FİNAL ÖZET

Gözlem; olgu toplama işlemi değil, olgu bulma işlemidir.

Bir gözlemin bilimsel değeri, düvenirlik ve geçerlik gibi iki temel koşulu yerine getirme gücüne bağlıdır.

Güvenilir gözlem, nesnel nitelikte olan gözlemdir.

Gözlemin tekrar edilebilirliği ve her tekrarında tutarlı kalması, güvenilirliğin bir başka ölçüsüdür.

Gözlemin geçerliğine gelince, geçerli bir gözlem belli bir amaca yönelik, bir sorunun yanıtlanmasına, bir problemin çözümüne veya bir hipotezin test edilmesine yarayan bir gözlemdir.

Bir gözlemin güvenirliği, geçerliği sağlandıktan sonra ancak önem taşır.

Deney bir gözlem biçimidir. Olgu bulma işlemi olarak deney kuşkusuz sı- radan bir gözleme göre daha kesin, daha düzenli, amaç ve sınırları daha
belirgin bir işlemdir.

Bir deneysel durumda olguların doğal akışına müdahale iki yoldan yapılır: (1) koşulları hazırlanmış yapay bir durum ortaya koymak, (2) gözlem konusu olguya ilişkin başlangıç koşullarında sistematik bir değişim yapmak.

"Yapay bir durum ortaya koymak" gözleme konu olgunun ortaya çıkmasına yol açması gereken koşulları düzenlemek anlamına gelir.

Deney dilinde sonucu belirleyen etkenlere "bağımsız değişken", sonuca ise, "bağımlı değ işken" denir.

Ölçme, genellikle gözlem veya deney yoluyla sağlanan verilerin nicel ola- rak ifadesi için başvurulan bir işlemdir.

Ölçme, bazı kurallara göre nesnelere, olgulara ya da bunların gözlemlerine sayı verme işlemidir.

Ölçme bazı nesnel şeyleri sayı denen bazı soyut işaretlerle belirleme işlemidir.

Bir niteliğin sürekliligi, o nitelige verilecek herhangi iki deger arasında daima üçüncü bir degere yer oldugu anlamına gelir.

Ölçek, bir işaret (sayı) sisteminden başka bir şey degildir.

Bir ölçegin niteligini, nesnel şeyleri sayılarla belirleme işleminde izlenen kural veya kurallar belirler.

Uygulamada sayıların farklı kullanılışı farklı ölçeklerden söz etmemize yol açmıştır. En basit düzeyde sayılar nesneleri birbirinden ayırt edici işaret olarak kullanılır.

Ölçmeyi, "nesnel şeylere belli kurallara göre sayı verme işlemi" diye tanımladığınız hatırlanırsa, bir çeşit ölçmeye konu oluşturmayacak herhangi bir niteliğin kolayca gösterilemeyeceği kendiliğinden ortaya çıkar.

Geniş bir ayrımla diyebiliriz ki, bilimsel ilgi alanımıza giren nitelikleri içlemsel (intensive) ve kaplamsal (extensive) olmak üzere iki grupta toplamak yoluna gidilebilir. ˙Iki grup nitelik arasındaki temel fark, ikinci grup nitelikler (örneğin, uzunluk, ağırlık, hacim, alan, açı, elektrik direnci, vb.) toplanabilir olduğu halde, birinci grup niteliklerin (örneğin, yogunluk, sertlik, sıcaklık, öğrenme yeteneği, güzellik, kibarlık, vb.) toplanamaz olmasıdır. Örneğin iki
nesneden A’nın ağırlığı 5 kg., B’nin ağırlığı 7 kg. ise A ve B’nin birlikte ağırlığı 12 kg. dır. Yani A + B = 5 + 7. Oysa, A’nın sıcaklığı 20 C, B’nin sıcaklığı 30 C_ ise A ve B’nin birlikte sıcaklığı 50 C_ değildir. Yani A + B ≠ 20 + 30.

Nominal ölçek, sayıların nesnel s¸eyleri adlandırma veya etiketleme amacı ile kullanıldıgı bir ölçektir.

Niteliksel sınıflandırma yapılırken kullanılır. Atanan değerler sadece sözel degerlerdir, sayısal degillerdir. Toplanmaz, çıkarılmazlar.

Nominal ölçek, adından da sezinlenebilecegi gibi, sözde bir ölçektir. Son derece basit ve ilkel diyebilecegimiz bir ölçme türüdür.

Ordinal ölçek sıralama işlemine dayanır. Bu ölçekte sayılar, nesnelerin bir sıralamada tuttukları yerleri işaretlemek veya bir nitelik yönünden derecelerini göstermek için kullanılır. Nominal ölçekten daha üst bir ölçme düzeyi oluşturmakla birlikte ordinal ölçeğin de dar anlamda nicel bir betimleme için yeterli olduğu söylenemez. Dolayısıyla ordinal ölçek de niteliksel bir ölçme yapılırken kullanılır. Özdeşlik ve büyüklük özelligine sahiptir.

Herhangi bir nesne veya olgu grubuna ordinal ölçeğin uygulanması iki varsayımın geçerligğine bağlıdır. Bunlardan biri, inceleme konusu nitelik veya niteliklerin bu nesne veya olgularda farklı miktar veya derecelerde var oldugu; digeri, nesneleri veya olguları farklı derecelerde taşıdıkları nitelikler yönünden bir

tür karşlaştırmaya elverişli bir işlem veya yöntemin bulunduğu varsayımıdır.
İnterval (Eşit Aralıklı) Ölçek; Nesnel şeylere verilen sayılar eşit aralıklar belirliyorsa, ölçeğimiz "interval" adını alır. Niceliksel betimlemeye bu ölçek ile ulaşmaktayız. Ölçekte "gerçek sıfır noktası" gerektirmeyen tüm matematiksel veya istatiksel işlemler interval ölçeğin sağladığı sayısal verilere uygulanabilir. İnterval ölçek daha önceki ölçeklerin sınıflama ve sıralama özelliklerini içermesinden başka, eşit aralıklar koşulunu gerçekleştirmekle daha üst düzeyde bir ölçek niteliği kazanmaktadır.
Rasyo (Oran) Ölçek; "Rasyo" ölçei "gerçek sıfır noktası" olan bir interval ölçektir. En güçlü ölçeği oluşturur. Ne var ki, nesne veya olgulara ilişkin niteliklerin pek çoğu bu ölçekte ölçülmenin gerektiği koşulları karşılayamamaktadır. İçlemsel (Intensive) niteliklerin tümü bu gruba girer. Fizik bilimlerde genis¸ uygulama alanı bulunan rasyo ölçeği, niteliklerin "toplanabilir" olmasını gerektirmekte, bu özellikten yoksun niteliklerin ölçümünde doğrudan kullanılamamaktadır.
Kısacası rasyo ölçeğin uygulanması ancak eşitlik, sıralama, eşit aralık ve eşit oran saptanmasına elverişli işlemlerin kapsandığı hallerde olanaklıdır. Ağırlık, uzunluk, alan, hacim, açı, elektrik direnci gibi toplanabilir niteliklere ilişkin ölçekler rasyo ölçeğinin tipik örneklerini oluşturur.
Bir nitelik interval ölçekte ölçülemezse, rasyo ölçekte de ölçülemez. Ama tersi doğru değildir. Rasyo ölçekte ölçülmeye elverişli herhangi bir nitelik diger ölçeklerde haydi haydi ölçülebilir.
Ölçmenin amacı gözlem verilerimizin kesinliğini artırmak, onları sayısal ifadeye, dolayısıyla matematiksel işlemlere elverişli olacak biçimde saptamaktır.
Ölçme hatası ile ölçme güvenirliği birbiriyle yakından ilgili iki kavramdır. Hatası az olan ölçme, güvenirliği yüksek ölçmedir. Başka bir deyisle, bir ölçme aracı veya işlemi ölçülen şeyi ne kadar doğru (yani hatasız) ölçüyorsa, o kadar güvenilir sayılır.
Bir ölçeğin güvenirliğini artırmada başlıca yol, hataya yol açan etkenleri denetlemektir.
Hatanın çeşitli kaynaklar arasında şu üçü özellikle önemlidir:

1. Ölçme aracımızın yetersiz veya kusurlu oluşu. Hiçbir ölçü aracı, ne denli duyarlı olursa olsun, mükemmel sayılamaz.

2. Ölçümü yapan kişinin yetersizliği. Deneyim, beceri, ilgi, dikkat gibi kişilik nitelikleri yanında duyu organlarının normal çalışıp çalışmaması da ölçme hatasını artırıcı veya azaltıcı etkenlerdir.

3. Ölçme işleminin (hatta ölçme aracının) dayandığı teorik koşulların ya hiç ya da yeterince yerine getirilememesi.

Matematikte Bunalımlar:

Matematiğe, gelişimini doğru bir çizgi üzerinde devam ettiren, problemlerini er ya da geç çözüme kavuşturan istikrarlı bir bilim gözüyle bakılmıştır. Halbuki, matematik tarihine baktığımızda durumun hiç de böyle olmadığını, bilimin diğer alanlarında olduğu gibi matematikte de durak- lamalar, yozlaşmalar, bunalımlar, görüş, yaklaşım ve fikir ayrılıklarının olduğunu görürüz.

Bilimde olduğu gibi matematikte de kesinlik arayışı dogmatizme, dogmatizm de beklenmedik değişiklik ve gelişmeler karşısında bunalıma yol açmıştır. Buna karşın her bunalımı, tüm olumsuz görünümüne rağmen, yeni bir atılım ya da açılmaya giden yolda başlangıç koşulu olarak nite- leyebiliriz. Bu bunalımlar kısa ya da uzun sürsün, geçici bir bocalama olmaktan ileri gitmemiştir.

Tarih boyunca matematiğin geçirdiği bunalımları aşağıdaki gibi dört ana başlık altında toplayabilmemiz mümkündür.

1.İrrasyonel Sayilar Bunalımı:

Matematikte ilk bunalım antik Yunan döneminde (M.Ö. 5. yüzyıl) iki tamsayının bölümü olarak belirlenemeyen doğru parçalarının varlığının tespit edilmesiyle başlar. Buna örnek olarak, kenarı bir birim olan karenin köşegenini verebiliriz. Pisagorculara göre, karenin kenarı ve köşegeni gibi aynı türden geometrik büyüklüklerin ortak ölçüsüz olması açıklanamaz bir skandaldı ve bu yüzden gizli tutulmasına karar verildi.

Bu olayın yanı sıra Elea'lı Zeno'nun adıyla anılan paradoksların ortaya çıkmasıyla matematikteki bunalım yoğunluk kazandı. Bu paradokslar aşağıdaki gibi değişik şekillerde ifade edilir:

Aşil ve Kaplumbağa

Yunan kahramanı Aşil'in kaplumbağa ile bir yarış yaptığını düşünelim.

Çok iyi bir koşucu olduğu için Aşil kaplumbağanın belirli bir mesafe, örneğin yüz metre, ileriden başlamasına izin verir. Eğer her ikisinin de sabit hızlarda koştuğunu düşünürsek (biri sabit yüksek bir hızda, diğeri sabit düşük bir hızda), belirli bir süre sonra Aşil yüz metre koştu-
şunda, kaplumbağanın başladığı yere gelmiş olacaktır; bu süre boyunca kaplumbağa da küçük de olsa belirli bir mesafe 'koşmuştur', örneğin 1metre. Aşil bir süre sonra bu mesafeyi de tamamladıg˘ında, o süre içerisinde kaplumbağa yine küçük de olsa bir mesafe ilerlemis¸olacaktır ve bu böyle devam edecektir.

Böylece, Aşil ne zaman kaplumbag˘anın varmıs¸ olduğu bir noktaya varsa, daha hâlâ gitmesi gereken bir mesafe kalmıs¸ olacaktır. Bu nedenle Zeno Aşil'in kaplumbağayı hiçbir zaman geçemeyeceğini söylemiştir.

2. Sonsuz Küçükler Hesabi Bunalimi

Modern matematik başladıgında, matematik gelenegine iki düşünce hakimdi. Bunlardan biri, antik Yunan matematiğinden kaynaklanan ispata dayalı geometri, diğeri Hint ve İslam matematiğinde ön plana çıkan sayı kavramı ve ona dayalı cebir.

Bunlardan ilki Descartes'in (1596-1650) o zamana dek birbirinden tümüyle ayrı görünen matematiğin iki dalını, geometri ile cebiri, birleştirme çabasının bir ürünüdür.

İkinci büyük gelişme, daha sonra analiz denen çalışmaya yol açan, Newton ile Leibniz'inbirbirinden bağımsız olarak oluşturdukları sonsuz küçükler hesabıdır.

Daha XVIII. Yüzyılın ilk yarısında belirsiz kalmıs¸ birtakım noktalar yanında kimi çelişkilerin de giderek su yüzüne çıkması ciddi tereddütlere yol açar. Berkley 1737'de The Analyst adlı yapıtında kalkülüsü, kavramsal dayanaklarını irdeleyerek oldukça ayrıntılı bir eleştiriden geçirir. Daha sonra Legendre ve Lagrange gibi kimi seçkin matematikçilerin de durumdan yakındıklarını biliyoruz.

XIX. yüzyılda Gauss (1777-1855) ile Cauchy (1789-1857) gibi matematikçiler bir yandan eleştirel tutum izlerken, öbür yandan yeni buluşlara yönelik atılımlar sergilemişlerdir. Gauss çalışmasının önemli bir bölümünü matematiği sağlam bir temele oturtma amacına yöneltmişti. Onun, cebirin temel teoremi olarak bilinen karmaşık sayılar alanında her cebirsel denklemin bir kökü olduğu iddiasını ispatlama uğraşı bu amaca yönelik önemli bir çalışmadır.

Analizi gerçel sayılar alanından karmaşık sayılar alanına genişletme işini ise büyük ölçüde Cauchy'ye borçluyuz.

Limit, süreklilik gibi kavramlar ilk kez Cauchy'nin elinde açık ve belirgin anlamlarını kazanmıştır. Cauchy'nin limitler teorisi daha sonra Weierstrass'ın çalışmasıyla birleşerek sonsuz küçükler kavramını gereksiz kılar. Bu gelişmeyle ortaya çıkan sonsuz sayılar ile süreklilik sorunlarını ise George Cantor ele alır. Cantor sonsuz bir dizi ya da kümeyi, kardinal sayısı herhangi bir alt bölümünün kardinal sayısına denk olan küme diye tanımlar. Cantor, geliştirdiği sonsuz sayılar teorisinde farklı büyüklükte sonsuz dizi ya da kümelerin olduğunu gösterdi. Örneğin, gerçel sayılar kümesi, doğal sayılar kümesinden daha büyük bir kümedir.

Analiz bugün bilinen kimlig˘ine büyük ölçüde XIX. yüzyılın ikinci yarı- sında Karl Weierstrass'ın (1815-1897) çalışmasıyla ulaşır. Cauchy'nin, bulanık sonsuz küçükler kavramı yerine daha açık ve net limitler kavramını getirmesiyle başlayan, Weierstrass'ın analizi aritmetikleştirmesiyle, Cantor'un süreklilik ve sonsuz sayılar kavramına açıklık getirmesiyle noktalanan çalışmalar geçen yüzyılda yaşanan bunalımı önemli ölçüde gidermiştir.

3. Öklid Dışı Geometriler Bunalımı

İki bin yılı aşkın bir süre boyunca "biricik geometri" kimliğini koruyan Öklid geometrisinden farklı geometrilerin ortaya çıkışı kolayca sindirilebilir bir gelişme olamazdı. Kant'a göre geometrinin konusu uzay, temel özelliklerini aklımızın yapısına borçluydu; geometrik önermeler bu nedenle zorunlu "a priori" doğrulardı. Başka bir deyişle, bir tek geometriye olanak vardı, o da Öklid geometrisiydi.

Matematiğin pekiştirilmesine yönelik bu çabada "mantıksal" diyebileceğimiz bir yaklaşımdan da söz edebiliriz. Richard Dedekind'in (1831-1916) çalıs¸masında kendini gösteren bu yaklaşım, Peano, Frege ve Russell gibi mantıkçı-matematikçilerde daha belirgin bir karakter kazanır.

Frege, matematiğin mantıksal temellerini derinlemesine irdelemiş aritmetiğe, geometrinin eriştiği düzeyin de ötesinde bir ispat bilimi kimliği kazandırmaya çalışmıştır.

4. Matematiğin Temelleri Bunalımı
Bu bunalım Cantor'un genel kümeler kuramına ilişkin paradokslardan kaynaklanır. Cantor oluşturduğu kümeler kuramında herhangi bir sonsuz sayıdan daima daha büyük sonsuz bir sayının olduğunu ispatlamıştı.
Bertrand Russell'ın (1872-1970) 1901'de bulduğu paradoks doğrudan küme kavramından kaynaklanan bir paradokstu. Russell kümeleri kendi kendisine üye olup olmamasına göre ikiye ayırarak, paradoksunu oluşturdu.
Matematik Felsefesi Ekolleri
Mantıkçılık
Alman matematikçi, mantıkçı ve filozof Gotlobb Frege'nin öncülüğnde belirgin bir kimlik kazanan mantıkçılık, kökeni daha gerilere uzanan bir görüştür. XVII. yzyılda Leibniz mantıkçılık tezini andıran düşünceler ileri sürmüştür. Leibniz'e göre mantığın kavram ve ilkeleri tüm diğer bilimlerin temelinde yer alan düşünceleri oluşturuyordu. Frege'den hemen önce tanınmış matematikçi Dedekind, aritmetiği mantıksal bir yöntemle ele almıştır. Ancak Frege'in yaklas¸ımı daha kesindi. Frege'ye göre aritmetik mantığa indirgenerek temellendirilmeliydi.
Frege, "matematik temelde mantıkla özdeştir" der. Frege aritmetiği, Russell ise tüm matematiği mantığa indirgeme yolundan mantıkçılık tezini ispatlamaya çalışmışlardır.
Matematiği mantığa indirgeme girişimininin gerçeklik kazanması şu iki koşulun yerine getirilmesine bağlı görülmüştür:
1) Tüm matematiksel kavramların salt mantıksal terimlerle belirtilip tanımlarını vermek,
2) Matematiğin tüm aksiyom ve teoremlerini mantığın temel ilkelerinden çıkarsamak.

İlk koşul, tanımlayıcı olarak kullanılacak mantık terimlerinin belirlenmesini gerektirmekteydi. Bunlar örneğin "mantıksal değişmezler" denen "değil", "ve", "veya", "ise", "tüm", "bazı" gibi hiçbir bağlamda vazgeçilemeyen sözcüklerdir.
Frege sayı kavramını küme kavramının yanı sıra eşdeğerlilik ilişkisine başvurarak tanımlama yoluna gitmiştir. Ona göre elemanları tam bire- bir eşleme içinde olan iki küme eşdeğerdir. Örneğin bir pardösüdeki düğmelerin kümesiyle iliklerin kümesi eşdeğer kümelerdir.
Peano tüm aritmetigği üç ilkel terime ("sayı","sıfır", "..yı izleyen") ve bu terimlerin ilişkilerini dile getiren beş postulata dayanan bir sistem olarak kurmuştur;;

1. Sıfır bir sayıdır,
2. Herhangi bir sayıyı izleyen de bir sayıdır,
3. Aynı sayıyı farklı iki sayı izlemez,
4. Sıfır hiçbir sayıyı izlemez,
5. Sıfıra ait bir özellik, herhangi bir sayıya ait oldug˘unda onu izleyen sa- yıya da ait ise tüm sayılara aittir.

PLATONCULUK
Yirminci yüzyıl "Platoncu matematik" olarak biline gelen çalışma ilkelerini ve ona bağlılıklarını ifade eden makaleleri kesin bir şekilde betimlemisş değildir. Ancak bu ilkelerin başlıcalarını şunlardır:
- Gerçel sayı dizgesi gibi, belirli ideal matematiksel büyüklükler bulunmaktadır,
- Belirli tümdengelim biçimleri vardır,

- Eğer matematiksel bir önerme akla yatkın geliyorsa, onun doğru ya da yanlış olduğu kanıtlanabilir,
- Matematik temel olarak, matematikle uğraşan insanlardan bağımsızdır ve ayrı olarak vardır.

Biçimcilik (Formaliz)

Bir matematik felsefesi olarak biçimcilik; matematiksel sistemlere temel olarak biçimselleştirilmiş sistemler dışında başka hiçbir şekilde bakmama görüşüdür. Yani diğer düşünce önerileri gibi indirgemeci değerlendirmelerdir. Biçimcilik; temellendirmeyi matematiğin kendi içerisinde bir yeniden düzenleme ya da arındırmayla gerçekleştirmeyi öngörmüştür.

David HİLBERT(1862-1943)'in öncülüğünde oluşan formalist öğreti, bir reform programı niteliğindedir. Amaç; programı, kümeler teorisinden kaynaklanan paradokslar ile sezgicilerin klasik matematiğe yönelttikleri eleştiriler karşısında matematiğin tutarlılığını güvence altına almaktır.

Gödel Darbesi (1931)

Hilbert, programının başlıca amaçlarını;

(1) Matematiğin aritmetik, geometri, analiz ve kümeler teorisi gibi dallarını (sonunda tüm matematiği) aksiyomatikleştirmek;

(2) Her dalda kurulan aksiyomatik dizgenin çelişki içermeyen tutarlı bir teori olduğunu ispatlamak;

(3) Tutarlılığı ispatlanan teorinin aynı zamanda tam (yani dizgenin kurallarına göre oluşturulan P ya da ∼ P gibi her tümcenin dizgenin öncülleri aksiyomlardan çıkarsanabilir) olduğunu göstermek;

(4) Tutarlılığı ve tamlığı ispatlanan teoremin kategorik (yani teorinin tüm yorum ya da modellerinin izomorfik) olduğunu belirlemek diye dört noktada özetleyebiliriz.

Gregory John Chaitin'in "Matematiğin Temelleri Üzerine Uyuşmazlık Yüzyılı" isimli makalesinde biçimciliğin farklı sonuçlarını da ele almıştır. Biçimcilik akıl yürütme veya mantıksal çıkarım için değil de programlama ve hesaplamada son derece başarılı olmuştur.

Sezgicilik, kavram ve çıkarımlara somut içerik sağlayan bir sezgiyi matematiğin tek geçerli yöntemi sayan bir görüşü temsil et-mektedir. Kısaca sezgicilik, sonlu adımda inşa yöntemiyle matematiğin sezgisel olarak bildiğimiz doğal sayılar üzerine kurulabileceği tezini içermektedir.