-\tilde{x}(1)\Big\rangle$$
$$+\Big\langle \frac{dx^*(1)}{dt} + P_2^*\lambda(1),\ x'(1)-\tilde{x}'(1)\Big\rangle - \Big\langle x^*(1),\ x''(1)-\tilde{x}''(1)\Big\rangle \qquad (4.27)$$

elde edilir. (4.19) ve (4.27) eşitsizlikleri toplanırsa,

$$\int_0^1 g(x(t),t)dt + \varphi_0(x(1),x'(1),x''(1)) \geq \int_0^1 g(\tilde{x}(t),t)dt + \varphi_0(\tilde{x}(1),\tilde{x}'(1),\tilde{x}''(1))$$

bulunur, yani tüm uygun $x(t)$ çözümleri için $J_1(x(\cdot))-J_1(\tilde{x}(\cdot)) \geq 0$ sağlanacağından $\tilde{x}(t)$ optimal çözümdür. ∎

Uyarı 4.1. (P_C) problemi için Teorem 4.4'de verilen yörüngenin optimallik yeter koşulları, aynı zamanda $\tilde{x}(t),\ t \in [0,1]$ yörüngesinin optimal olması için gerek koşuldur. Ancak gerek koşul olduğunu ispatlamak için, verilen diferansiyel içermeli polihedral problemde $g(\cdot,t)$ ve $\varphi_0(\cdot,\cdot,\cdot)$ fonksiyonlarının ve F küme değerli dönüşüm olmak üzere

$$F^*(v_3^*;x,v_1,v_2,v_3) = \Big\{\ x^* = -P_0^*\lambda,\ v_1^* = -P_1^*\lambda,\ v_2^* = -P_2^*\lambda,\ v_3^* = Q^*\lambda,\ \lambda \geq 0,$$
$$< P_0x + P_1v_1 + P_2v_2 - Qv_3 - d,\ \lambda >= 0\Big\} \qquad (4.28)$$

şeklinde tanımlanan yerel dual dönüşümün bazı özellikleri, örneğin yerel dual dönüşümün sınırlı ve üstten yarı sürekli olması gibi sağlaması gereklidir. Yerel dual dönüşümün sınırlı olması demek F konveks kapalı küme değerli dönüşüm ve C, $X = V_1 = V_2 = V_3 (X = V_i = \mathbb{R}^n\ i = 1,2,3)$'de kompakt küme olmak üzere onun $X \times V_1 \times V_2$ üzerine izdüşümü $int(domF)$ içinde kalır ve öyle bir K pozitif sayısı vardır ki her $(x,v_1,v_2,v_3) \in C$ için $||F^*(v_3^*;x,v_1,v_2,v_3)|| \leq K||v_3^*||$ eşitsizliği gerçeklenir.

Diğer taraftan $F^*(v_3^*;x,v_1,v_2,v_3)$ yerel dual dönüşümü her v_3^* ve (x,v_1,v_2,v_3) için üstten yarı süreklidir eğer $(x,v_1,v_2) \in$ int(dom F) olmak üzere tüm $x_k \to x$, $v_{ik} \to$

$v_i (i = 1, 2, 3)$, $x_k^* \to x^*$, $v_{ik}^* \to v_i^* (i = 1, 2, 3)$ $(x_k^*, v_{1k}^*, v_{2k}^*) \in F^*(v_{3k}^*; x_k, v_{1k}, v_{2k}, v_{3k})$ dizileri için $(x^*, v_1^*, v_2^*) \in F^*(v_3^*; x, v_1, v_2, v_3)$ gerçeklenirse. Yerel dual dönüşümün sınırlılığı altında $\delta \to 0$ için $x_\delta(t) \to \tilde{x}(t)$ düzgün sınırlıdır ve $g(\cdot, t)$ ve $\varphi_0(\cdot, \cdot, \cdot)$ Lipschitz fonksiyonlardır ve tüm sınırlı kümede $\partial_x g(x, t)$ ve $\partial\varphi_0(x, v_1, v_2)$ düzgün sınırlı ve üstten yarı süreklidir.

Dolayısıyla tüm $x_\delta^*(t)$ yörüngeleri düzgün sınırlı olduğu için $\Delta^i x_\delta^*(t) (i = 1, 2, 3)$ sınırlıdır ve $x_\delta^*(t), t \in [0, 1]$ parçalı lineer sürekli fonksiyon $x_\delta^*(t)$ $t = 0, \delta, \ldots, 1$ noktalarına karşılık δ'ya bağlı olmayan bir sabitle Lipschitz koşulunu sağlar. Pshenichnyi [25] kitabında sadece polihedral problemler için değil daha genel olarak konveks birinci mertebeden diferansiyel içermeli problemlerde elde edilen optimallik yeter koşulların, ünlü Arzela Teoremi'ni kullanarak, aynı zamanda gerek koşul olduğunu ispatlamıştır.

Ancak diferansiyel içermenin mertebesi yükseldikçe işlemlerin uzun olmasından ayrıca fonksiyonlara ve küme değerli dönüşüme ek bazı özellikler getirilmesinden ötürü literatürde, diferansiyel içermeli problemlerin genellikle optimallik yeter koşulları verilir. Bu konu ile ilgili detaylı bilgilere [22, 47, 48, 49] kaynaklarından ulaşılabilir.

4.1.4. (P_{C1}) ve (P_{C2}) Diferansiyel İçermeli Sınır-Değer Problemleri

Aşağıda verilen üçüncü mertebeden polihedral diferansiyel içermeli Lagrange problemini ele alalım.

$$(P_{C1}) \qquad \begin{aligned} &\min J_2(x(\cdot)) = \int_0^1 g(x(t), t)dt && (4.29)\\ &x'''(t) \in F(x(t), x'(t), x''(t)) \quad \text{h.h.} \quad t \in [0, 1], \\ &x(0) \in M_0,\ x'(0) \in M_1,\ x''(0) \in M_2, \\ &x(1) \in N_0,\ x'(1) \in N_1,\ x''(1) \in N_2. && (4.30) \end{aligned}$$

Bu kısımdaki ilk amacımız $[0, 1]$ aralığı üzerinde (4.30) başlangıç ve son nokta koşulu ile üçüncü mertebeden (2.24) diferansiyel içermesini sağlayan ve (P_{C1}) probleminin çözümü olan $J_2(x(\cdot))$ Lagrange fonksiyonelini minimum yapan $\widetilde{x}(t)$ optimal yörüngesi için optimallik koşullarını bulmaktır.

Teorem 4.5. (P_{C1}) probleminde $\tilde{x}(t),\ t \in [0, 1]$ yörüngesinin optimal olması için yeter koşul, Teorem 4.4'de (a) koşulu ile verilen üçüncü mertebeden Euler-Lagrange diferansiyel içermesini ve sırası ile aşağıdaki $t = 0$ ve $t = 1$ noktalarındaki transver-

sallik koşullarını

$$(d)\qquad \frac{d^2x^*(0)}{dt^2}+P_2^*\frac{d\lambda(0)}{dt}-P_1^*\lambda(0)\in K_{M_0}^*\big(\widetilde{x}(0)\big),$$

$$-\frac{dx^*(0)}{dt}-P_2^*\lambda(0)\in K_{M_1}^*\big(\widetilde{x}'(0)\big)\ ,$$

$$x^*(0)\in K_{M_2}^*\big(\widetilde{x}''(0)\big),$$

$$(e)\qquad -\frac{d^2x^*(1)}{dt^2}-P_2^*\frac{d\lambda(1)}{dt}+P_1^*\lambda(1)\in K_{N_0}^*\big(\widetilde{x}(1)\big),$$

$$\frac{dx^*(1)}{dt}+P_2^*\lambda(1)\in K_{N_1}^*\big(\widetilde{x}'(1)\big)\ ,$$

$$-x^*(1)\in K_{N_2}^*\big(\widetilde{x}''(1)\big),$$

sağlayan mutlak sürekli bir $x^*(t)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İspat. (4.23) eşitsizliğinde $[0,1]$ kapalı aralığı üzerinde integral alınırsa

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt\geq\int_0^1\Big[\Big\langle-\frac{d^3x^*(t)}{dt^3},x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle-\Big\langle\frac{d^3\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^3},x^*(t)\Big\rangle\Big]dt$$

$$+\Big\langle P_1^*\lambda(1)-P_2^*\frac{d\lambda(1)}{dt},x(1)-\tilde{x}(1)\Big\rangle-\Big\langle P_1^*\lambda(0)-P_2^*\frac{d\lambda(0)}{dt},x(0)-\tilde{x}(0)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle P_2^*\lambda(1),x'(1)-\tilde{x}'(1)\Big\rangle-\Big\langle P_2^*\lambda(0),x'(0)-\tilde{x}'(0)\Big\rangle \tag{4.31}$$

olur. Eşitsizliğin sağ tarafındaki integral, tüm uygun çözümler göz önüne alındığında

$$\int_0^1\Big[\Big\langle-\frac{d^3x^*(t)}{dt^3},x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle-\Big\langle\frac{d^3\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^3},x^*(t)\Big\rangle\Big]dt=-\Big\langle\frac{d^2x^*(1)}{dt^2},x(1)-\tilde{x}(1)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle\frac{d^2x^*(0)}{dt^2},x(0)-\tilde{x}(0)\Big\rangle-\Big\langle\frac{d^2\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^2},x^*(1)\Big\rangle+\Big\langle\frac{d^2\big(x(0)-\tilde{x}(0)\big)}{dt^2},x^*(0)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle\frac{dx^*(1)}{dt},\frac{d\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt}\Big\rangle-\Big\langle\frac{dx^*(0)}{dt},\frac{d\big(x(0)-\tilde{x}(0)\big)}{dt}\Big\rangle \tag{4.32}$$

olarak yazılabilir. Dolayısıyla (4.31) eşitsizliğinde, (4.32) formülündeki integralin yerine elde edilen eşitliği yazılırsa

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt\geq\Big\langle-\frac{d^2x^*(1)}{dt^2}-P_2^*\frac{d\lambda(1)}{dt}+P_1^*\lambda(1),\ x(1)-\tilde{x}(1)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle\frac{d^2x^*(0)}{dt^2}+P_2^*\frac{d\lambda(0)}{dt}-P_1^*\lambda(0),\ x(0)-\tilde{x}(0)\Big\rangle+\Big\langle\frac{dx^*(1)}{dt}+P_2^*\lambda(1),\ x'(1)-\tilde{x}'(1)\Big\rangle$$

$$-\Big\langle\frac{dx^*(0)}{dt}+P_2^*\lambda(0),x'(0)-\tilde{x}'(0)\Big\rangle-\Big\langle x^*(1),x''(1)-\tilde{x}''(1)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle x^*(0), x''(0) - \tilde{x}''(0)\Big\rangle \tag{4.33}$$

eşitsizliği sağlanır. Ayrıca teoremde verilen (d) ve (e) koşullarından,

$$\Big\langle \frac{d^2x^*(0)}{dt^2} + P_2^*\frac{d\lambda(0)}{dt} - P_1^*\lambda(0)\ ,\ x(0) - \tilde{x}(0)\Big\rangle \geq 0\ ,$$

$$\Big\langle -\frac{dx^*(0)}{dt} - P_2^*\lambda(0)\ ,\ x'(0) - \tilde{x}'(0)\Big\rangle \geq 0,$$

$$\Big\langle x^*(0)\ ,\ x''(0) - \tilde{x}''(0)\Big\rangle \geq 0,$$

$$\Big\langle -\frac{d^2x^*(1)}{dt^2} - P_2^*\frac{d\lambda(1)}{dt} + P_1^*\lambda(1)\ ,\ x(1) - \tilde{x}(1)\Big\rangle \geq 0\ ,$$

$$\Big\langle \frac{dx^*(1)}{dt} + P_2^*\lambda(1)\ ,\ x'(1) - \tilde{x}'(1)\Big\rangle \geq 0,$$

$$\Big\langle -x^*(1)\ ,\ x''(1) - \tilde{x}''(1)\Big\rangle \geq 0,$$

yazılabilir. Dolayısıyla (4.33) eşitsizliği tekrar düzenlenirse

$$\int_0^1 \Big(g(x(t),t) - g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt \geq 0 \tag{4.34}$$

bulunur, yani tüm uygun $x(t)$ çözümleri için $J_2(x(\cdot)) - J_2(\tilde{x}(\cdot)) \geq 0$ sağlanacağından $\tilde{x}(t)$ optimal çözümdür. ∎

(P_{C1}) probleminin bazı özel hallerine ilişkin değişen transversallik koşulları Teorem 4.5'in sonuçları olarak aşağıda verilmektedir.

Şimdi yukarıdaki (P_{C1}) probleminde (4.30) sınır-değer koşullarını ve (2.24) diferansiyel içermesini gerçekleyen ancak amaç fonksiyoneli (2.23) olan Bolza problemini, daha açık yazmak gerekirse

$$(P_{C2}) \qquad \begin{aligned} \min J_1(x(\cdot)) &= \int_0^1 g(x(t),t)dt + \varphi_0(x(1),x'(1),x''(1)) \\ x'''(t) &\in F(x(t),x'(t),x''(t)) \quad \text{h.h.} \quad t\in[0,1], \\ x(0) &\in M_0,\ x'(0)\in M_1,\ x''(0)\in M_2, \\ x(1) &\in N_0,\ x'(1)\in N_1,\ x''(1)\in N_2, \end{aligned}$$

problemini ele alalım. (P_{C2}) probleminde $t=0$ ve $t=1$ noktalarındaki transversallik koşullarını aşağıdaki Sonuç 4.2'de verelim.

Sonuç 4.2. (P_{C2}) probleminde $\tilde{x}(t),\ t \in [0,1]$ yörüngesinin optimalliği için $t=0$ ve $t=1$ noktalarındaki transversallik koşulları

$$(f) \qquad \frac{d^2x^*(0)}{dt^2} + P_2^*\frac{d\lambda(0)}{dt} - P_1^*\lambda(0) \in K_{M_0}^*\big(\widetilde{x}(0)\big),$$

$$-\frac{dx^*(0)}{dt} - P_2^*\lambda(0) \in K_{M_1}^*\big(\widetilde{x}'(0)\big)\ ,$$

$$x^*(0) \in K_{M_2}^*\big(\widetilde{x}''(0)\big),$$

$$(g) \qquad \Big(\frac{d^2x^*(1)}{dt^2},\ -\frac{dx^*(1)}{dt},\ x^*(1)\Big) \in \partial\varphi_0\big(\widetilde{x}(1),\widetilde{x}'(1),\widetilde{x}''(1)\big)$$

$$-P_2^*\frac{d\lambda(1)}{dt} + P_1^*\lambda(1) \in K_{N_0}^*\big(\widetilde{x}(1)\big)\ ,\ P_2^*\lambda(1) \in K_{N_1}^*\big(\widetilde{x}'(1)\big)\ ,$$

$$-x^*(1) \in K_{N_2}^*\big(\widetilde{x}''(1)\big)\ ,$$

şeklindedir.

İspat. Gerçekten $\Big(\frac{d^2x^*(1)}{dt^2}, -\frac{dx^*(1)}{dt}, x^*(1)\Big) \in \partial\varphi_0(\widetilde{x}(1),\widetilde{x}'(1),\widetilde{x}''(1))$ içermesi sağlandığı için, subdiferansiyel tanımından

$$\varphi_0\big(x(1),x'(1),x''(1)\big) - \varphi_0\big(\tilde{x}(1),\tilde{x}'(1),\tilde{x}''(1)\big) \geq \Big\langle \frac{d^2x^*(1)}{dt^2}, x(1)-\tilde{x}(1)\Big\rangle$$
$$+\Big\langle -\frac{dx^*(1)}{dt}\ ,\ x'(1)-\tilde{x}'(1)\Big\rangle + \Big\langle x^*(1)\ ,\ x''(1)-\tilde{x}''(1)\Big\rangle \qquad (4.35)$$

eşitsizliği yazılabilir. (4.33) ve (4.35) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa ve diğer transversallik koşulları dikkate alınırsa

$$\int_0^1 g(x(t),t)dt + \varphi_0(x(1),x'(1),x''(1)) \geq \int_0^1 g(\tilde{x}(t),t)dt + \varphi_0(\tilde{x}(1),\tilde{x}'(1),\tilde{x}''(1))$$

elde edilir. Tüm uygun $x(t)$ çözümleri için $J_1(x(\cdot)) - J_1(\tilde{x}(\cdot)) \geq 0$ gerçekleneceğinden $\tilde{x}(t)$ optimal çözümdür. ∎

Örnek 4.1. Teorem 4.5'in bir uygulaması olarak aşağıdaki problemin optimalliği için elde edilen gerek koşulların varyasyon hesabında önemli bir yeri olan Euler-Poisson denklemini verdiği gösterilmiştir.

$$\min J_3(x(\cdot)) = \int_0^1 L(x(t),x'(t),x''(t),t)dt$$
$$(P_L) \qquad x'''(t) \in F(x(t),x'(t),x''(t)) \quad \text{h.h.} \quad t \in [0,1],$$
$$x(0)=\alpha_0,\ x'(0)=\alpha_1,\ x''(0)=\alpha_2,$$
$$x(1)=\beta_0,\ x'(1)=\beta_1,\ x''(1)=\beta_2,$$

burada F polihedral küme değerli bir dönüşüm ve L Lagrange fonksiyonu $x(t)$ nin ikinci mertebeden türevlerini içeren reel değerli bir fonksiyon, $x(\cdot) \in C^2([0,1])$, ve α_i, β_i, $i = 0,1,2$ sabit vektörler olsun. Ayrıca yazım kolaylığı açısından

$$\frac{\partial L}{\partial x^{(k)}} = \frac{\partial L\big(\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t), \widetilde{x}''(t)\big)}{\partial x^{(k)}},\ k = 0,1,2,$$

şeklinde gösterelim ve

$$L(x, v_1, v_2) - L\big(\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t), \widetilde{x}''(t)\big) \geq \Big\langle \frac{\partial L}{\partial x},\ x - \widetilde{x}(t) \Big\rangle + \Big\langle \frac{\partial L}{\partial x'},\ v_1 - \widetilde{x}'(t) \Big\rangle$$
$$+ \Big\langle \frac{\partial L}{\partial x''},\ v_2 - \widetilde{x}''(t) \Big\rangle \quad ,\forall\ (x, v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{3n},$$

eşitsizliğinin gerçeklendiğini kabul edelim. O halde Teorem 4.2 [36] nedeniyle $\widetilde{x}(t)$ yörüngesinin optimalliği için aşağıda verilen Euler- Lagrange içermesi sağlanır:

$$\Big(\frac{d^3x^*(t)}{dt^3} + \frac{d\psi_2^*(t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial x}\ ,\ \ \psi_2^*(t) + \frac{d\psi_1^*(t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial x'}\ ,\ \ \psi_1^*(t) + \frac{\partial L}{\partial x''}\Big)$$
$$\in F^*(x^*(t); (\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t), \widetilde{x}''(t), \widetilde{x}'''(t)), t). \tag{4.36}$$

Burada $\psi_1^*(t)$, $\psi_2^*(t)$ mutlak sürekli fonksiyonlar ve F^* ise F dönüşümünün dual dönüşümüdür. (P_L) probleminde dom $F(\cdot,t) \equiv (\mathbb{R}^n)^3$ ve $F(\cdot,t) \equiv \mathbb{R}^n$ olduğu için $F^* \equiv \{(0,0,0)\}$ olup $x^* = v_1^* = v_2^* = 0$ dır. Bu ise $x^{*(k)}(t) \equiv 0$, $t \in [0,1]$, $k = 0,1,2,3$ anlamına gelir. Dolayısıyla, (4.36) içermesinden

$$\frac{d\psi_2^*(t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial x} = 0\ , \quad \psi_2^*(t) + \frac{d\psi_1^*(t)}{dt} + \frac{\partial L}{\partial x'} = 0\ , \quad \psi_1^*(t) + \frac{\partial L}{\partial x''} = 0 \tag{4.37}$$

bağıntıları gerçeklenir. (4.37) denklemlerinde düzenleme yapılırsa

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\Big(\frac{\partial L}{\partial x'}\Big) + \frac{d^2}{dt^2}\Big(\frac{\partial L}{\partial x''}\Big) = 0 \tag{4.38}$$

Euler-Poisson denklemi elde edilir.

Uyarı 4.2. Uyarı 4.1'den (P_C) problemindeki F polihedral küme değerli dönüşümün dual dönüşümü (4.28) denklemi ile verildiğini biliyoruz. O halde $u(t) \in \partial g(\widetilde{x}(t), t)$ ve $t \in [0,1]$ olmak üzere

$$\Big(-P_0^*\lambda(t) - u(t),\ -P_1^*\lambda(t),\ -P_2^*\lambda(t)\Big) \in F^*\big(x^*(t); (\widetilde{x}(t), \widetilde{x}'(t), \widetilde{x}''(t), \widetilde{x}'''(t))\big)$$
$$-\partial g(\widetilde{x}(t), t) \times (0,0)$$

gerçeklenir. Teorem 4.2 [36] nedeniyle

$$-P_0^*\lambda(t) - u(t) = \frac{d^3x^*(t)}{dt^3} + \frac{d\psi_2^*(t)}{dt}\ , \quad -P_1^*\lambda(t) = \psi_2^*(t) + \frac{d\psi_1^*(t)}{dt}\ , \quad -P_2^*\lambda(t) = \psi_1^*(t)$$

olup bu denklemler düzenlenirse

$$-\frac{d^3x^*(t)}{dt^3} \in P_0^*\lambda(t) - P_1^*\frac{d\lambda(t)}{dt} + P_2^*\frac{d^2\lambda(t)}{dt^2} + \partial g(\tilde{x}(t), t)$$

elde edilir. Bu ise Teorem 4.4'ün (a) şıkkında verilen Euler-Lagrange içermesidir. Daha açık olarak ifade etmek gerekirse elde edilen bu içerme en sade halde (P_L) Lagrange problemi için bulunan Euler-Lagrange denkleminin bir genellemesidir. O nedenle bu tip içermeler Euler-Lagrange içermesi olarak adlandırılır [50].

Uyarı 4.3. (P_L) problemi için, $M_k = \{\alpha_k\}$ ve $N_k = \{\beta_k\},\ k = 0, 1, 2$ olarak alınırsa teğet yönler konisi tanımından

$$K_{M_k}\Big(\widetilde{x}^{(k)}(0)\Big) = \{0\} \quad \text{ve} \quad K_{N_k}\Big(\widetilde{x}^{(k)}(1)\Big) = \{0\},\ k = 0, 1, 2,$$

elde edilir. Dolayısıyla buradan

$$K^*_{M_k}\Big(\widetilde{x}^{(k)}(0)\Big) = \mathbb{R}^n \quad \text{ve} \quad K^*_{N_k}\Big(\widetilde{x}^{(k)}(1)\Big) = \mathbb{R}^n,\ k = 0, 1, 2,$$

olduğu açıktır. O halde $t = 0$ ve $t = 1$ anında (P_L) probleminin transversallik koşullarını vermek gereksizdir.

Örnek 4.2. Teorem 4.5'in bir diğer uygulaması olarak aşağıdaki lineer optimal kontrol problemini inceleyelim:

$$\begin{aligned}
&\min J_1(x(\cdot)) = \int_0^1 g(x(t), t)dt + \varphi_0(x(1), x'(1), x''(1)) \\
&\quad x'''(t) \in F(x(t), x'(t), x''(t)) \quad \text{h.h.} \quad t \in [0, 1], \\
&\quad F(x, v_1, v_2) = \{v_3 :\ v_3 = A_0x + A_1v_1 + A_2v_2 + Bu,\ u \in U\} \qquad (4.39) \\
&\quad x(0) = \alpha_0,\ x'(0) = \alpha_1,\ x''(0) = \alpha_2,
\end{aligned}$$

burada $g(\cdot, t)$ ve φ_0 sürekli diferansiyellenebilir polihedral fonksiyonlar, A_i, $i = 0, 1, 2$ ve B sırası ile $n \times n$ ve $n \times r$ boyutlu matrisler ve $U \subseteq \mathbb{R}^r$ polihedral bir küme olsun. $\widetilde{u}(t) \in U$ kontrol parametresine karşılık gelen ve $J_1[x(\cdot)]$ fonksiyonelini minimize eden $\widetilde{x}(t)$ yörüngesinin optimallik koşulları aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

Sonuç 4.3. $\widetilde{x}(t)$ yörüngesinin ve $\widetilde{u}(t)$ kontrol parametresinin (4.39) probleminin çözümü olması için yeter koşul aşağıda verilen (4.40) diferansiyel denklemini, (4.41) transversallik koşullarını ve (4.42) Weierstrass-Pontryagin koşulunu sağlayan mutlak sürekli bir $x^*(t)$ fonksiyonunun var olmasıdır:

$$-\frac{d^3x^*(t)}{dt^3} = A_0^*x^*(t) - A_1^*\frac{dx^*(t)}{dt} + A_2^*\frac{d^2x^*(t)}{dt^2} + g'(\tilde{x}(t), t)\ ,\ \text{h.h.}\ t \in [0, 1], \quad (4.40)$$

$$\begin{aligned}
\frac{d^2x^*(1)}{dt^2} &= A_1^*x^*(1) - A_2^*\frac{dx^*(1)}{dt} + \varphi'_x(\widetilde{x}(1), \widetilde{x}'(1), \widetilde{x}''(1)) \ , \\
\frac{dx^*(1)}{dt} &= -A_2^*x^*(1) - \varphi'_{v_1}(\widetilde{x}(1), \widetilde{x}'(1), \widetilde{x}''(1)) \ , \\
x^*(1) &= \varphi'_{v_2}(\widetilde{x}(1), \widetilde{x}'(1), \widetilde{x}''(1)) \ ,
\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\Big\langle B\widetilde{u}(t),\ x^*(t)\Big\rangle = \sup_{u\in U}\Big\langle Bu,\ x^*(t)\Big\rangle. \tag{4.42}$$

İspat. (4.39) probleminde tanımlanan küme değerli dönüşümü

$$\begin{aligned}
F(x, v_1, v_2) = \{v_3 :\ & A_0x + A_1v_1 + A_2v_2 - Iv_3 \ \leq\ -Bu \ , \\
& -A_0x - A_1v_1 - A_2v_2 + Iv_3 \ \leq\ Bu \ ,\ u \in U\}
\end{aligned} \tag{4.43}$$

şeklinde yazabiliriz. (4.43) bağıntısının ilk eşitsizliğinde Teorem 4.4'ü uygularsak $x^*(t) = \lambda(t)$ olup bu eşitliği dikkate alırsak

$$-\frac{d^3x^*(t)}{dt^3} - A_0^*x^*(t) + A_1^*\frac{dx^*(t)}{dt} - A_2^*\frac{d^2x^*(t)}{dt^2} = g'(\tilde{x}(t), t) \ ,\ \text{h.h.}\ \ t \in [0, 1]$$

bulunur. Ayrıca Teorem 4.4'de verilen (c) transversallik koşulunu kullanarak, aşağıdaki bağıntıları elde edebiliriz:

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2x^*(1)}{dt^2} - A_1^*x^*(1) + A_2^*\frac{dx^*(1)}{dt} = \varphi'_x(\widetilde{x}(1), \widetilde{x}'(1), \widetilde{x}''(1)) \ , \\
&-\frac{dx^*(1)}{dt} - A_2^*x^*(1) = \varphi'_{v_1}(\widetilde{x}(1), \widetilde{x}'(1), \widetilde{x}''(1)) \ , \\
&x^*(1) = \varphi'_{v_2}(\widetilde{x}(1), \widetilde{x}'(1), \widetilde{x}''(1)) \ .
\end{aligned}$$

Tüm uygun $x(t)$ çözümü ve $u(t)$, $t \in [0, 1]$ kontrol parametresi için

$$\Big\langle A_0x(t) + A_1\frac{dx(t)}{dt} + A_2\frac{d^2x(t)}{dt^2} - \frac{d^3x(t)}{dt^3} \ ,\ x^*(t)\Big\rangle \leq \Big\langle -Bu \ ,\ x^*(t)\Big\rangle$$

gerçeklenir. Diğer taraftan Teorem 4.4'in (b) koşulundan

$$\Big\langle A_0\tilde{x}(t) + A_1\frac{d\tilde{x}(t)}{dt} + A_2\frac{d^2\tilde{x}(t)}{dt^2} - \frac{d^3\tilde{x}(t)}{dt^3} \ ,\ x^*(t)\Big\rangle = \Big\langle -B\tilde{u}(t) \ ,\ x^*(t)\Big\rangle$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla

$$\Big\langle B\widetilde{u}(t),\ x^*(t)\Big\rangle = \sup_{u\in U}\Big\langle Bu,\ x^*(t)\Big\rangle$$

elde edilir. Ayrıca (4.43) bağıntısında ikinci eşitsizlik için $x^*(t) = -\lambda(t)$ olup benzer yol takip edilirse ispat tamamlanır. ∎

4.2. YÜKSEK MERTEBEDEN POLİHEDRAL DİSKRET VE DİFERANSİYEL İÇERMELİ PROBLEMLER

Buraya kadar üçüncü mertebeden polihedral optimizasyon problemlerini inceledik. Kullandığımız benzer yöntemlerle şimdi yüksek mertebeden (s. mertebeden) (PDs) diskret ve (PCs) diferansiyel içermeli polihedral optimizasyon problemlerinin optimallik koşulları verilecektir.

4.2.1. (PDs) Diskret İçermeli Problemin Optimallik Koşulları

Aşağıda verilen lemma s. mertebeden polihedral diskret içermeli problemde optimallik koşullarını verebilmek için yardımcı teorem niteliğindedir.

Lemma 4.2. $M_t = \left\{ w = (x_0, \ldots, x_T) : \sum_{k=0}^{s-1} P_k x_{t+k} - Q x_{t+s} \leq d \right\},\ t = 0, \ldots, T-s,$ şeklinde tanımlanan polihedral kümenin $\tilde{w} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_T)$ noktasındaki dual teğet yönler konisi aşağıda verilmektedir:

$$K^*_{M_t}(\tilde{w}) = \Big\{ w^*(t) : x^*_{t+k}(t) = -P^*_k \lambda_t,\ k = 0, 1, \ldots, s-1,\ \lambda_t \geq 0,\ \lambda_t \in \mathbb{R}^m, x^*_{t+s}(t) = Q^* \lambda_t,$$

$$x^*_l = 0\ ,\ l \neq t, t+1, \ldots, t+s, \quad \Big\langle \sum_{k=0}^{s-1} P_k \widetilde{x}_{t+k} - Q\widetilde{x}_{t+s} - d\ ,\ \lambda_t \Big\rangle = 0, \quad t = 0, 1, \ldots, T-s \Big\}.$$

İspat. Teğet yönler konisinin tanımından $\widetilde{x}_{t+s} \in F(\widetilde{x}_t, \widetilde{x}_{t+1}, \ldots, \widetilde{x}_{t+s-1})$ için

$$K_{M_t}(\tilde{w}) = \Big\{ \overline{w} = (\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_T) : \sum_{k=0}^{s-1} P_k(\tilde{x}_{t+k} + \mu \overline{x}_{t+k}) - Q(\tilde{x}_{t+s} + \mu \overline{x}_{t+s}) \leq d$$

$$\text{yeterince küçük } \mu > 0,\ t = 0, 1, \ldots, T-s \Big\} \tag{4.44}$$

yazılabilir. $i \in I(\tilde{w}) = \left\{ i : \sum_{k=0}^{s-1} P^i_k \tilde{x}_{t+k} - Q_i \tilde{x}_{t+s} = d_i\ ,\ i = 1, \ldots, m \right\}$ olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{s-1} P^i_k \overline{x}_{t+k} - Q_i \overline{x}_{t+s} \leq 0 \tag{4.45}$$

için (4.44) formülünden

$$\sum_{k=0}^{s-1} P^i_k (\tilde{x}_{t+k} + \mu \overline{x}_{t+k}) - Q_i (\tilde{x}_{t+s} + \mu \overline{x}_{t+s}) \leq d_i\ ,\ t = 0, \ldots, T-s$$

elde edilir. Eğer $i \notin I(\tilde{w})$ ise (4.44) bağıntısı yeterince küçük μ için, $(\overline{x}_t, \overline{x}_{t+1}, \ldots, \overline{x}_{t+s})$ seçiminden bağımsız olarak sağlanır. $\overline{x}_l$, $l \neq t, t+1, t+2, \ldots,\ t+s$ keyfi olduğu için,

Farkas Teoremi 2.7 uygulanırsa (4.45) eşitsizliğinden $w^*(t) = \left(x_0^*(t), x_1^*(t), \ldots, x_T^*(t)\right) \in K_{M_t}^*(\tilde{w})$ olması için gerek ve yeter koşul

$$x_{t+k}^*(t) = -\sum_{i \in I(\tilde{w})} P_k^{i*} \lambda_i^t \ , \ k = 0, 1, \ldots, s-1, \ x_{t+s}^*(t) = \sum_{i \in I(\tilde{w})} Q_i^* \lambda_i^t, \quad \lambda_i^t \geq 0 \quad (4.46)$$

sağlanmasıdır. Burada P_k^{i*}, Q_i^* vektörleri P_k^i ve $Q_i, k = 0, 1, \ldots, s-1$ vektörlerinin sırası ile transpoze vektörleridir. Sonuç olarak $i \notin I(\tilde{w})$ için λ_t vektörünün bileşenleri $\lambda_i^t = 0$ alınırsa istenen elde edilir. Ayrıca

$$\left\langle \sum_{k=0}^{s-1} P_k \widetilde{x}_{t+k} - Q\widetilde{x}_{t+s} - d \ , \ \lambda_t \right\rangle = 0 \ , \quad t = 0, \ldots, T-s$$

olduğundan ispat tamamlanır. ∎

(PDs) problemini konveks optimizasyon problemine dönüştürmek için kabul edelim ki A matrisi $m \times n$ boyutlu $P_0, P_1, \ldots, P_{s-1}, -Q$ ve 0 blok matrislerinden oluşan $m(T-s+1) \times n(T+1)$ boyutlu bir matris ve D matrisi $m(T-s+1)$ boyutlu bir sütun vektör, açık yazmak gerekirse

$$A = \begin{pmatrix} P_0 & P_1 & \cdots & P_{s-1} & -Q & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & P_0 & P_1 & \cdots & P_{s-1} & -Q & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & P_0 & P_1 & \cdots & P_{s-1} & -Q \end{pmatrix} \ , \quad D = \begin{pmatrix} d \\ \vdots \\ \vdots \\ d \end{pmatrix}$$

olsun. Ayrıca $M = \{w = (x_0, \ldots, x_T) : Aw \leq D\}$ ve $N_k = \{w = (x_0, \ldots, x_T) : x_k = \tilde{\theta}_k\}$, $k = 0, 1, \ldots, s-1$, kümeleri tanımlansın. Bu dönüşüm aracılığı ile (PDs) problemi aşağıda verilen konveks optimizasyon problemine indirgeyelim:

$$\min f(w) = \sum_{t=s}^{T-1} g(x_t, t) \ , \ w = (x_0, x_1, \ldots, x_T) \in \mathbb{R}^{n(T+1)} \quad (4.47)$$

$$w \in M \cap N_k \ , k = 0, 1, \ldots, s-1, \quad M = \bigcap_{t=0}^{T-s} M_t.$$

Böylece (2.26)-(2.28) probleminde $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^T$ yörüngesinin optimallik koşullarını bulmak yerine denk olarak (4.47) probleminde $\widetilde{w}$ vektörünün optimallik koşullarını belirlemek yeterlidir.

M kümesinin $\widetilde{w}$ noktasındaki $K_M(\tilde{w}) = \{\overline{w} = (\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_T) : \ \tilde{w} + \mu\overline{w} \in M \ , \ \mu \geq 0\}$ teğet yönler konisinin dual konisi $K_M^*(\tilde{w}) = \{w^* : \ \langle \overline{w}, w^* \rangle \geq 0, \ \forall \ \overline{w} \in K_M(\tilde{w})\}$

şeklinde tanımlanır. $K_{M_t}(\tilde{w}), t = 0, \ldots, T-s$, teğet yönler konisi polihedral bir konidir ve Teorem 2.8'den $K^*_M(\tilde{w}) = \sum_{t=0}^{T-s} K^*_{M_t}(\tilde{w})$ eşitliği sağlanır. Dolayısıyla Teorem 2.25'den öyle bir $w^*_f \in \partial_w f(\tilde{w})$, $w^*_M \in K^*_M(\tilde{w})$ ve $w^*_k \in K^*_{N_k}(\tilde{w}),\ k = 0, 1, \ldots, s-1$ vektörleri vardır ki

$$w^*_f = \sum_{k=0}^{s-1} w^*_k + \sum_{t=0}^{T-s} w^*_{M_t}, \quad w^*_{M_t} \in K^*_{M_t}(\tilde{w}) \tag{4.48}$$

gerçeklenir. Böylece (4.47) probleminin optimal çözümünün $\tilde{w}$ olması denk olarak (4.48) denkleminin sağlanması ile mümkündür. Ayrıca $w^*_f = (x^*_{f0}, x^*_{f1}, \ldots, x^*_{fT}) \in \partial_w f(\tilde{w})$ olması için gerek ve yeter koşul $x^*_{ft} \in \partial_x g(\tilde{x}_t, t)$, $t = s, \ldots, T$ olmasıdır.

Ayrıca N_k kümelerinin w noktasındaki teğet yönler konisi $K_{N_k}(w) = \{\overline{w} = (\overline{x}_0, \ldots, \overline{x}_T) : \overline{x}_k = 0\}$ olup bu koninin dual konisi $k = 0, 1, \ldots, s-1$ olmak üzere

$$K^*_{N_k}(w) = \left\{ w^*_k = (x^*_{k0}, \ldots, x^*_{kT}) :\ x^*_{0t} = 0, t \neq k \right\} \tag{4.49}$$

dır. Elde edilen bu bilgilerden sonra (PDs) probleminin optimallik gerek ve yeter koşulları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.6. (PDs) probleminde $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^T$ yörüngesinin optimalliği için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen Euler-Lagrange diskret içermesini

$$\begin{gathered} x^*_t = \sum_{k=0}^{s-1} P^*_k \lambda_{t-k} + u^*_t, \quad u^*_t \in \partial g(\tilde{x}_t, t),\ \ t = 0, \ldots, T-s, \\ \partial g(\tilde{x}_k, k) = \{0\},\ k = 0, 1, \ldots, s-1, \\ x^*_{t+s} = Q^* \lambda_t,\ \lambda_t \geq 0,\ \lambda_{-r} \equiv 0\ ,\ r = 1, 2, \ldots, s-1, \\ \left\langle \sum_{k=0}^{s-1} P_k \tilde{x}_{t+k} - Q\tilde{x}_{t+s} - d\ ,\ \lambda_t \right\rangle = 0, \end{gathered}$$

ve transversallik koşullarını

$$\begin{gathered} x^*_{T-s+r} - \sum_{j=0}^{s-1-r} P^*_{r+j} \lambda_{T-s-j} \ \in\ \partial g(\tilde{x}_{T-s+r}\ ,\ T-s+r),\ r = 1, 2, \ldots, s-1, \\ x^*_T = 0, \end{gathered}$$

sağlayan hepsi birden sıfır olmayan $x^*_t,\ t = 0, \ldots, T-1$ vektörlerinin var olmasıdır.

İspat. (4.49) formülü ve Lemma 4.2 kullanılırsa,

$$w^*_0 = (x^*_{00}, 0, \ldots, 0),\ w^*_1 = (0, x^*_{11}, 0 \ldots, 0)\ , \ldots,\ w^*_{s-1} = (0, 0, \ldots, x^*_{(s-1)(s-1)}, 0,\ \ldots\ , 0),$$

$$w^*(t) = \big(0, \ldots, 0, x^*_t(t), x^*_{t+1}(t), \ldots, x^*_{t+s}(t), 0, \ldots, 0\big),\ t = 0, \ldots, T-s,$$

yazılabilir. (4.48) formülünden faydalanarak aşağıdaki bağıntılar elde edilir:

$$x^*_{00} + x^*_0(0) = 0,$$

$$x^*_{11} + x^*_1(0) + x^*_1(1) = 0, \tag{4.50}$$

$$\vdots$$

$$x^*_{(s-1)(s-1)} + x^*_{s-1}(0) + x^*_{s-1}(1) + \cdots + x^*_{s-1}(s-1) = 0,$$

$$x^*_{ft} = x^*_t(t-s) + x^*_t(t-(s-1)) + x^*_t(t-(s-2)) + \cdots + x^*_t(t)\ ,\ t = s, \ldots, T-s, \tag{4.51}$$

$$\sum_{j=0}^{s-r} x^*_{T-s+r}(T-s-j) = \ x^*_{f(T-s+r)}\ , \quad r = 1, 2, \ldots, s-1,$$

$$x^*_T(T-s) \ = \ 0. \tag{4.52}$$

$x^*_{t+s}(t) \equiv x^*_{t+s}$ ve $x^*_{ft} \equiv u^*_t$, $t = 1, \ldots, T-s$, gösterimi ile (4.51) formülü ve Lemma 4.2 dikkate alınırsa teoremin Euler-Lagrange diferansiyel içermesi elde edilir:

$$x^*_t \ = \ \sum_{k=0}^{s-1} P^*_k \lambda_{t-k} + u^*_t, \quad u^*_t \in \partial g(\tilde{x}_t, t),$$
$$x^*_{t+s} \ = \ Q^* \lambda_t \quad , \ \lambda_t \geq 0\ , \quad t = 0, \ldots, T-s,$$

$$\left\langle \sum_{k=0}^{s-1} P_k \tilde{x}_{t+k} - Q\tilde{x}_{t+s} - d,\ \lambda_t \right\rangle = 0.$$

Ayrıca $\partial g(\tilde{x}_k, k) = \{0\},\ k = 0, 1, \ldots, s-1$ olduğu açıktır. Uygun gösterim için $x^*_{kk} \equiv x^*_k$, $\lambda_{-r} \equiv 0\ ,\ r = 1, 2, \ldots, s-1$, alınırsa (4.50) bağıntılarından (4.51) formülü $t = 0, 1, \ldots, s-1$ için de gerçeklendiği gözlemlenebilir. Diğer taraftan (4.52) denkleminden

$$x^*_{T-s+r} - \sum_{j=0}^{s-1-r} P^*_{r+j} \lambda_{T-s-j} \ \in \ \partial g\big(\tilde{x}_{T-s+r}, T-s+r\big),\ r = 1, 2, \ldots, s-1,$$

elde edilir ve $\partial g(\tilde{x}_T, T) \equiv 0$ sağlandığı için $x^*_T = 0$ dır. ∎

4.2.2. $(PDAs)$ Diskret Yaklaşımlı Problemin Optimallik Koşulları

δ, t-ekseninde adım aralıkları olmak üzere, $s.$ mertebeden diferansiyel operatörler

$$\Delta^s x(t) = \frac{1}{\delta^s}\Big(\sum_{j=0}^{s} (-1)^j \ \mathrm{C}^j_s \ x(t + (s-j)\delta)\Big),\ \ t = 0, \delta, \ldots, 1-\delta,$$

şeklinde tanımlansın. Burada $x(t)$, $[0,1]$ üzerinde bir fonksiyon ve $\mathrm{C}_s^j = \binom{s}{j} = \dfrac{s!}{(s-j)!j!}$ binom katsayılarıdır.

(PCs) diferansiyel probleminin optimallik yeter koşullarını bulmak için kullanacağımız yöntem diskret yaklaşım yöntemidir. Bunun için diskret yaklaşım probleminde elde edilen optimallik koşullarında limite geçerek (PCs) problemin optimallik yeter koşullarını belirleyeceğiz. Bu amaçla (PCs) problemine göre belirlenen, $(PDAs)$ ile göstereceğimiz s. mertebeden diskret yaklaşım problemi aşağıda verilmiştir:

$$\min \sum_{t=0}^{1-s\delta} \delta g(x(t),t) + \varphi_0\Big(x(1-(s-1)\delta), \Delta x(1-(s-1)\delta), \ldots, \Delta^{s-1}x(1-(s-1)\delta)\Big),$$

$$\sum_{k=0}^{s-1} P_k \Delta^k x(t) - Q\Delta^s x(t) \leq d, \quad t = 0, \delta, \ldots, 1-s\delta,$$

$$\Delta^k x(0) = \theta_k \ , \ k = 0, 1, \ldots, s-1. \tag{4.53}$$

Yukarıda bahsedilen metodu uygulamak için aşağıda verilen teoreme ihtiyaç vardır.

Teorem 4.7. Kabul edelim ki $\phi : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\phi(x, v_1, \ldots, v_{s-1}) \equiv \varphi_0\Big(x, \eta_1, \ldots, \eta_{s-1}\Big)$ şeklinde tanımlansın. Burada $\eta_r = \dfrac{1}{\delta^r}\Big[\sum\limits_{j=0}^{r-1}(-1)^j\binom{r}{j}v_{r-j} + (-1)^r x\Big]$, $r = 1, 2, \ldots, s-1$, $(x^0, v_1^0, \ldots, v_{s-1}^0) \in dom\phi$, $(x^0, \eta_1^0, \ldots, \eta_{s-1}^0) \in dom\varphi_0$ dır. O halde $v_r^* = \delta^r\left[\sum\limits_{j=0}^{s-(r+1)}\binom{j+r}{j}\overline{v}_{r+j}^*\right]$, $r = 1, 2, \ldots, s-1$ olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(i) $\Big(\overline{x}^*, \ \overline{v}_1^*, \ldots, \ \overline{v}_{s-1}^*\Big) \in \partial\phi\Big(x^0, v_1^0, \ldots, v_{s-1}^0\Big)$

(ii) $\Big(\overline{x}^* + \sum\limits_{j=1}^{s-1}\overline{v}_j{}^*, \ v_1^*, v_2^*, \ldots, v_{s-1}^*\Big) \in \partial\varphi_0\Big(x^0, \eta_1^0, \ldots, \eta_{s-1}^0\Big)$.

İspat. Açıkca $\partial_z\phi(z_0)$ konveks kapalı ve $z_0 = (x^0, v_1^0, \ldots, v_{s-1}^0) \in ri(dom\phi)$ için sınırlı bir kümedir. Ayrıca $y_0 = (x^0, \eta_1^0, \eta_2^0, \ldots, \eta_{s-1}^0)$ ile gösterilirse, subdiferansiyel tanımından

$$\partial_z\phi(z_0) = \Bigg\{\big(\overline{x}^*, \overline{v}_1^*, \ldots, \overline{v}_{s-1}^*\big) : \phi\big(z\big) - \phi\big(z_0\big) \geq \ \Big\langle \overline{x}^*, x - x^0\Big\rangle + \Big\langle \overline{v}_1{}^*, v_1 - v_1^0\Big\rangle$$

$$+ \cdots + \Big\langle \ \overline{v}_{s-1}^*, v_{s-1} - v_{s-1}^0\Big\rangle, \ \forall z = (x, v_1, \ldots, v_{s-1}) \in \mathbb{R}^{sn}, z_0 \in dom\phi \ \Bigg\}, \tag{4.54}$$

$$\partial\varphi_0(y_0)=\Big\{\big(x^*,{v_1}^*,\dots,v_{s-1}^*\big):\varphi_0(y)-\varphi_0(y_0)\geq\ \Big\langle x^*,x-x^0\Big\rangle$$

$$+\sum_{j=1}^{s-1}\Big\langle v_j^*\ ,\ \frac{1}{\delta^j}\Big(\sum_{i=0}^{j-1}(-1)^i\binom{j}{i}\big(v_{j-i}-v_{j-i}^0\big)+(-1)^j\big(x-x^0\big)\Big)\Big\rangle\ ,\forall\ y\in\mathbb{R}^{sn}\ \Big\}$$

elde edilir. Son verilen bağıntı tekrar düzenlenirse,

$$\partial\varphi_0(y_0)=\Big\{\big(x^*,{v_1}^*,\dots,v_{s-1}^*\big):\varphi_0(y)-\varphi_0(y_0)\geq\ \Big\langle x^*+\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(-1)^j}{\delta^j}{v_j}^*\ ,\ x-x^0\Big\rangle$$

$$+\Big\langle\sum_{j=0}^{s-2}\frac{(-1)^j}{\delta^{j+1}}\binom{j+1}{j}v_{j+1}^*\ ,\ v_1-v_1^0\Big\rangle+\Big\langle\sum_{j=0}^{s-3}\frac{(-1)^j}{\delta^{j+2}}\binom{j+2}{j}v_{j+2}^*\ ,\ v_2-v_2^0\Big\rangle$$

$$+\cdots+\Big\langle\sum_{j=0}^{1}\frac{(-1)^j}{\delta^{j+s-2}}\binom{j+s-2}{j}v_{j+s-2}^*\ ,\ v_{s-2}-v_{s-2}^0\Big\rangle$$

$$+\Big\langle\frac{v_{s-1}^*}{\delta^{s-1}}\ ,\ v_{s-1}-v_{s-1}^0\Big\rangle,\ \forall\ y\in\mathbb{R}^{sn}\ \Big\}$$

bulunur yani başka bir ifade ile

$$\partial\varphi_0(y_0)=\Big\{\big(x^*,{v_1}^*,\dots,v_{s-1}^*\big):\varphi_0(y)-\varphi_0(y_0)\geq\ \Big\langle x^*+\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(-1)^j}{\delta^j}{v_j}^*,x-x^0\Big\rangle$$

$$+\sum_{r=1}^{s-1}\Big\langle\sum_{j=0}^{s-(r+1)}\frac{(-1)^j}{\delta^{j+r}}\tbinom{j+r}{j}v_{j+r}^*\ ,\ v_r-v_r^0\Big\rangle,\quad\forall y\in\mathbb{R}^{sn}\ \Big\}\qquad(4.55)$$

elde edilir. (4.54) ve (4.55) denklemlerinden $r=1,2,\dots,s-1$ için,

$$\overline{x}^*=x^*+\sum_{j=1}^{s-1}\frac{(-1)^j}{\delta^j}{v_j}^*,\ {\overline{v}_r}^*=\sum_{j=0}^{s-(r+1)}\frac{(-1)^j}{\delta^{j+r}}\binom{j+r}{j}v_{j+r}^*\ ,\qquad(4.56)$$

olur. (4.56) denkleminde gerekli düzenleme yapılırsa

$$x^*=\overline{x}^*+\sum_{j=1}^{s-1}{\overline{v}_j}^*,\quad {v_r}^*=\delta^r\left[\sum_{j=0}^{s-(r+1)}\binom{j+r}{j}\overline{v}_{r+j}^*\right],\quad r=1,2,\dots,s-1,$$

gerçeklenir. ∎

Teorem 4.8. $(PDAs)$ probleminde $\{\tilde{x}(t)\}_{t=0}^{1}$ yörüngesinin optimalliği için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen Euler-Lagrange diskret içermesini

$$(1)\ \ (-1)^s\Delta^s x^*(t)\in\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^kP_k^*\Delta^k\lambda(t-k\delta)+\partial g(\tilde{x}(t),t),$$

$$(2)\ \ \Big\langle\sum_{k=0}^{s-1}P_k\Delta^k\tilde{x}(t)-Q\Delta^s\tilde{x}(t)-d\ ,\ \lambda(t)\Big\rangle=0,\quad\lambda(t)\geq0,\quad t=s\delta,\dots,1-s\delta,$$

ve transversallik koşulunu

$$(3)\ \ \big(\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_s\big)\in\partial\varphi_0\Big(\tilde{x}(1-(s-1)\delta),\ \Delta\tilde{x}(1-(s-1)\delta),\dots,\ \Delta^{s-1}\tilde{x}(1-(s-1)\delta)\Big),$$

$$\xi_k=(-1)^{k+s}\Delta^{s-k}x^*(1-(s-k)\delta)+\sum_{j=1}^{s-k}(-1)^jP_j^*\Delta^{j-1}\lambda(1-(j+s-k)\delta)\ ,\ k=1,2,\dots,s,$$

sağlayan hepsi birden sıfır olmayan $\{x^*(t)\}_{t=0}^{1}$ vektörlerinin var olmasıdır.

İspat. (4.53) probleminin optimallik koşullarını verebilmek için Teorem 4.6'yı kullanalım. Bunun için bu problemi (PDs) problemi formatına dönüştürelim:

$$\min\ \sum_{t=0}^{1-s\delta}\delta g\big(x(t),t\big)+\varphi_0\Big(\tilde{x}(1-(s-1)\delta),\ \Delta\tilde{x}(1-(s-1)\delta),\dots,\ \Delta^{s-1}\tilde{x}(1-(s-1)\delta)\Big),$$

$$\Big[\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k\delta^{s-k}P_k-(-1)^sQ\Big]x(t)+\Big[\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1}\binom{k}{1}\delta^{s-k}P_k+(-1)^s\binom{s}{1}Q\Big]x(t+\delta)$$

$$+\Big[\sum_{k=2}^{s-1}(-1)^k\binom{k}{2}\delta^{s-k}P_k-(-1)^s\binom{s}{2}Q\Big]x(t+2\delta)+\cdots+\Big[\sum_{k=s-1}^{s-1}(-1)^{k+s+1}\binom{k}{s-1}\delta^{s-k}P_k$$

$$+\binom{s}{s-1}Q\Big]x(t+(s-1)\delta)-Qx(t+s\delta)\le\delta^sd\ ,\ \ t=0,\delta,\dots,1-s\delta,$$

$$x(k\delta)=\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\delta^j\theta_j,\quad k=0,1,\dots,s-1. \tag{4.57}$$

(4.57) probleminin optimal çözümü $\{\tilde{x}(t)\},\ t=0,\delta,\dots,1$ olsun. Teorem 4.6'yı kullanırsak $s.$ mertebeden polihedral diskret içermesi

$$x^*(t)\in\Big[\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k\delta^{s-k}P_k-(-1)^sQ\Big]^*\lambda(t)+\Big[\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1}\binom{k}{1}\delta^{s-k}P_k+(-1)^s\binom{s}{1}Q\Big]^*\lambda(t-\delta)$$

$$+\Big[\sum_{k=2}^{s-1}(-1)^k\binom{k}{2}\delta^{s-k}P_k-(-1)^s\binom{s}{2}Q\Big]^*\lambda(t-2\delta)+\cdots+\Big[\delta P_{s-1}+sQ\Big]^*\lambda(t-(s-1)\delta)$$

$$+\delta\partial g(\tilde{x}(t),t),\quad t=0,\delta,\dots,1-\delta,\quad x^*(t+s\delta)=Q^*\lambda(t)\ ,\ \lambda(t)\ge0, \tag{4.58}$$

$$\Big\langle\Big[\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k\delta^{s-k}P_k-(-1)^sQ\Big]\widetilde{x}(t)+\Big[\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1}\binom{k}{1}\delta^{s-k}P_k+(-1)^s\binom{s}{1}Q\Big]\tilde{x}(t+\delta)$$

$$+\Big[\sum_{k=2}^{s-1}(-1)^k\binom{k}{2}\delta^{s-k}P_k-(-1)^s\binom{s}{2}Q\Big]\tilde{x}(t+2\delta)+\cdots+\Big[\delta P_{s-1}+sQ\Big]\widetilde{x}(t+(s-1)\delta)$$

$$-Q\tilde{x}(t+s\delta)-\delta^s d\ ,\ \lambda(t)\Big\rangle=0 \tag{4.59}$$

şeklinde elde edilir. (4.58) içermesini tekrar düzenlersek

$$\Bigg(x^*(t)+(-1)^sQ^*\lambda(t)-(-1)^s\binom{s}{1}Q^*\lambda(t-\delta)+(-1)^s\binom{s}{2}Q^*\lambda(t-2\delta)+\cdots$$

$$+(-s)Q^*\lambda(t-(s-1)\delta)\Bigg)\in\Big[\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^k\delta^{s-k}P_k^*\Big]\lambda(t)+\Big[\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1}\binom{k}{1}\delta^{s-k}P_k^*\Big]\lambda(t-\delta)$$
$$+\cdots+\delta P_{s-1}^*\lambda(t-(s-1)\delta)+\delta\partial g(\tilde{x}(t),t)$$

bulunur. $x^*(t+s\delta)=Q^*\lambda(t)$ eşitliği kullanılırsa

$$\Bigg(x^*(t)+(-1)^sx^*(t+s\delta)-(-1)^s\binom{s}{1}x^*(t+(s-1)\delta)+(-1)^s\binom{s}{2}x^*(t+\delta(s-2))$$

$$+\cdots+(-s)x^*(t+\delta)\Bigg)\ \in\ \delta^sP_0^*\lambda(t)+\delta^{s-1}\Big[-\lambda(t)+\lambda(t-\delta)\Big]P_1^*$$
$$+\delta^{s-2}\Big[\lambda(t)-2\lambda(t-\delta)+\lambda(t-2\delta)\Big]P_2^*$$
$$+\cdots+\delta\Big[(-1)^{s-1}\lambda(t)+(-1)^s\binom{s-1}{1}\lambda(t-\delta)-(-1)^s\binom{s-1}{2}\lambda(t-2\delta)$$
$$+\cdots+\lambda(t-(s-1)\delta)\Big]P_{s-1}^*+\delta\partial g(\tilde{x}(t),t)$$

elde edilir. Her iki tarafı δ^s ile bölersek ve $\delta^{s-1}x^*(t)$, $\delta^{s-1}\lambda(t)$ yerine sırasıyla $x^*(t)$ ve $\lambda(t)$ alırsak

$$(-1)^s\Delta^s x^*(t)\ \in\ \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^kP_k^*\Delta^k\lambda(t-k\delta)+\partial g(\tilde{x}(t),t)$$

diskret içermesi bulunur. Benzer şekilde (4.59) denklemi düzenlenirse

$$\Big\langle\sum_{k=0}^{s-1}P_k\Delta^k\tilde{x}(t)-Q\Delta^s\tilde{x}(t)-d\ ,\ \lambda(t)\Big\rangle=0\ ,\ \lambda(t)\geq 0,\ t=s\delta,\ldots,1-s\delta$$

olur. (4.57) probleminin transversallik koşullarını yazabilmek için Teorem 4.6 kullanılırsa

$$x^*(1-(s-1)\delta)-\sum_{j=0}^{s-2}\Big[\sum_{k=1+j}^{s-1}(-1)^{k+j+1}\binom{k}{1+j}\delta^{s-k}P_k^*+(-1)^{s-j}\binom{s}{1+j}Q^*\Big]\lambda(1-(s+j)\delta)$$

$$\in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1-(s-1)\delta),1-(s-1)\delta),$$

$$x^*(1-(s-2)\delta)-\sum_{j=0}^{s-3}\left[\sum_{k=2+j}^{s-1}(-1)^{k+j}\binom{k}{2+j}\delta^{s-k}P_k^*+(-1)^{s-j-1}\binom{s}{2+j}Q^*\right]\lambda(1-(s+j)\delta)$$
$$\in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1-(s-2)\delta),1-(s-2)\delta),$$
$$\vdots$$
$$x^*(1-2\delta)-\sum_{j=0}^{1}\left[\sum_{k=s-2+j}^{s-1}(-1)^{k+j+s}\binom{k}{s-2+j}\delta^{s-k}P_k^*+(-1)^{1-j}\binom{s}{s-2+j}Q^*\right]\lambda(1-(s+j)\delta)$$
$$\in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1-2\delta),1-2\delta),$$

$$x^*(1-\delta)-\left[\delta P_{s-1}^*+sQ^*\right]\lambda(1-s\delta)\ \in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1-\delta),1-\delta),$$

$$x^*(1)\ \in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1),1) \tag{4.60}$$

elde edilir. (4.60) transversallik koşullarında $x^*(t+s\delta)=Q^*\lambda(t)$ olduğundan,

$$x^*(1-(s-1)\delta)-\sum_{j=0}^{s-2}(-1)^{s-j}\binom{s}{1+j}x^*(1-j\delta)-\sum_{j=0}^{s-2}\left[\sum_{k=1+j}^{s-1}(-1)^{k+j+1}\binom{k}{1+j}\delta^{s-k}P_k^*\right]\lambda(1-(s+j)\delta)$$
$$\in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1-(s-1)\delta),1-(s-1)\delta),$$

$$x^*(1-(s-2)\delta)+\sum_{j=0}^{s-3}(-1)^{s-j}\binom{s}{2+j}x^*(1-j\delta)-\sum_{j=0}^{s-3}\left[\sum_{k=2+j}^{s-1}(-1)^{k+j}\binom{k}{2+j}\delta^{s-k}P_k^*\right]\lambda(1-(s+j)\delta)$$
$$\in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1-(s-2)\delta),1-(s-2)\delta),$$
$$\vdots$$
$$x^*(1-2\delta)-\sum_{j=0}^{1}(-1)^{1-j}\binom{s}{s-2+j}x^*(1-j\delta)-\sum_{j=0}^{1}\left[\sum_{k=s-2+j}^{s-1}(-1)^{k+j+s}\binom{k}{s-2+j}\delta^{s-k}P_k^*\right]\lambda(1-(s+j)\delta)$$
$$\in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1-2\delta),1-2\delta),$$
$$x^*(1-\delta)-\delta P_{s-1}^*\lambda(1-s\delta)-sx^*(1)\ \in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1-\delta),1-\delta),$$

$$x^*(1)\ \in\ \delta\partial g(\tilde{x}(1),1) \tag{4.61}$$

bulunur. (4.57) probleminde φ_0 fonksiyonu

$$\varphi_0\Big(\tilde{x}(1-(s-1)\delta),\ \Delta\tilde{x}(1-(s-1)\delta),\dots,\Delta^{s-1}\tilde{x}(1-(s-1)\delta)\Big)$$
$$\equiv\phi\Big(\tilde{x}(1-(s-1)\delta)\ ,\ \tilde{x}(1-(s-2)\delta)\ ,\dots,\tilde{x}(1)\Big)$$

$$= \delta\Big(g\Big(\tilde{x}(1-(s-1)\delta), 1-(s-1)\delta\Big) + g\Big(\tilde{x}(1-(s-2)\delta), 1-(s-2)\delta\Big) + \cdots + g\big(\tilde{x}(1), 1\big) \Big)$$

şeklinde tanımlandığı için (4.61) transversallik koşulları

$$\Bigg(x^*(1-(s-1)\delta) - \sum_{j=0}^{s-2} (-1)^{s-j} \binom{s}{1+j} x^*(1-j\delta)$$

$$- \sum_{j=0}^{s-2} \Bigg[\sum_{k=1+j}^{s-1} (-1)^{k+j+1} \binom{k}{1+j} \delta^{s-k} P_k^* \Bigg] \lambda(1-(s+j)\delta) \ ,$$

$$x^*(1-(s-2)\delta) + \sum_{j=0}^{s-3} (-1)^{s-j} \binom{s}{2+j} x^*(1-j\delta)$$

$$- \sum_{j=0}^{s-3} \Bigg[\sum_{k=2+j}^{s-1} (-1)^{k+j} \binom{k}{2+j} \delta^{s-k} P_k^* \Bigg] \lambda(1-(s+j)\delta) \ , \ \dots \ ,$$

$$x^*(1-\delta) - \delta P_{s-1}^* \lambda(1-s\delta) - s x^*(1) \ , \ x^*(1) \Bigg)$$

$$\in \partial\phi\Big(\tilde{x}(1-(s-1)\delta) \ , \ \tilde{x}(1-(s-2)\delta) \ , \dots , \tilde{x}(1) \Big)$$

olup bu içermede her iki taraf δ^{s-1} ile bölünürse

$$\Bigg(-\frac{1}{\delta^{s-1}} \sum_{j=0}^{s-1} (-1)^{s-j} \binom{s}{1+j} x^*(1-j\delta) - \sum_{j=0}^{s-2} \Bigg[\sum_{k=1+j}^{s-1} (-1)^{k+j+1} \binom{k}{1+j} \delta^{1-k} P_k^* \Bigg] \lambda(1-(s+j)\delta) \ ,$$

$$\frac{1}{\delta^{s-1}} \sum_{j=0}^{s-2} (-1)^{s-j} \binom{s}{2+j} x^*(1-j\delta) - \sum_{j=0}^{s-3} \Bigg[\sum_{k=2+j}^{s-1} (-1)^{k+j} \binom{k}{2+j} \delta^{1-k} P_k^* \Bigg] \lambda(1-(s+j)\delta) \ ,$$

$$, \ \dots \ , \ \frac{x^*(1-\delta) - s x^*(1)}{\delta^{s-1}} - \frac{P_{s-1}^* \lambda(1-s\delta)}{\delta^{s-2}} \ , \ \frac{x^*(1)}{\delta^{s-1}} \Bigg)$$

$$\in \partial\phi\Big(\tilde{x}(1-(s-1)\delta) \ , \ \tilde{x}(1-(s-2)\delta) \ , \dots , \ \tilde{x}(1) \Big)$$

elde edilir. Teorem 4.7'yi uygularsak,

$$\Bigg((-1)^{1+s} \Delta^{s-1} x^*(1-(s-1)\delta) + \sum_{j=1}^{s-1} (-1)^j P_j^* \Delta^{j-1} \lambda(1-(j+s-1)\delta) \ ,$$

$$(-1)^s \Delta^{s-2} x^*(1-(s-2)\delta) + \sum_{j=1}^{s-2} (-1)^j P_j^* \Delta^{j-1} \lambda(1-(j+s-2)\delta),$$

$$, \ \dots \ , \ -\Delta x^*(1-\delta) - P_2^* \lambda(1-3\delta) \ , \ x^*(1) \Bigg)$$

$$\in \partial\varphi_0\Big(\tilde{x}(1-(s-1)\delta), \ \Delta\tilde{x}(1-(s-1)\delta) \ , \ \dots \ , \ \Delta^{s-1}\tilde{x}(1-(s-1)\delta) \Big)$$

içermesi sağlanır. O halde (4.57) problemi için transversallik koşulu

$$\big(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_s\big)\in\partial\varphi_0\Big(\tilde{x}(1-(s-1)\delta),\ \Delta\tilde{x}(1-(s-1)\delta),\ldots,\ \Delta^{s-1}\tilde{x}(1-(s-1)\delta)\Big),$$

$$\xi_k=(-1)^{k+s}\Delta^{s-k}x^*(1-(s-k)\delta)+\sum_{j=1}^{s-k}(-1)^jP_j^*\Delta^{j-1}\lambda(1-(j+s-k)\delta)\ ,\ k=1,2,\ldots,s$$

elde edilir. ∎

4.2.3. (PCs) Diferansiyel İçermeli Problemin Optimallik Koşulları

Bu kısımda (PCs) probleminin optimallik yeter koşullarını verelim. Bunun için Teorem 4.8'de elde edilen sonuçları kullanalım.

Teorem 4.9. (PCs) probleminde $\tilde{x}(t),\ t\in[0,1]$ yörüngesinin optimal yörünge olması için yeter koşul aşağıda verilen Euler-Lagrange diferansiyel içermesini

$$(a)\ \ (-1)^s\frac{d^sx^*(t)}{dt^s}\ \in\ \sum_{k=0}^{s-1}(-1)^kP_k^*\frac{d^k\lambda(t)}{dt^k}+\partial g(\tilde{x}(t),t)\ ,\ \text{h.h.}\ \ t\in[0,1],$$

$$x^*(t)=Q^*\lambda(t),$$

$$(b)\ \ \Big\langle\sum_{k=0}^{s-1}P_k\frac{d^k\tilde{x}(t)}{dt^k}-Q\frac{d^s\tilde{x}(t)}{dt^s}-d\ ,\ \lambda(t)\Big\rangle=0\ ,\ \text{h.h.}\ t\in[0,1],$$

ve transversallik koşullarını

$(c)\ \ \big(\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_s\big)\in\partial\varphi_0\Big(\tilde{x}(1),\ \tilde{x}'(1),\ldots,\ \tilde{x}^{(s-1)}(1)\Big)$, burada $\psi_s=x^*(1)$ ve

$$\psi_j=(-1)^{s-j}\ \frac{d^{s-j}x^*(1)}{dt^{s-j}}+\sum_{i=j}^{s-1}(-1)^{i+j-1}P_i^*\frac{d^{i-j}\lambda(1)}{dt^{i-j}}\ ,\ j=1,2,\ldots,s-1$$

sağlayan mutlak sürekli bir $x^*(t)$ fonksiyonunun var olmasıdır.

İspat. Tüm uygun çözümler için subdiferansiyel tanımından sırasıyla (a) içermesi ve (c) transversallik koşulu

$$g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\geq\Big\langle(-1)^s\frac{d^sx^*(t)}{dt^s}-\sum_{k=0}^{s-1}(-1)^kP_k^*\frac{d^k\lambda(t)}{dt^k}\ ,x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle,\quad(4.62)$$

$$\varphi_0\Big(x(1),x'(1),\ldots,x^{(s-1)}(1)\Big)-\varphi_0\Big(\tilde{x}(1),\tilde{x}'(1),\ldots,\tilde{x}^{(s-1)}(1)\Big)\geq\Big\langle\psi_1\ ,x(1)-\tilde{x}(1)\Big\rangle$$
$$+\Big\langle\psi_2,x'(1)-\tilde{x}'(1)\Big\rangle+\cdots+\Big\langle\psi_{s-1},\ x^{(s-2)}(1)-\tilde{x}^{(s-2)}(1)\Big\rangle$$
$$+\Big\langle x^*(1)\ ,\ x^{(s-1)}(1)-\tilde{x}^{(s-1)}(1)\Big\rangle\qquad(4.63)$$

şeklinde yazılabilir. (4.62) eşitsizliğinin sağ tarafı düzenlenirse

$$\Big\langle (-1)^s \frac{d^s x^*(t)}{dt^s} - \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k P_k^* \frac{d^k \lambda(t)}{dt^k} \ , \ x(t) - \tilde{x}(t) \Big\rangle = \Big\langle (-1)^s \frac{d^s x^*(t)}{dt^s} \ , \ x(t) - \tilde{x}(t) \Big\rangle$$

$$+ \Big\langle \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^{k+1} \frac{d^k \lambda(t)}{dt^k} \ , \ P_k\big(x(t) - \tilde{x}(t)\big) \Big\rangle \tag{4.64}$$

olur. Uygun bir $x(\cdot)$ çözümü ve $\lambda(t) \geq 0, t \in [0,1]$ için

$$\Big\langle \sum_{k=0}^{s-1} P_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \ , \ \lambda(t) \Big\rangle \leq \Big\langle Q \frac{d^s x(t)}{dt^s} + d \ , \ \lambda(t) \Big\rangle$$

olduğu açıktır. Ayrıca teoremin (b) koşulundan

$$\Big\langle \sum_{k=0}^{s-1} P_k \frac{d^k \widetilde{x}(t)}{dt^k} \ , \ \lambda(t) \Big\rangle = \Big\langle Q \frac{d^s \tilde{x}(t)}{dt^s} + d \ , \ \lambda(t) \Big\rangle$$

sağlandığını biliyoruz. $x^*(t) = Q^* \lambda(t)$ olduğu için son iki eşitsizlikten

$$\Big\langle \sum_{k=0}^{s-1} P_k \frac{d^k \big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)}{dt^k} \ , \ \lambda(t) \Big\rangle \leq \Big\langle \frac{d^s \big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)}{dt^s} \ , \ x^*(t) \Big\rangle \tag{4.65}$$

elde edilir. O halde (4.64) ve (4.65) bağıntılarından

$$\Big\langle (-1)^s \frac{d^s x^*(t)}{dt^s} - \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k P_k^* \frac{d^k \lambda(t)}{dt^k} \ , \ x(t) - \tilde{x}(t) \Big\rangle \geq \Big\langle (-1)^s \frac{d^s x^*(t)}{dt^s} \ , \ x(t) - \tilde{x}(t) \Big\rangle$$
$$- \Big\langle \frac{d^s \big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)}{dt^s} \ , \ x^*(t) \Big\rangle + \sum_{k=1}^{s-1} \Big\langle (-1)^{k+1} P_k^* \frac{d^k \lambda(t)}{dt^k} \ , \ x(t) - \tilde{x}(t) \Big\rangle$$
$$+ \sum_{k=1}^{s-1} \Big\langle P_k^* \lambda(t) \ , \ \frac{d^k \big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)}{dt^k} \Big\rangle \tag{4.66}$$

bulunur. $\Omega_i(t) = \sum_{k=i}^{s-1} (-1)^{k+i} P_k^* \frac{d^{k-i} \lambda(t)}{dt^{k-i}}$, $i = 1, 2, \ldots, s-1$, şeklinde gösterilirse ve

$$\sum_{k=1}^{s-1} \Big\langle (-1)^{k+1} P_k^* \frac{d^k \lambda(t)}{dt^k}, x(t) - \tilde{x}(t) \Big\rangle + \sum_{k=1}^{s-1} \Big\langle P_k^* \lambda(t), \frac{d^k \big(x(t) - \tilde{x}(t)\big)}{dt^k} \Big\rangle$$

$$= \sum_{i=1}^{s-1} \frac{d}{dt} \Big[\Big\langle \sum_{k=i}^{s-1} (-1)^{k+i} P_k^* \frac{d^{k-i} \lambda(t)}{dt^{k-i}} \ , \ \frac{d^{i-1} \big(x(t) - \widetilde{x}(t)\big)}{dt^{i-1}} \Big\rangle \Big]$$

eşitliği dikkate alınırsa (4.66) bağıntısı

$$\Big\langle (-1)^s \frac{d^s x^*(t)}{dt^s} - \sum_{k=0}^{s-1} (-1)^k P_k^* \frac{d^k \lambda(t)}{dt^k} \ , \ x(t) - \tilde{x}(t) \Big\rangle \geq \Big\langle (-1)^s \frac{d^s x^*(t)}{dt^s} \ , \ x(t) - \tilde{x}(t) \Big\rangle$$

$$-\Big\langle \frac{d^s\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^s}\ ,\ x^*(t)\Big\rangle + \sum_{i=1}^{s-1}\frac{d}{dt}\Big[\Big\langle \Omega_i(t)\ ,\ \frac{d^{i-1}\big(x(t)-\widetilde{x}(t)\big)}{dt^{i-1}}\Big\rangle\Big] \tag{4.67}$$

olarak elde edilir. Son olarak (4.62) ve (4.67) eşitsizliklerinden

$$g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t) \geq \Big\langle (-1)^s\frac{d^sx^*(t)}{dt^s}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle - \Big\langle \frac{d^s\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^s}, x^*(t)\Big\rangle$$
$$+\sum_{i=1}^{s-1}\frac{d}{dt}\Big[\Big\langle \Omega_i(t), \frac{d^{i-1}\big(x(t)-\widetilde{x}(t)\big)}{dt^{i-1}}\Big\rangle\Big] \tag{4.68}$$

elde edilir. $x(\cdot)$ ve $\tilde{x}(\cdot)$ uygun çözümler $\big(x^{(k)}(0)=\widetilde{x}^{(k)}(0)=\theta_k,\ k=0,1,\ldots,s-1\big)$ olduğu için, (4.68) eşitsizliğinde integral alınırsa,

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt \geq \int_0^1\Big[\Big\langle (-1)^s\frac{d^sx^*(t)}{dt^s}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle - \Big\langle \frac{d^s\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^s}, x^*(t)\Big\rangle\Big]dt$$
$$+\sum_{i=1}^{s-1}\Big\langle \Omega_i(1)\ ,\ \frac{d^{i-1}\big(x(1)-\widetilde{x}(1)\big)}{dt^{i-1}}\Big\rangle \tag{4.69}$$

olup (4.69) eşitsizliğin sağ tarafında yer alan parantez içindeki ifade, daha açık olarak

$$\Psi = \Big\langle (-1)^s\frac{d^sx^*(t)}{dt^s}\ ,\ x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle - \Big\langle \frac{d^s\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^s}\ ,\ x^*(t)\Big\rangle$$

ifadesi Ψ ile gösterilirse, Ψ fonksiyonunun ilk terimi

$$\Big\langle (-1)^s\frac{d^sx^*(t)}{dt^s}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle = \frac{d}{dt}\Big[\Big\langle (-1)^s\frac{d^{s-1}x^*(t)}{dt^{s-1}}, x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle\Big]$$
$$+\Big\langle (-1)^{s+1}\frac{d^{s-1}x^*(t)}{dt^{s-1}}\ ,\ x'(t)-\tilde{x}'(t)\Big\rangle \tag{4.70}$$

ve benzer şekilde Ψ fonksiyonunun ikinci terimi düzenlenirse

$$\Big\langle \frac{d^s\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^s}\ ,\ x^*(t)\Big\rangle = \frac{d}{dt}\Big[\Big\langle \frac{d^{s-1}\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^{s-1}}\ ,\ x^*(t)\Big\rangle\Big]$$
$$-\frac{d}{dt}\Big[\Big\langle \frac{d^{s-2}\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^{s-2}}\ ,\ \frac{dx^*(t)}{dt}\Big\rangle\Big] + \frac{d}{dt}\Big[\Big\langle \frac{d^{s-3}\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^{s-3}}\ ,\ \frac{d^2x^*(t)}{dt^2}\Big\rangle\Big]$$
$$-\cdots+(-1)^s\frac{d}{dt}\Big[\Big\langle \frac{d\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt}\ ,\ \frac{d^{s-2}x^*(t)}{dt^{s-2}}\Big\rangle\Big]$$

$$+(-1)^{s-1}\frac{d}{dt}\Big[\Big\langle x(t)-\tilde{x}(t),\ \frac{d^{s-1}x^*(t)}{dt^{s-1}}\Big\rangle\Big]+(-1)^s\Big\langle x(t)-\tilde{x}(t),\ \frac{d^s\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^s}\Big\rangle. \tag{4.71}$$

bağıntısı elde edilir. (4.70) ve (4.71) formüllerinden

$$\Psi = \frac{d}{dt}\Big\langle (-1)^s\frac{d^{s-1}x^*(t)}{dt^{s-1}}\ ,\ x(t)-\widetilde{x}(t)\Big\rangle - \frac{d}{dt}\Big\langle \frac{d^{s-1}\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^{s-1}}\ ,\ x^*(t)\Big\rangle$$

$$+\frac{d}{dt}\Big\langle\frac{d^{s-2}\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^{s-2}}\ ,\ \frac{dx^*(t)}{dt}\Big\rangle-\frac{d}{dt}\Big\langle\frac{d^{s-3}\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^{s-3}}\ ,\ \frac{d^2x^*(t)}{dt^2}\Big\rangle$$
$$+\cdots+(-1)^{s+1}\frac{d}{dt}\Big[\Big\langle\frac{d\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt}\ ,\ \frac{d^{s-2}x^*(t)}{dt^{s-2}}\Big\rangle\Big]$$

olur. O halde aşağıda verilen integral,

$$\int_0^1\Psi dt=(-1)^s\Big\langle\frac{d^{s-1}x^*(1)}{dt^{s-1}},x(1)-\widetilde{x}(1)\Big\rangle-\Big\langle\frac{d^{s-1}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-1}},x^*(1)\Big\rangle$$
$$+\Big\langle\frac{d^{s-2}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-2}},\frac{dx^*(1)}{dt}\Big\rangle-\Big\langle\frac{d^{s-3}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-3}},\frac{d^2x^*(1)}{dt^2}\Big\rangle$$
$$+\cdots+(-1)^{s+1}\Big\langle\frac{d\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt},\ \frac{d^{s-2}x^*(1)}{dt^{s-2}}\Big\rangle \tag{4.72}$$

olup (4.72) bağıntısı kullanılarak (4.69) eşitsizliğinden

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt\geq(-1)^s\Big\langle\frac{d^{s-1}x^*(1)}{dt^{s-1}},x(1)-\widetilde{x}(1)\Big\rangle$$
$$-\Big\langle\frac{d^{s-1}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-1}},x^*(1)\Big\rangle+\Big\langle\frac{d^{s-2}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-2}},\frac{dx^*(1)}{dt}\Big\rangle$$
$$+\cdots+(-1)^{s+1}\Big\langle\frac{d\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt},\ \frac{d^{s-2}x^*(1)}{dt^{s-2}}\Big\rangle+\big\langle\Omega_1(1),x(1)-\widetilde{x}(1)\big\rangle$$
$$+\big\langle\Omega_2(1),\frac{d\big(x(1)-\widetilde{x}(1)\big)}{dt}\big\rangle+\big\langle\Omega_3(1),\frac{d^2\big(x(1)-\widetilde{x}(1)\big)}{dt^2}\big\rangle$$
$$+\cdots+\big\langle\Omega_{s-1}(1),\frac{d^{s-2}\big(x(1)-\widetilde{x}(1)\big)}{dt^{s-2}}\big\rangle$$

elde edilir. Sonuçta bu eşitsizlik düzenlenirse

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt\geq\Big\langle(-1)^s\frac{d^{s-1}x^*(1)}{dt^{s-1}}+\Omega_1(1),\ x(1)-\widetilde{x}(1)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle(-1)^{s+1}\frac{d^{s-2}x^*(1)}{dt^{s-2}}+\Omega_2(1),\ x'(1)-\widetilde{x}'(1)\Big\rangle+\Big\langle(-1)^{s+2}\frac{d^{s-3}x^*(1)}{dt^{s-3}}+\Omega_3(1),\ x''(1)-\widetilde{x}''(1)\Big\rangle$$

$$+\cdots+\big\langle\frac{dx^*(1)}{dt}+\Omega_{s-1}(1),\ x^{(s-2)}(1)-\widetilde{x}^{(s-2)}(1)\big\rangle-\Big\langle x^*(1),\ x^{(s-1)}(1)-\widetilde{x}^{(s-1)}(1)\Big\rangle$$

bulunur. Dolayısıyla $\Omega_i(1)$, $i=1,2,\ldots,s-1$ ifadeleri yerine yazılırsa,

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt\geq\Big\langle(-1)^s\frac{d^{s-1}x^*(1)}{dt^{s-1}}+\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1}P_k^*\frac{d^{k-1}\lambda(1)}{dt^{k-1}},\ x(1)-\widetilde{x}(1)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle (-1)^{s+1}\frac{d^{s-2}x^*(1)}{dt^{s-2}}+\sum_{k=2}^{s-1}(-1)^{k+2}P_k^*\frac{d^{k-2}\lambda(1)}{dt^{k-2}},\ x'(1)-\widetilde{x}'(1)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle (-1)^{s+2}\frac{d^{s-3}x^*(1)}{dt^{s-3}}+\sum_{k=3}^{s-1}(-1)^{k+3}P_k^*\frac{d^{k-3}\lambda(1)}{dt^{k-3}},\ x''(1)-\widetilde{x}''(1)\Big\rangle+\cdots$$

$$+\Big\langle \frac{dx^*(1)}{dt}+P_{s-1}^*\lambda(1),\ x^{(s-2)}(1)-\widetilde{x}^{(s-2)}(1)\Big\rangle-\Big\langle x^*(1),\ x^{(s-1)}(1)-\widetilde{x}^{(s-1)}(1)\Big\rangle \quad (4.73)$$

elde edilir. (4.63) ve (4.73) eşitsizlikleri toplanırsa

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt\geq\varphi_0(\tilde{x}(1),\tilde{x}'(1),\ldots,\widetilde{x}^{(s-1)}(1))-\varphi_0\big(x(1),x'(1),\ldots,x^{(s-1)}(1)\big)$$

olur. Bu ise tüm uygun $x(t)$ çözümü için, $J_4(x(\cdot))-J_4(\tilde{x}(\cdot))\geq 0$ eşitsizliğinin sağlandığını gösterir yani $\tilde{x}(t)$ optimal çözümdür. ∎

Sonuç 4.4. (2.29) amaç fonksiyonelli (2.30) diferansiyel içermeli Bolza probleminde G_k, H_k polihedral kümeler olmak üzere aşağıda verilen sınır değer koşullarını sağlayan

$$x^{(k)}(0)\in G_k\quad\text{ve}\quad x^{(k)}(1)\in H_k\ ,\ k=0,1,\ldots,s-1,$$

problemi ele alalım. Bu Bolza probleminde $\widetilde{x}(t)$ yörüngesinin optimalliği için $t=0$ ve $t=1$ anlarındaki transversallik koşulu sırasıyla

$$(d)\ (-1)^{s-j}\ \frac{d^{s-j}x^*(0)}{dt^{s-j}}+\sum_{i=j}^{s-1}(-1)^{i+j-1}P_i^*\frac{d^{i-j}\lambda(0)}{dt^{i-j}}\in K^*_{G_{j-1}}\big(\tilde{x}^{(j-1)}(0)\big)\ ,\ j=1,2,\ldots,s-1,$$

$$x^*(0)\in K^*_{G_{s-1}}\big(\tilde{x}^{(s-1)}(0)\big),$$

$$(e)\quad\sum_{i=j}^{s-1}(-1)^{i+j}P_i^*\frac{d^{i-j}\lambda(1)}{dt^{i-j}}\in K^*_{H_{j-1}}\big(\tilde{x}^{(j-1)}(1)\big)\ ,\ j=1,2,\ldots,s-1,$$

$$-x^*(1)\in K^*_{H_{s-1}}\big(\tilde{x}^{(s-1)}(1)\big),$$

$$\left((-1)^{s-1}\ \frac{d^{s-1}x^*(1)}{dt^{s-1}}\ ,\ (-1)^s\ \frac{d^{s-2}x^*(1)}{dt^{s-2}}\ ,\ (-1)^{s-1}\ \frac{d^{s-3}x^*(1)}{dt^{s-3}}\ ,\ \ldots\ ,\ -\frac{dx^*(1)}{dt}\ ,\ x^*(1)\right)$$

$$\in\partial\varphi_0\Big(\tilde{x}(1),\ \tilde{x}'(1),\ldots,\ \tilde{x}^{(s-1)}(1)\Big)$$

dır.

İspat. Teorem 4.9'un ispatında (4.68) eşitsizliğde integral alınırsa

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt\geq\int_0^1\Big[\Big\langle(-1)^s\frac{d^sx^*(t)}{dt^s},x(t)-\tilde{x}(t)\Big\rangle-\Big\langle\frac{d^s\big(x(t)-\tilde{x}(t)\big)}{dt^s},x^*(t)\Big\rangle\Big]dt$$

$$+\sum_{i=1}^{s-1}\Big\langle \Omega_i(1)\ ,\ \frac{d^{i-1}\big(x(1)-\widetilde{x}(1)\big)}{dt^{i-1}}\Big\rangle-\sum_{i=1}^{s-1}\Big\langle \Omega_i(0)\ ,\ \frac{d^{i-1}\big(x(0)-\widetilde{x}(0)\big)}{dt^{i-1}}\Big\rangle \qquad (4.74)$$

olur. (4.74) eşitsizliğinin sağ tarafındaki parantez içindeki ifade Ψ ile gösterildiği için bu integral hesaplanırsa

$$\int_0^1 \Psi dt=(-1)^s\Big\langle \frac{d^{s-1}x^*(1)}{dt^{s-1}},x(1)-\widetilde{x}(1)\Big\rangle-\Big\langle \frac{d^{s-1}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-1}},x^*(1)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle \frac{d^{s-2}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-2}},\frac{dx^*(1)}{dt}\Big\rangle-\Big\langle \frac{d^{s-3}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-3}},\frac{d^2x^*(1)}{dt^2}\Big\rangle$$

$$+\cdots+(-1)^{s+1}\Big\langle \frac{d\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt},\ \frac{d^{s-2}x^*(1)}{dt^{s-2}}\Big\rangle-(-1)^s\Big\langle \frac{d^{s-1}x^*(0)}{dt^{s-1}},x(0)-\widetilde{x}(0)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle \frac{d^{s-1}\big(x(0)-\tilde{x}(0)\big)}{dt^{s-1}},x^*(0)\Big\rangle-\Big\langle \frac{d^{s-2}\big(x(0)-\tilde{x}(0)\big)}{dt^{s-2}},\frac{dx^*(0)}{dt}\Big\rangle$$

$$+\Big\langle \frac{d^{s-3}\big(x(0)-\tilde{x}(0)\big)}{dt^{s-3}},\frac{d^2x^*(0)}{dt^2}\Big\rangle+\cdots+(-1)^s\Big\langle \frac{d\big(x(0)-\tilde{x}(0)\big)}{dt},\ \frac{d^{s-2}x^*(0)}{dt^{s-2}}\Big\rangle \qquad (4.75)$$

elde edilir. (4.75) formülü kullanılarak (4.74) eşitsizliği düzenlenirse,

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt\geq(-1)^s\Big\langle \frac{d^{s-1}x^*(1)}{dt^{s-1}},x(1)-\widetilde{x}(1)\Big\rangle-\Big\langle \frac{d^{s-1}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-1}},x^*(1)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle \frac{d^{s-2}\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt^{s-2}},\frac{dx^*(1)}{dt}\Big\rangle+\cdots+(-1)^{s+1}\Big\langle \frac{d\big(x(1)-\tilde{x}(1)\big)}{dt},\ \frac{d^{s-2}x^*(1)}{dt^{s-2}}\Big\rangle$$

$$-(-1)^s\Big\langle \frac{d^{s-1}x^*(0)}{dt^{s-1}},x(0)-\widetilde{x}(0)\Big\rangle+\Big\langle \frac{d^{s-1}\big(x(0)-\tilde{x}(0)\big)}{dt^{s-1}},x^*(0)\Big\rangle$$

$$-\Big\langle \frac{d^{s-2}\big(x(0)-\tilde{x}(0)\big)}{dt^{s-2}},\frac{dx^*(0)}{dt}\Big\rangle+\cdots+(-1)^s\Big\langle \frac{d\big(x(0)-\tilde{x}(0)\big)}{dt},\ \frac{d^{s-2}x^*(0)}{dt^{s-2}}\Big\rangle$$

$$+\big\langle\Omega_1(1),x(1)-\widetilde{x}(1)\big\rangle+\big\langle\Omega_2(1),\frac{d\big(x(1)-\widetilde{x}(1)\big)}{dt}\big\rangle+\cdots+\big\langle\Omega_{s-1}(1),\frac{d^{s-2}\big(x(1)-\widetilde{x}(1)\big)}{dt^{s-2}}\big\rangle$$

$$-\big\langle\Omega_1(0),x(0)-\widetilde{x}(0)\big\rangle-\big\langle\Omega_2(0),\frac{d\big(x(0)-\widetilde{x}(0)\big)}{dt}\big\rangle-\cdots-\big\langle\Omega_{s-1}(0),\frac{d^{s-2}\big(x(0)-\widetilde{x}(0)\big)}{dt^{s-2}}\big\rangle$$

bulunur. Burada $\Omega_i(t)$, $i=1,2,\ldots,s-1$, tanımı kullanılırsa

$$\int_0^1\Big(g(x(t),t)-g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt\geq\Big\langle(-1)^s\frac{d^{s-1}x^*(1)}{dt^{s-1}}+\sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1}P_k^*\frac{d^{k-1}\lambda(1)}{dt^{k-1}},\ x(1)-\widetilde{x}(1)\Big\rangle$$

$$+\Big\langle(-1)^{s+1}\frac{d^{s-2}x^*(1)}{dt^{s-2}}+\sum_{k=2}^{s-1}(-1)^{k+2}P_k^*\frac{d^{k-2}\lambda(1)}{dt^{k-2}},\ x'(1)-\widetilde{x}'(1)\Big\rangle$$

$$+\cdots+\Big\langle\frac{dx^*(1)}{dt}+P_{s-1}^*\lambda(1),\ x^{(s-2)}(1)-\widetilde{x}^{(s-2)}(1)\Big\rangle-\Big\langle x^*(1),\ x^{(s-1)}(1)-\widetilde{x}^{(s-1)}(1)\Big\rangle$$

$$-\Big\langle (-1)^s \frac{d^{s-1}x^*(0)}{dt^{s-1}} + \sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1} P_k^* \frac{d^{k-1}\lambda(0)}{dt^{k-1}},\ x(0) - \widetilde{x}(0) \Big\rangle$$

$$-\Big\langle (-1)^{s+1} \frac{d^{s-2}x^*(0)}{dt^{s-2}} + \sum_{k=2}^{s-1}(-1)^{k+2} P_k^* \frac{d^{k-2}\lambda(0)}{dt^{k-2}},\ x'(0) - \widetilde{x}'(0) \Big\rangle - \cdots$$

$$-\Big\langle \frac{dx^*(0)}{dt} + P_{s-1}^*\lambda(0),\ x^{(s-2)}(0) - \widetilde{x}^{(s-2)}(0) \Big\rangle$$

$$+\Big\langle x^*(0),\ x^{(s-1)}(0) - \widetilde{x}^{(s-1)}(0) \Big\rangle \tag{4.76}$$

elde edilir. (e) transversallik koşulunda verilen subdiferansiyel tanımından

$$\varphi_0\Big(x(1), x'(1), \ldots, x^{(s-1)}(1)\Big) - \varphi_0\Big(\tilde{x}(1), \tilde{x}'(1), \ldots, \tilde{x}^{(s-1)}(1)\Big)$$

$$\geq \Big\langle (-1)^{s-1}\ \frac{d^{s-1}x^*(1)}{dt^{s-1}}\ ,\ x(1) - \tilde{x}(1) \Big\rangle + \Big\langle (-1)^s\ \frac{d^{s-2}x^*(1)}{dt^{s-2}}\ ,\ x'(1) - \tilde{x}'(1) \Big\rangle$$

$$+ \cdots + \Big\langle -\frac{dx^*(1)}{dt}\ ,\ x^{(s-2)}(1) - \tilde{x}^{(s-2)}(1) \Big\rangle + \Big\langle x^*(1)\ ,\ x^{(s-1)}(1) - \tilde{x}^{(s-1)}(1) \Big\rangle \tag{4.77}$$

olarak yazılabilir. O halde (4.76) ve (4.77) eşitsizliklerinden

$$\int_0^1 \Big(g(x(t),t) - g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt + \varphi_0\Big(x(1), x'(1), \ldots, x^{(s-1)}(1)\Big)$$

$$-\varphi_0\Big(\tilde{x}(1), \tilde{x}'(1), \ldots, \tilde{x}^{(s-1)}(1)\Big) \geq \Big\langle \sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1} P_k^* \frac{d^{k-1}\lambda(1)}{dt^{k-1}},\ x(1) - \widetilde{x}(1) \Big\rangle$$

$$+\Big\langle \sum_{k=2}^{s-1}(-1)^{k+2} P_k^* \frac{d^{k-2}\lambda(1)}{dt^{k-2}},\ x'(1) - \widetilde{x}'(1) \Big\rangle + \cdots + \Big\langle P_{s-1}^*\lambda(1),\ x^{(s-2)}(1) - \widetilde{x}^{(s-2)}(1) \Big\rangle$$

$$-\Big\langle (-1)^s \frac{d^{s-1}x^*(0)}{dt^{s-1}} + \sum_{k=1}^{s-1}(-1)^{k+1} P_k^* \frac{d^{k-1}\lambda(0)}{dt^{k-1}},\ x(0) - \widetilde{x}(0) \Big\rangle$$

$$-\Big\langle (-1)^{s+1} \frac{d^{s-2}x^*(0)}{dt^{s-2}} + \sum_{k=2}^{s-1}(-1)^{k+2} P_k^* \frac{d^{k-2}\lambda(0)}{dt^{k-2}},\ x'(0) - \widetilde{x}'(0) \Big\rangle - \cdots$$

$$-\Big\langle \frac{dx^*(0)}{dt} + P_{s-1}^*\lambda(0)\ ,\ x^{(s-2)}(0) - \widetilde{x}^{(s-2)}(0) \Big\rangle + \Big\langle x^*(0)\ ,\ x^{(s-1)}(0) - \widetilde{x}^{(s-1)}(0) \Big\rangle \tag{4.78}$$

bulunur. Diğer transversallik koşulları dikkate alınırsa

$$\int_0^1 \Big(g(x(t),t) - g(\tilde{x}(t),t)\Big)dt \geq \varphi_0(\tilde{x}(1), \tilde{x}'(1), \ldots, \widetilde{x}^{(s-1)}(1)) - \varphi_0\big(x(1), x'(1), \ldots, x^{(s-1)}(1)\big)$$

gerçeklenir. O halde tüm uygun $x(t)$ çözümü için, $J_4(x(\cdot)) - J_4(\tilde{x}(\cdot)) \geq 0$ olup $\tilde{x}(t)$ optimal yörüngedir. ∎

4.3. NÜMERİK UYGULAMA

Polihedral yüksek mertebeden diskret içermeli (PDs) problemin optimallik koşullarını veren Teorem 4.6'yı $s = 2$ için tekrar düzenleyelim. Dolayısıyla, ikinci mertebeden diskret içermeli polihedral problemin optimallik koşulları aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 4.10. [41] İkinci mertebeden polihedral problemde $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{T}$ optimal yörünge olması için gerek ve yeter koşul aşağıda verilen polihedral Euler-Lagrange içermesini

$$x_t^* = P_0^*\lambda_t + P_1^*\lambda_{t-1} + u_t^*, \quad u_t^* \in \partial g(\tilde{x}_t, t), \;\; t = 0, \ldots, T-2,$$
$$\partial g(\tilde{x}_0, 0) = \partial g(\tilde{x}_1, 1) = \{0\}, \; x_{t+2}^* = Q^*\lambda_t, \; \lambda_t \geq 0,$$
$$\lambda_{-1} \equiv 0 \; , \;\; \left\langle P_0\tilde{x}_t + P_1\tilde{x}_{t+1} - Q\tilde{x}_{t+2} - d, \; \lambda_t \right\rangle = 0,$$

ve transversallik koşullarını sağlayan

$$x_{T-1}^* - P_1^*\lambda_{T-2} \in \partial g(\tilde{x}_{T-1}, T-1),$$
$$x_T^* \in \partial g(\tilde{x}_T, T),$$

hepsi birden aynı anda sıfır olmayan $x_t^*, \; t = 0, \ldots, T$ vektörlerinin var olmasıdır.

Uygulama olarak daha önceden incelenen (PDs) probleminde yörüngenin optimallik koşullarını veren Teorem 4.6'yı kullanarak, ikinci mertebeden polihedral diskret içermeli aşağıdaki problemi ele alalım.

Örnek 4.3. Teorem 4.6'yı kullanarak ikinci mertebeden ($s = 2$) polihedral diskret problemi için nümerik bir çözüm elde edelim. Bunun için $T = 15$, $g(x_T, T) = x_T$, $g(x_t, t) = 0$, $t = 2, 4, \ldots, 14$ olmak üzere

$$\min \sum_{t=2}^{15} g(x_t, t)$$
$$x_{t+2} \in F(x_t, x_{t+1}) \; , \; t = 0, 1, \ldots, 13 \; , \tag{4.79}$$
$$x_0 = 0 \; , \; x_1 = 1,$$

problemini ele alalım. Burada
$F(x, v_1) = \left\{ v_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} -0,1 \\ -0,2 \\ -0,3 \end{pmatrix} v_1 - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} v_2 \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ polihedral küme değerli bir dönüşümdür. Dikkat edilirse, F dönüşümün grafiği olan gph$F$ kümesinin bir koni olduğu açıktır.

Problem (4.79)'de verilen ikinci mertebeden polihedral problemde amaç fonksiyoneli $\sum_{t=2}^{T} g(x_T, T)$ olup $g(x_T, T) \not\equiv 0$ olduğundan biliyoruz ki $x_T^* \neq 0$ ve T anında $x_T^* \in \partial g(\tilde{x}_T, T)$ transversallik koşulu gerçeklenir.

O halde bu problemde $P_0^* = (1\ -2\ 1), P_1^* = (-0,1\ -0,2\ -0,3)$ ve $Q^* = (1\ -1\ 1)$ olmak üzere Teorem 4.6'yı kullanırsak, $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{15}$ yörüngesinin optimal olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki Euler-Lagrange diskret içermesini

$$\begin{gathered} x_t^* = P_0^*\lambda_t + P_1^*\lambda_{t-1} + u_t^*, \quad u_t^* \in \partial g(\tilde{x}_t, t), \ \ t = 0, \ldots, 13, \\ \partial g(\tilde{x}_0, 0) = \partial g(\tilde{x}_1, 1) = \{0\}, \ x_{t+2}^* = Q^*\lambda_t, \ \lambda_t \geq 0, \ \lambda_{-1} \equiv 0\ , \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{x}_t + \begin{pmatrix} -0,1 \\ -0,2 \\ -0,3 \end{pmatrix} \tilde{x}_{t+1} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \tilde{x}_{t+2}\ ,\ \lambda_t \right\rangle = 0, \end{gathered} \tag{4.80}$$

ve transversallik koşullarını

$$\begin{gathered} x_{14}^* - P_1^*\lambda_{13} \in \partial g(\tilde{x}_{14}, 14), \\ x_{15}^* \in \partial g(\tilde{x}_{15}, 15), \end{gathered}$$

sağlayan hepsi birden sıfır olmayan $x_t^*, \ t = 0, \ldots, 15$ vektörlerinin var olmasıdır.

g sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olduğu için $u_t^* = 0, \ t = 0, \ldots, 13$ olup $x_t^* = P_0^*\lambda_t + P_1^*\lambda_{t-1}$ denklemi gerçeklenir ve transversallik koşullarından

$$\begin{gathered} x_{14}^* - P_1^*\lambda_{13} = 0\ , \\ x_{15}^* = 1, \end{gathered}$$

elde edilir.

Bu denklemleri sistematik olarak çözerek λ_t $(t = 0, \ldots, 13)$ ve x_t^* $(t = 0, \ldots, 15)$ vektörlerini elde edelim. Öncelikle (4.80) denkleminde $t = 0$ için λ_0 vektörünün yapısını belirleyelim. $\lambda_0 = (a\ b\ c)^T$, $a, b, c \geq 0$ olmak üzere λ_0 ın her bir bileşeni sırasıyla Örnek 4.3'de verilen F polihedral küme değerli dönüşümdeki eşitsizliklere karşılık gelen çarpanlardır. O halde denklemde yerlerine yazılırsa $\tilde{x}_2 = -0,1$ veya $a = 0$, $\tilde{x}_2 = 0,2$ veya $b = 0$, $\tilde{x}_2 = -0,3$ veya $c = 0$ durumlarından biri gerçeklenir. Ancak F polihedral küme değerli dönüşüm tanımından $-0,1 \leq \tilde{x}_2 \leq 0,2$ olduğundan $c = 0$ olmalıdır. O halde $\lambda_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ bulunur. Benzer şekilde $d, e \geq 0$ olmak üzere

$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$ ve $\lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ e \\ 0 \end{pmatrix}$ elde edilir. Bu şekilde devam edilirse $\alpha_t, \beta_t, \gamma_t \geq 0$ olmak üzere $\lambda_{2t} = \begin{pmatrix} \alpha_t \\ \beta_t \\ 0 \end{pmatrix}$ $t = 0, 1, \ldots, 6$ ve $\lambda_{2t+1} = \begin{pmatrix} \gamma_t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $t = 2, 3, \ldots, 6$ şeklinde elde edilir.

$x^*_{15} = 1$ eşitliği kullanılarak $x^*_{15} = Q^*\lambda_{13}$ denkleminden $\lambda_{13} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ olup transversallik koşulundan $x^*_{14} = -0,1$ elde edilir. $x^*_{14} = Q^*\lambda_{12}$ olduğu için yani $-0,1 = (1 \quad -1 \quad 1)\begin{pmatrix} \alpha_6 \\ \beta_6 \\ 0 \end{pmatrix}$ denkleminden açıktır ki $\beta_6 = 0$ olamaz. Bu durumda $\alpha_6 = 0$ olmalıdır. O halde $\lambda_{12} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,1 \\ 0 \end{pmatrix}$ olup $x^*_{13} = 0,98$ bulunur. Benzer yol takip edilirse hesaplamalarda herhangi bir yuvarlama yapılmaksızın

$$\lambda_{11} = \begin{pmatrix} 0,98 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_{10} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,298 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_9 = \begin{pmatrix} 0,9204 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_8 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,68804 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_7 = \begin{pmatrix} 0,782792 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,4543592 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_5 = \begin{pmatrix} 0,49192016 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2,957910416 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0,099661923 \\ 0 \end{pmatrix}, \lambda_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5,935753217 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1,386474489 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 12,14880133 \\ 0 \end{pmatrix}$$

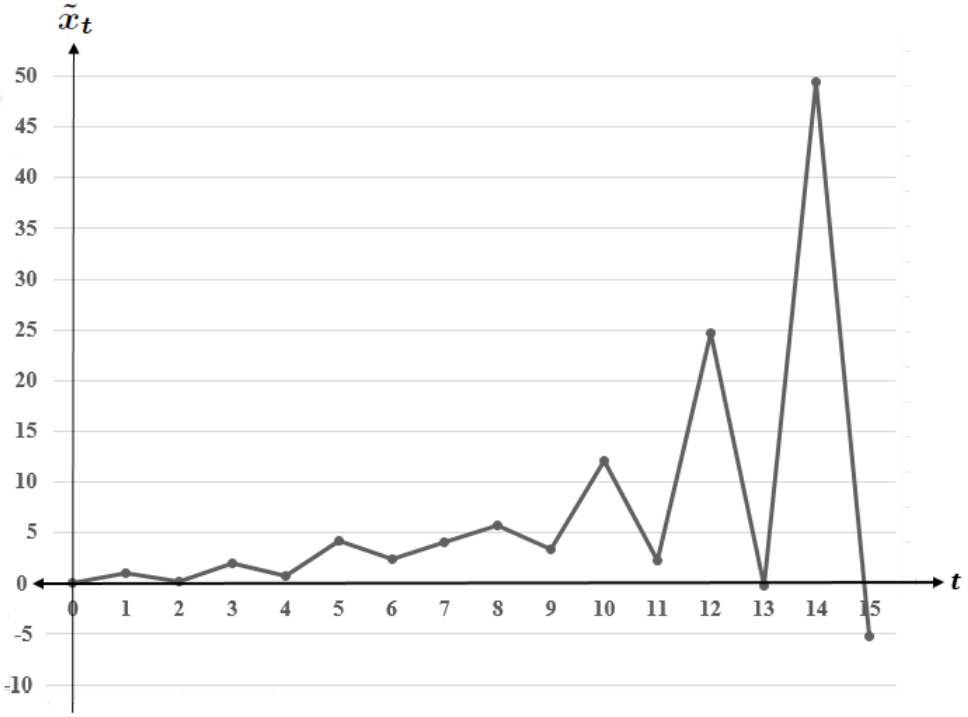
olarak bulunur.

Buna bağlı olarak hesaplanan $\{x^*_t\}_{t=0}^{15}$ eşlenik değişken değerleri Tablo 4.1'de verilmiştir. Ayrıca (4.80) denkleminden $\{x^*_t\}_{t=0}^{15}$ eşlenik değişken değerleri kullanılarak Tablo 4.1'de verilen $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{15}$ optimal yörünge değerleri elde edilir. Diğer taraftan bu optimal yörünge grafiksel olarak Şekil 4.1'de gösterilmiştir.

Tablo 4.1: $\{x_t^*\}_{t=0}^{15}$ eşlenik değişken ve $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{15}$ optimal yörünge değerleri.

t	x_t^*
15	1,000000000
14	-0,100000000
13	0,980000000
12	-0,298000000
11	0,920400000
10	-0,688040000
9	0,782792000
8	-1,454359200
7	0,491920160
6	-2,957910416
5	-0,099661923
4	-5,935753217
3	-1,386474489
2	-12,148801330
1	-5,202709244
0	-24,297602660

t	$\tilde{x}_t$
0	0,000000000
1	1,000000000
2	0,200000000
3	2,040000000
4	0,808000000
5	4,241600000
6	2,464320000
7	3,995168000
8	5,727673600
9	3,422400640
10	12,139827330
11	2,208417907
12	24,721338240
13	-0,263715917
14	49,389933300
15	-5,202709247



Şekil 4.1: Örnek 4.3'de verilen ikinci mertebeden polihedral diskret içermeli problemin $\{\tilde{x}_t\}_{t=0}^{15}$ optimal yörüngesi.

5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Konveks analiz yapılarında, varyasyon analizi ve optimal kontrol teorisinde optimizasyon problemlerle çalışmalar yaparken belli koşullar altında optimal çözüm var mıdır varsa tek midir optimallik için gerek ve yeter koşullar nedir sorularını sormak doğaldır. Şimdiye kadar yapılan çalışmalara baktığımızda varlık problemleri ile ilgilenildiği gibi varyasyon analizinde verilen bir problemde yörüngenin optimallik koşullarını belirlemek için bir çok çalışmalar yapılmış ve yapılmaya da devam etmektedir [18, 26, 29, 50]. Smirnov [21] kitabında diferansiyel içermeler için varlık teoremlerini vermiştir. Varyasyon analizinde optimallik koşullarını belirlemek için çalışmalar yapan Pshenichnyi [25] kitabında, diferansiyel zamanlı optimizasyon problemine göre belirlenen diskret zamanlı optimizasyon problemleri için optimallik koşullarını verdikten sonra yaklaşım parametreleri üzerinden formal limite geçerek sürekli problemin optimallik koşullarını bulmuştur. Mahmudov [36] çalışmasında, yüksek mertebeden diskret içermeli ve üçüncü mertebeden diferansiyel içermeli Cauchy başlangıç koşullu konveks optimizasyon problemlerinde yörüngenin optimallik koşullarını belirlemiştir. Mahmudov'un bu çalışmasından farklı olarak bu tez çalışmasında, üçüncü ve yüksek mertebeden diskret ve diferansiyel içermeli konveksliğin özel bir hali olan polihedral problemlerde yörüngenin optimallik koşulları araştırılmıştır.

Bu tez çalışmasında özetle aşağıdaki sonuçlar ve gözlemler elde edilmiştir. Elde edilen sonuçlar yenidir ve günümüzde popülerliğini koruyan konuların açığa kavuşmasına katkı sağlayacak niteliktedir. Ele alınan problemler üçüncü ve yüksek mertebeden olmak üzere iki ayrı başlık altında toplanmıştır.

1. Üçüncü mertebeden (P_D) diskret içermeli ve (P_C) diferansiyel içermeli polihedral optimizasyon problemlerinin optimallik koşulları belirlenmiştir.

   (i) (P_D) probleminde diskret içermesini sağlayan Cauchy başlangıç koşulları altında Bolza fonksiyonelini minimum yapan yörüngenin optimal olması için, ilk kez Clarke tarafından kullanılan Mayer problemi için verilen Euler-Lagrange içermeleri ve transversallik koşulları [7], Teorem 4.1'de ispatlanmıştır.

(ii) Üçüncü mertebeden (P_C) diferansiyel içermeli polihedral optimizasyon probleminde yörüngenin optimallik yeter koşulları belirlenmiştir. Bu koşulların polihedral hatta konveks problemler için aynı zamanda gerek koşul olduğu Uyarı 4.1'de verilmiştir. Ancak limit hesabındaki işlemlerden kaçınmak ve F küme değerli dönüşümüne ek koşullar getirileceği için genel olarak literatürde diferansiyel içermeli problemlerin optimallik yeter koşulları verilmektedir [47, 48, 49]. Bu sebeple bu çalışmada (P_C) diferansiyel içermeli polihedral optimizasyon probleminde yörüngenin optimallik yeter koşulları bulunup ispat edilmiştir (Teorem 4.4).

(iii) (P_C) probleminde Cauchy kısıt koşulları yerine sınır-değer koşulları ve Bolza fonksiyoneli yerine Lagrange fonksiyoneli alındığında elde edilen üçüncü mertebeden polihedral diferansiyel içermeli (P_{C1}) probleminde değişen transversallik koşulları verilmiştir (Teorem 4.5).

(iv) Elde edilen bu sonuçlar doğrultusunda, bir uygulama olarak sınır değer koşullu (P_L) problemi için varyasyon analizinde önemli bir yere sahip olan Euler-Poisson denkleminin yörüngenin optimalliği için gerek koşul olduğu gösterilmiştir (Örnek 4.1). Ayrıca (P_L) probleminde transversallik koşullarının neden verilmediği Uyarı 4.3'de gösterilmiştir.

(v) Diğer bir uygulama olarak üçüncü mertebeden lineer diferansiyel içermeli kontrol parametreli optimal kontrol problemi için elde edilen sonuçlar neticesinde transversallik ve Weierstrass-Pontryagin koşulları verilmiştir (Sonuç 4.3).

2. Şimdiye kadar ele aldığımız problemlerin bir genellemesi olarak, keyfi s. mertebeden, yüksek mertebeden polihedral diskret ve diferansiyel içermeli problemlerle çalışılmış ve bu problemlerde yörüngenin optimallik koşulları araştırılmıştır.

(i) (PDs) yüksek mertebeden polihedral diskret içermeli Cauchy problemlerinde yörüngenin optimallik koşulları belirlenmiştir. Kanıtlama yapılırken optimallik koşulları, çalışılan üçüncü mertebeden polihedral problemlerde elde edilen koşullardan yola çıkılarak tümevarım yöntemi ile gözlemlenmiş ve (PDs) problemi için optimallik koşulları Teorem 4.6'da ispat edilmiştir.

(ii) (PCs) diferansiyel probleminin optimallik koşullarını bulmak için diskret yaklaşım yöntemi kullanılmıştır. Bunun için öncelikle (PCs) problemine göre belirlenen $(PDAs)$ diskret yaklaşım probleminin, (PDs) diskret probleminde elde edilen optimallik koşulları kullanılarak, optimallik koşulları belirlenmiştir. Bu kısımda daha sonraki çalışmalara ışık tutacağını düşündüğümüz F küme değerli dönüşümün polihedral ya da konveks olmasına bakılmaksızın Bolza fonksiyonelindeki son nokta fonksiyonunun subdiferansiyel geçişini sağlayan yüksek mertebeden denklik teoremi ispatlanmıştır (Teorem 4.7).

(iii) $(PDAs)$ diskret yaklaşım probleminde elde edilen optimallik koşullarında limite geçerek (PCs) problemin optimallik yeter koşulları belirlenmiştir (Teorem 4.9).

(iv) (PCs) diferansiyel problemde Cauchy koşulları yerine sınır koşulları alındığında değişen transversallik koşulları verilmiştir. Bu koşullardaki $t = 0$ ve $t = 1$ anındaki koşulların işaret farkı ile farklı olduğu Sonuç 4.4'de gözlemlenmiştir.

3. Çalışılan yüksek mertebeden diskret içermeli (PDs) problemde bazı özel değerler alarak nümerik bir örnekle optimal yörünge hesaplanmıştır.

   (PDs) probleminde yörüngenin optimallik koşullarını veren Teorem 4.6'yı kullanılarak, ikinci mertebeden polihedral bir problem için $\{x_t^*\}_{t=0}^{15}$ eşlenik değişken değerleri hesaplanmış ve Tablo 4.1'de detaylar verilmiştir. Ayrıca elde edilen sonuçlar neticesinde yörüngenin nasıl ilerlediği Şekil 4.1'de gösterilmiştir.

Bu tez çalışmasından sonra konveks küme değerli dönüşümler için dualite teoremleri incelenecektir. Küme değerli dönüşümler için en temel dualite teoremlerinden biri şu şekilde verilir: F konveks küme değerli dönüşümü için eğer H Hamilton fonksiyonu kapalı ve bir x_1 noktasında $H(x_1, y^*)$ sonlu ise

$$\inf_{x^*}\{\langle x, x^*\rangle - M(x^*, y^*)\} = H(x, y^*) \tag{5.1}$$

denklemi gerçeklenir [35, Theorem 2.19, s.86] burada $M(x^*, y^*) = \inf_{(x,y)}\{\langle x, x^*\rangle - \langle y, y^*\rangle : (x, y) \in gphF\}$ şeklinde tanımlanır. (5.1) denkleminden faydalanarak konveks analizdeki bazı sonuçların küme değerli dönüşümlerle ilişkisi karşılaştırılabilir. Örneğin bu önemli teoremden yola çıkarak f konveks proper, kapalı fonksiyonu için

dualite teorisinde önemli bir yere sahip olan $f = f^{**}$ eşitliği farklı bir şekilde ispatlanabilir.

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ küme değerli dönüşümün grafiği konveks koni olduğunda, özel olarak dönüşüm "konveks süreç (convex process)" olarak adlandırılır. Açıkca

$$\begin{aligned} &(i) \quad A(\lambda x) = \lambda A(x),\ \forall\ \lambda > 0,\ \forall x \in domA \\ &(ii) \quad A(x_1) + A(x_2) \subset A(x_1 + x_2),\ \forall\ x_1, x_2 \in domA \\ &(iii) \quad 0 \in A(0) \end{aligned}$$

koşulları gerçekleniyorsa A küme değerli dönüşüme *konveks process* denir [6, s.413]. $A^* : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dual dönüşümü

$$A^*(y^*) = \{x^* : \langle x, x^* \rangle \leq \langle y^*, y \rangle,\ \forall\ (x, y) \in gphA\}$$

şeklinde tanımlanır [21, s.49].

$C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer operatör ve $K \subseteq \mathbb{R}^m$ kapalı konveks koni olmak üzere $A(x) = Cx + K$ dönüşümünün grafiği kapalı konveks konidir ve A konveks processin duali aşağıdaki gibi verilir:

$$A^*(y^*) = \begin{cases} C^*y^* & ,\ y^* \in K^* \\ \emptyset & ,\ y^* \notin K^* \end{cases}.$$

Bu aslında konveks process lineer operatöre indirgendiği taktirde yani eğer $A(x) = Cx$ ise her $y^* \in \mathbb{R}^m$ için $A^*(y^*) = C^*y^*$ olduğu anlamına gelir [21, s.50]. Bunun yanı sıra, F küme değerli dönüşüm olmak üzere Teorem 2.19 [35, s.86] kullanılarak $gphF = K$ konveks koni ve $H(\cdot, y^*)$ Hamilton fonksiyonu kapalı konveks fonksiyon ise her $x^* \in F^*(y^*)$ için

$$\inf_{x^* \in F^*(y^*)} \{\langle x, x^* \rangle\} = \sup_{y \in F(x)} \{\langle y, y^* \rangle\}$$

sağlanır [35, Corollary 2.5, s.89]. Bu sonuç, keyfi C lineer operatörünün sağladığı $\langle y^*, Cx \rangle = \langle C^*y^*, x \rangle$ özelliğinin, küme değerli dönüşümler için benzer bir sonucudur. Bu tez çalışmasındaki bulgular ve sonuçlar doğrultusunda, uygulama olarak, lineer diskret ve diferansiyel optimal kontrol problemleri için nümerik örneklerle optimal yörünge hesaplanabilir. Bundan sonraki amacım çalışmalarımı bu yönde sürdürmektir.

KAYNAKLAR

[1]. Türkay, M., *Optimizasyon Modelleri ve Çözüm Metodları*, Koç Üniversitesi, Endüstri Mühendisliği Bölümü Ders Notları.

[2]. Williams, H.P., 1997, *Model Building in Mathematical Programming*, John Willey & Sons, New York, USA, ISBN:0-471-94111-5.

[3]. Bertsekas, D.P., 1999, *Nonlinear Programming*, Athena Scientific, Belmont, Massachusetts, USA,ISBN:1-886529-00-0.

[4]. Dantzig, G.B. and Thapa, M.N., 2003, *Linear Programming*, Springer, USA, 0-387-98613-8.

[5]. Boyd, S. and Vandenberghe, L., 2004, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge.

[6]. Rockafellar, R. T., 1972, *Convex Analysis*, Princeton University Press, New Jersey, ISBN:0-691-08069-0.

[7]. Clarke, F. H., 1983, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, John Wiley & Sons Inc. New York, ISBN:0-89871-256-4.

[8]. Azimli, A. 2011, *Matematiksel Optimizasyon*, Papatya Yayıncılık, Istanbul, ISBN:978-605-4220-24-3.

[9]. Ioffe, V.M. and Tikhomirov, A.D., 1974, *Theory of Extremal Problems*, Nauka, Moscow, 1978, English transl., North-Holland, Amsterdam.

[10]. Gökhan,G., 1978, *Varyasyon Hesabı*, Kutulmuş Matbaası, İstanbul, İ.D.M.M.A. Yayınları, Sayı:150.

[11]. Alekseev, V.M., Tikhomirov, V.M., and Fomin, S.V., 1987, *Optimal Control*, Plenum Press, New York, USA, ISBN:0-306-10996-4.

[12]. Athans M. and Falb P.L., 1966, *Optimal Control an Introduction to the Theory and its Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, USA, ISBN:789-MAMM-76543.

[13]. Pinch, E.R., 1993, *Optimal Control and the Calculus of Variations*, Oxford Science Publications, Great Britain, ISBN:0-19-851489-1.

[14]. Pontryagin L.S., Boltyanskii V.G., Gamkrelidze R.V. and Mischenko E.F., 1962, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, John Willey & Sons, New York, USA, ISBN 2-88124-077-1.

[15]. Rockafellar, R. T., 2002, Variational Analysis and Its Applications, *Preface to a special issue of Set-Valued Analysis*, 12, 1-4.

[16]. Rockafellar, R. T. and Wets, J.-B., 1998, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, ISBN:3-540-62772-3.

[17]. Warga J., 1972, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, USA, ISBN 9781483259192.

[18]. Mordukhovich, B. S., 2006, *Variational Analysis and Generalized Differentiation, I: Basic Theory II: Applications*, Grundlehren Series (Fundamental Principles of Mathematical Sciences), Springer, Berlin, ISBN:3-540-25437-4.

[19]. Aubin, J.-P. and Frankowska, H., 1990, *Set-Valued Analysis*, Birkhäauser, Boston, Basel, Berlin.

[20]. Kurzhanski A. B., Veliov V. M., 1993, *Set-valued Analysis and Differential Inclusions*, Birkhaeuser, Boston, MA, USA.

[21]. Smirnov, G.V., 2001, *Introduction to the Theory of Differential Inclusions*, American Mathematical Society, Providence, Rhode Islands.

[22]. Aubin, J.-P. and Cellina, A., 1984, *Differential Inclusions*, Springer-Verlag, Grundlehren der Math., Wiss.

[23]. Cernea A., 2002, On the existence of viable solutions for a class of second order differential inclusions, *Discuss. Math., Differ. Incl.*, 22(1), 67-78.

[24]. Agarwal R.P., & O'Regan D., 2004, Viable solutions of differential inclusions on closed sets, *Applicable Analysis*, Vol.83(10), 1027-1036.

[25]. Pshenichnyi, B. N., 1980, *Convex Analysis and Extremal Problems*, Nauka, Moscow.

[26]. Pshenichnyi, B. N., *Necessary Conditions of Extremum*, Pure and Applied Mathematics, CRC,USA,ISBN: 0-824-71556-X.

[27]. Pshenichnyi, B. N., 1976, *Necessary Conditions of the Extremum for Differential Inclusions*, Kibernetika,6,60-73.

[28]. Mahmudov, E. N., 2005, On duality in problems of optimal control described by convex differential inclusions of Goursat-Darboux type, *J. Math. Anal. Appl.*, 307, 628-640.

[29]. Mahmudov, E. N., 2005, The optimality principle for discrete and first order differential inclusions, *J. Math. Anal. Appl.* 308, 605-619.

[30]. Mahmudov, E. N., 2006, Necessary and sufficient conditions for discrete and differential inclusions of elliptic type, *J. Math. Anal. Appl.* Vol. 323, 2, 768-789.

[31]. Mahmudov, E. N., 2007, Locally adjoint mappings and optimization of the first boundary value problem for hyperbolic type discrete and differential inclusions, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Appl.* 67, 2966-2981.

[32]. Mahmudov, E. N., 2008, Sufficient conditions for optimality for differential inclusions of parabolic type and duality, *Journal of Global Optimization*, 41 (1), 31-42.

[33]. Mahmudov, E. N., 2015, Optimization of Second Order Discrete Approximation Inclusions, *Numerical Funct. Analysis and Opt.*, 36(5), 624-643.

[34]. Kayakutlu G. and Mahmudov, E. N., 2017, Sufficient Conditions of Optimality for Second Order Differential Inclusions, *Engineering Mathematics*, 1(1), 53-58.

[35]. Mahmudov, E. N., 2011, *Approximation and Optimization of Discrete and Differential Inclusions*, Elsevier, USA, ISBN: 978-0-12-388428-2.

[36]. Mahmudov, E. N., 2014, Approximation and Optimization of Higher order discrete and differential inclusions, *Nonlinear Diff. Equat. and Appl.*, 21, 1-26.

[37]. Mahmudov, E. N., 2008, Optimal control of higher order differential inclusions of Bolza type with varying time interval, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 69, 1699-1709.

[38]. Mahmudov, E. N., 2015, Transversality condition and optimization of higher order ordinary differential inclusions, *Optimization: A Journal of Mathematical Programming and Operations Research*, 64(10), 2131-2144.

[39]. Haddad, T. and Yarou, M., 2006, Existence of solutions for nonconvex second-order differential inclusions in the infinite dimensional space, *Electronic J. Diff. Equat.*, 33, 1-8.

[40]. Mahmudov, E. N. and Pshenichnyi, B. N., 1979, Polyhedral mappings, *Izv. Academy of Sci. of Azerbaijan*, 2, 10-14.

[41]. Mahmudov, E. N., 2015, Mathematical programming and polyhedral optimization of second order discrete and differential inclusions, *Pacific Journal of Opt.*, 11(3), 495-525.

[42]. Mordukhovich, B. S., 2016, Optimal control of the sweeping process over polyhedral controlled sets, *J. of Differential Equations*, 260, 3397-3447.

[43]. Berkovitz, L.D., 2002, *Convexity and Optimization in* $\mathbb{R}^n$, John Willey & Sons, New York, USA, 0-471-35281-0.

[44]. Webster, R., 1994, *Convexity* Oxford Science Publications, Oxford University Press, New York, USA, ISBN:0-19-853147-8.

[45]. Mahmudov, E. N., Demir, S., Değer, Ö., 2016, Optimization of third-order discrete and differential inclusions described by polyhedral set-valued mappings, *Applicable Analysis*, 95, 1831-1844.

[46]. Hiriart-Urruty J.-B., Lemarechal C., 2001, *Fundamentals of Convex Analysis*, Springer Verlag, Berlin, ISBN:978-3-540-42205-1

[47]. Barroso A.C., Croce C., Ribeiro A.M., 2013, Sufficient Conditions for Existence of Solutions to Vectorial Differential Inclusions and Applications, *Houston Journal of Mathematics*, 39(3), 929-967.

[48]. Cellina A., 1993, On Minima Of A Functional Of The Gradient: Sufficient Conditions, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods*, 20(4), 343-341.

[49]. Hartl R.F. and Sethi S.P., 1984, Optimal control problems with differential inclusions: Sufficiency conditions and an application to a production-inventory model, *Optimal Control Applications and Methods*, 5(4), 289-307.

[50]. Clarke, F. H., 1975, The Euler-Lagrange Differential inclusion, *Journal of Differantial Equations*, 19, 80-90.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler	
Adı Soyadı	Sevilay DEMİR SAĞLAM
Doğum Yeri	Tokat
Doğum Tarihi	17.04.1988
Uyruğu	☑ T.C. ❒ Diğer:
Telefon	02124440000-15163
E-Posta Adresi	sevilay.demir@istanbul.edu.tr
Web Adresi	aves.istanbul.edu.tr/sevilay.demir



Eğitim Bilgileri	
Lisans	
Üniversite	Sakarya Üniversitesi
Fakülte	Fen Fakültesi
Bölümü	Matematik Bölümü
Mezuniyet Yılı	2009

Yüksek Lisans	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2011

Doktora	
Üniversite	İstanbul Üniversitesi
Enstitü Adı	Fen Bilimleri Enstitüsü
Anabilim Dalı	Matematik Anabilim Dalı
Programı	Matematik Programı
Mezuniyet Tarihi	2017

Makale ve Bildiriler
Mahmudov E., Demir S. and Değer Ö., 2016, Optimization of third order discrete and differential inclusions described by polyhedral set-valued mappings, *Applicable Analysis*, 95, 1831-1844.
Demir S. and Mahmudov E. N., 2015, Approximation and optimization of third order polyhedral discrete and differential inclusions, *13th Viennese workshop on optimal control and dynamic games*, 13-16 May 2015, Vienna, Austria, 131-131.
Demir S. and Mahmudov E., 2015, Sufficient conditions of optimality for third order polyhedral differential inclusions with boundary value constraints, *5th Internatio - al conference on control and opt. with industrial applications*, 27-29 August 2015 Baku, Azerbaijan, ISBN:978-9952-8668-8-3, 58-61.